الرياضيات

الجزء الخاص
بالشرح و التمارين





تطبيق
التعلّم التفاعلى



إعداد نخبة من خبراء التعليم

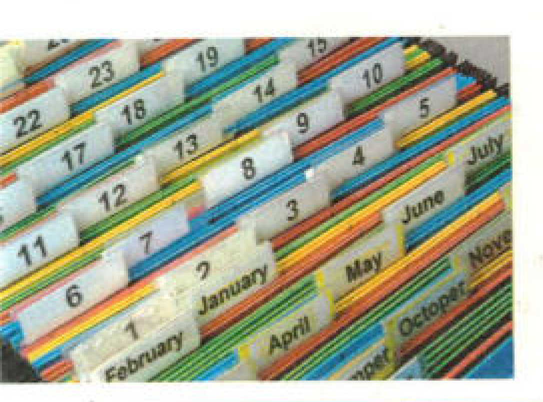
الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

محتويات الكتاب

أولًا : الجبـر وحسـاب المثـلثات

الوحدة 1 المصفوفـات



الوحدة 2 البرمجة الخطية



الوحدة 3 حسـاب المثـلثـات



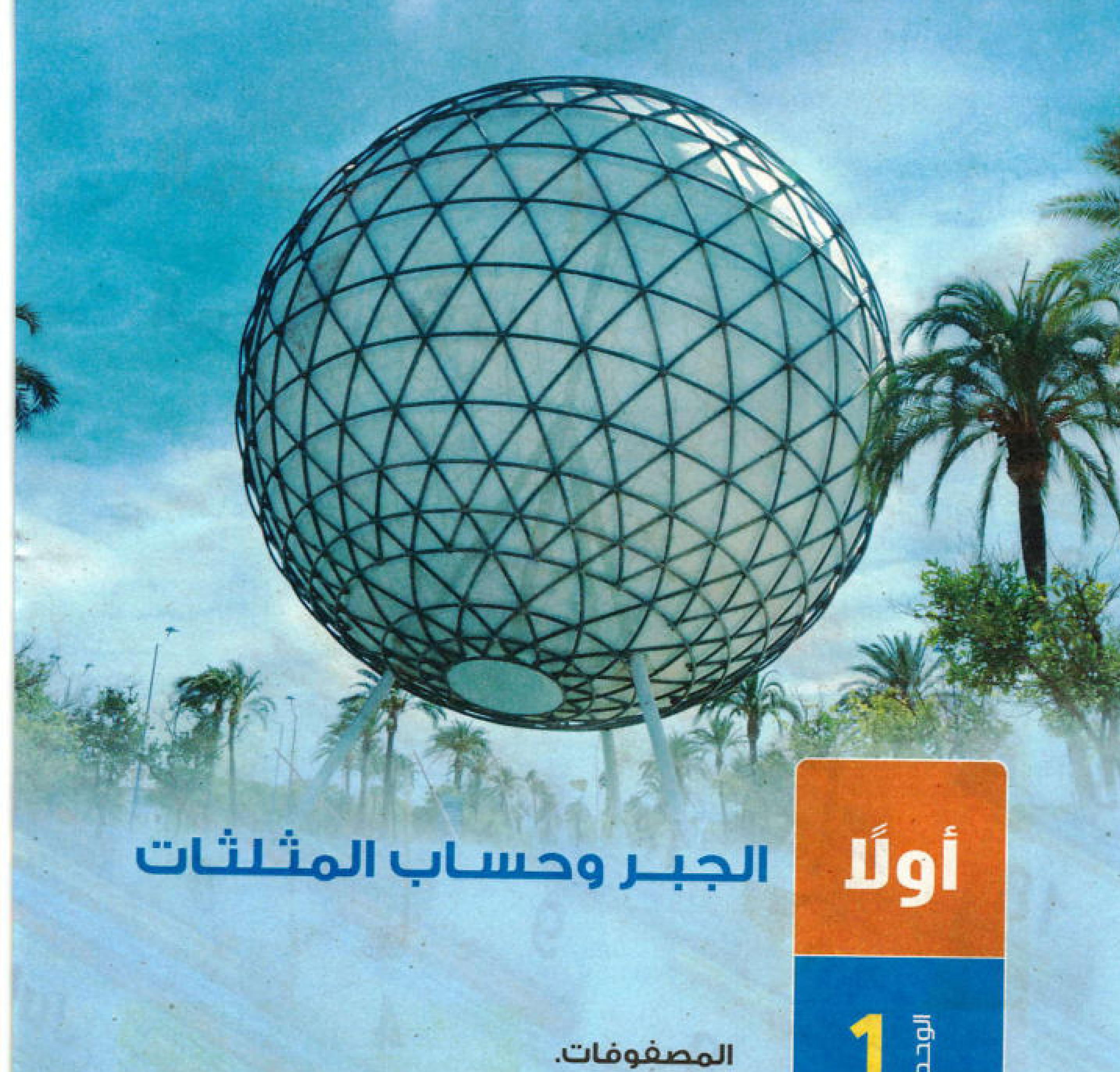
ثانيًا : الهنـدسـة التحليلية

الوحدة 4 المتجهات



الوحدة 5 الخط المستقيم





أولًا الجبر وحساب المثلثات

الوحدة 1 المصفوفات.

الوحدة 2 البرمجة الخطية.

الوحدة 3 حساب المثلثات.

الوحدة الأولى

المصفوفات



دروس الوحدة

الدرس 1	تنظيم البيانات فى مصفوفات.
الدرس 2	جمع وطرح المصفوفات.
الدرس 3	ضرب المصفوفات.
الدرس 4	المحددات.
الدرس 5	المعكوس الضربى للمصفوفة.

نواتج التعلُّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- ينمذج بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة.
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يضرب عددًا حقيقيًا فى مصفوفة.
- يتعرف مفهوم المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتعرف خواص جمع وضرب المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات فى مجالات الحياة المختلفة.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة محدد الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات.
- يحل نظامًا من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٢ × ٢
- يحل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.

نبذة تاريخيـة

J.J. Sylvester (1814 - 1897)

أول من استخدم مصطلح «مصفوفة Matrix»
هو العالم الإنجليزى : جيمس جوزيف سلفستر (١٨١٤ – ١٨٩٧م)

Arthur Cayley (1821 - 1895)

أول من استخدم المصفوفات هو العالم البريطانى كيلى (١٨٢١ – ١٨٩٥م) وهو عالم رياضيات له الكثير من الأبحاث خاصة فى الجبر وتضمنت تلك الأبحاث نظرية المصفوفة.

انتشرت المصفوفات فى عصرنا الحاضر فشملت العديد من فروع العلوم والمعرفة فنجد استخداماتها فى علوم الإحصاء والاقتصاد والاجتماع وعلم النفس، كما أن لها دورًا هامًا فى علم الرياضيات وخاصة فى فرع الجبر الخطى.

الدرس

1

تنظيم البيانات فى مصفوفات

مثال توضيحى



- أحد محلات بيع البيتزا يبيع أربعة أنواع من البيتزا :

(بيتزا بالخضروات - بيتزا بالدجاج - بيتزا باللحوم - بيتزا بالجبن)

وينتج لكل نوع من الأنواع السابقة ثلاثة أحجام مختلفة : (صغير - وسط - كبير)

- لسهولة تذكر المعلومات والمقارنة بينها يقوم صاحب المحل بجدولة متوسط عدد القطع المبيعة يوميًا فى الجدول المقابل بصورة مختصرة.

النوع \ الحجم	صغير	وسط	كبير
بيتزا الخضروات	١٥	١٣	٩
بيتزا الدجاج	١٦	١٨	١٢
بيتزا اللحوم	١٣	١٠	٨
بيتزا الجبن	١٨	٢٠	١٧

- كل عدد فى هذا الجدول له دلالة ، فالعدد ١٠ يدل على عدد القطع المبيعة من بيتزا اللحوم حجم الوسط، والعدد ١٢ يدل على عدد القطع المبيعة من بيتزا الدجاج الحجم الكبير ، ... وهكذا.
- إذا كنا نعلم مسبقًا أن الأعداد بالصف الأول هى متوسط القطع المبيعة يوميًا من بيتزا الخضروات من الأحجام : الصغير ، الوسط، الكبير على الترتيب ، وبالمثل الأعداد بالصف الثانى من بيتزا الدجاج ، والثالث بيتزا اللحوم ، والرابع بيتزا الجبن بنفس الترتيب فإننا نستطيع الاستغناء عن الجدول السابق وكتابة البيانات فى صورة أكثر اختصارًا بكتابة

الأعداد فقط المتضمنة فيه بنفس ترتيبها داخل قوسين كبيرين من النوع ( )

فنكتب : متوسط البيع اليومى للمحل = $\begin{pmatrix} ١٥ & ١٣ & ٩ \\ ١٦ & ١٨ & ١٢ \\ ١٣ & ١٠ & ٨ \\ ١٨ & ٢٠ & ١٧ \end{pmatrix}$

- تُسمى هذه الصورة **مصفوفة** ، كما تُسمى الأعداد بين القوسين **عناصر المصفوفة.**
- هذه المصفوفة تتكون من :

أربعة صفوف **وثلاثة** أعمدة كما بالشكل المقابل

لذلك نقول إنها مصفوفة **على النظم ٤ × ٣**

(أو اختصاراً مصفوفة ٤ × ٣)

ونلاحظ أننا ذكرنا عدد الصفوف أولًا ثم عدد الأعمدة وليس العكس.

	العمود الأول	العمود الثانى	العمود الثالث
الصف الأول ←	١٥	١٣	٩
الصف الثانى ←	١٦	١٨	١٢
الصف الثالث ←	١٣	١٠	٨
الصف الرابع ←	١٨	٢٠	١٧

ملاحظة

يمكن لصاحب المحل تنظيم بياناته السابقة فى جدول آخر مثل الجدول التالى :

النوع

الحجم	بيتزا الخضروات	بيتزا الدجاج	بيتزا اللحوم	بيتزا الجبن
صغير	١٥	١٦	١٣	١٨
وسط	١٣	١٨	١٠	٢٠
كبير	٩	١٢	٨	١٧

وبالمثل يمكن الاستغناء عن الجدول السابق بكتابة الأعداد داخل مصفوفة.

فنكتب : متوسط البيع اليومى للمحل = $\begin{pmatrix} ١٥ & ١٦ & ١٣ & ١٨ \\ ١٣ & ١٨ & ١٠ & ٢٠ \\ ٩ & ١٢ & ٨ & ١٧ \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة على النظم ٣ × ٤

مما سبق يمكن تعريف المصفوفة كما يلى :

تعريف المصفوفة

- المصفوفة هى ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) فى صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين بحيث يكون الموقع فى المصفوفة له معنى.
- المصفوفة المكونة من م صفًا ، ن عمودًا تكون على النظم م × ن أو من النوع م × ن (وتُقرأ م فى ن) حيث م ، ن عددان صحيحان موجبان.
- عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن

• التعبير عن العنصر داخل المصفوفة :

- يُرمز للمصفوفة عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل : أ ، ب ، ج ، س ، ص ، ...

بينما يُرمز للعنصر داخل المصفوفة بأحد الحروف الصغيرة مثل : أ ، ب ، حـ ، س ، ص ، ...

- إذا أردنا التعبير عن العنصر داخل المصفوفة أ الذى يقع فى الصف ص والعمود ع

فإننا نكتبه على الصورة $أ_{ص ع}$

فمثلًا العنصر $أ_{٢٣}$ يقع فى الصف الثانى والعمود الثالث [ويُقرأ : أ اثنين ثلاثة]

، العنصر $أ_{٣٢}$ يقع فى الصف الثالث والعمود الثانى [ويُقرأ : أ ثلاثة اثنين]

مثال ١

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & -٣ & \sqrt{٥} \\ -١ & ٠ & -٢ \\ ٢ & \frac{١}{٤} & ٩ \end{pmatrix}$

١ اكتب نظم كل من المصفوفات : أ ، ب ، ج

٢ اكتب العناصر الآتية : $أ_{٢٢}$ ، $ب_{١٢}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $ب_{٢١}$ ، $حـ_{٣٢}$ ، $حـ_{٢٣}$

الحل

١ أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٣ × ٣

٢ $أ_{٢٢} = ٦$ ، $ب_{١٢} = -١$ ، $أ_{٢٣} = -٤$ ، $ب_{٢١} = ٥$ ، $حـ_{٣٢} = \frac{١}{٤}$ ، $حـ_{٢٣} = -٢$

حاول بنفسك

إذا كانت المصفوفة $س = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & ١ \\ -٧ & ٠ \end{pmatrix}$:

١ اكتب نظم المصفوفة س   ٢ اكتب العناصر الآتية : $س_{٣٢}$ ، $س_{١٢}$ ، $س_{٢١}$

ملاحظة

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فيمكننا كتابتها على الصورة :

$أ = (أ_{ص ع})$ حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

وسوف تقتصر دراستنا على الحالات التى فيها ١ ≤ م ≤ ٣ ، ١ ≤ ن ≤ ٣

مثال ٢

اكتب المصفوفة $(أ_{ص ع})$ على النظم ٣ × ٢ بحيث : $أ_{ص ع} = ٢ ص - ع$

الحل

∵ المصفوفة على النظم ٣ × ٢ ∴ $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix}$

حيث $أ_{١١} = ٢ × ١ - ١ = ١$ ، $أ_{٢١} = ٢ × ١ - ٢ = ٠$ ، $أ_{١٢} = ٢ × ٢ - ١ = ٣$

، $أ_{٢٢} = ٢ × ٢ - ٢ = ٢$ ، $أ_{١٣} = ٢ × ٣ - ١ = ٥$ ، $أ_{٢٣} = ٢ × ٣ - ٢ = ٤$

∴ $(أ_{ص ع}) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

بعض المصفوفات الخاصة

١ مصفوفة الصف

هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة

فمثلًا $أ = (٢ \quad ٣ \quad -١)$ هى مصفوفة صف على النظم ١ × ٣

٢ مصفوفة العمود

هى المصفوفة التى تتكون من عمود واحد وأى عدد من الصفوف

فمثلًا $س = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة عمود على النظم ٢ × ١

٣ المصفوفة المربعة

هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة

فمثلًا $أ = \begin{pmatrix} \sqrt{٣} & ٥ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

٤ المصفوفة الصفرية

هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $\square$ وتكون على أى نظم.

فمثلًا $\square_{٢ × ٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢

، $\square_{٣ × ١} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة صفرية على النظم ٣ × ١

٥ المصفوفة القطرية

هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ، ما عدا عناصر القطر الرئيسى فيكون أحدها على الأقل لا يساوى الصفر [حيث إن القطر الرئيسى هو القطر الذى يحتوى العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$]

فمثلًا ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢- & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣

، س = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢

٦ مصفوفة الوحدة

هى مصفوفة قطرية ، يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسى مساوية الواحد ويُرمز لها بالرمز I

فمثلًا I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة وحدة على النظم ٢ × ٢

، I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة وحدة على النظم ٣ × ٣

لاحظ أن

فى مصفوفة الوحدة

$أ_{ص ع}$ = ١ لكل ص = ع

$أ_{ص ع}$ = ٠ لكل ص ≠ ع

تحقق من فهمك

اكتب نوع ونظم كل مصفوفة مما يأتى :

١ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١- \\ ٤ \end{pmatrix}$

٢ $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

٣ $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

٤ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٥ $\begin{pmatrix} ٧ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

٦ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

تساوى مصفوفتين

• تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

١ المصفوفتان على نفس النظم.

٢ كل عنصر فى المصفوفة أ يساوى العنصر المناظر له فى الموضع فى المصفوفة ب

أى أن $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$ لكل ص ولكل ع

فمثلًا $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢- \\ ٢ & ٣ & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢- \\ \frac{٤}{٢} & ٣ & ١- \end{pmatrix}$

بينما $\begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣- & ٥ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣- & ٨ \end{pmatrix}$ لاختلاف العناصر المتناظرة

، **وكذلك** $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ لأنهما ليستا على نفس النظم.

مثال ٣

أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع إذا كان : $\begin{pmatrix} ع & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ٠ & س + ٥ \\ ٤ & ٢ ص - ٣ & ٥ \end{pmatrix}$

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان.

∴ ع = −١ ، س + ٥ = ٢ ومنها س = −٣ ، ٢ ص − ٣ = ٧ ومنها ص = ٥

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كان : $\begin{pmatrix} س^{٣} & ٢- \\ ٣ & ٢ ص - ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢- \\ ٣ & -ص \end{pmatrix}$

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة

إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن فإن حاصل ضرب أى عدد حقيقى ك فى المصفوفة أ هى المصفوفة ج = ك أ على نفس النظم م × ن وكل عنصر من عناصر المصفوفة ج يساوى العنصر المناظر له فى المصفوفة أ مضروبًا فى العدد الحقيقى ك

أى أن $ج_{ص ع} = ك\, أ_{ص ع}$ حيث ص = ١ ، ٢ ، ... ، م ، ع = ١ ، ٢ ، ... ، ن

أى أن ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى ذلك العدد الحقيقى. ولايغير من نظم المصفوفة

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٦ & ٢- & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : • $٢ أ = \begin{pmatrix} ٦ \times ٢ & ٢- \times ٢ & ٣ \times ٢ \\ ٢ \times ٢ & ٤ \times ٢ & ٠ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٤- & ٦ \\ ٤ & ٨ & ٠ \end{pmatrix}$

• $-٣ أ = \begin{pmatrix} ١٨- & ٦ & ٩- \\ ٦- & ١٢- & ٠ \end{pmatrix}$

مـلاحظـة

يمكن أخذ عامل مشترك من بين جميع عناصر المصفوفة.

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ & ٦ \\ ٢ & ٠ & -١٤ \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{pmatrix}$

مثـال ٤

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١٠ & -٢٠ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = -٢\begin{pmatrix} -٥ & ٥\text{س} \\ ٤ & -٢\text{ص} \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** $\sqrt[٣]{\text{س ص}}$

الحـل

$\because \begin{pmatrix} ١٠ & -٢٠ \\ -٨ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -١٠\text{س} \\ -٨ & ٤\text{ص} \end{pmatrix}$ $\therefore$ -٢٠ = -١٠ س ومنها س = ٢

، ١٦ = ٤ ص ومنها ص = ٤ $\therefore \sqrt[٣]{\text{س ص}} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

حاول بنفسك

١ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** ٣ أ ، - أ ، -٥ أ

٢ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢٤ & -٨ \\ ٣٢ & ٠ \\ ١٢ & -٤ \end{pmatrix} = ٤\begin{pmatrix} ٦ & ٢\text{ص} \\ -٢\text{س} & ٠ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** س ص

مـدور المصـفوفة

فى أى مصفوفة أ على النظم م × ن إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مصفوفة على النظم ن × م تسمى بمدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $\text{أ}^{\text{مد}}$

أى أن إذا كانت : أ = $(\text{أ}_{\text{ص ع}})$ فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = (\text{أ}_{\text{ع ص}})$

فمثلًا • إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٥ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢

، $(\text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix} = \text{أ}$

لاحظ أن

$(\text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ} ، I^{\text{مد}} = I$

• إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ١ (مصفوفة عمود)

فإن : $ب^{مد} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣ (مصفوفة صف)

، $(ب^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = ب$

مثال ٥

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} \text{ظا } 60° & \text{قا } 60° \\ \text{قا } 60° & \text{جا } 30° \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2}\text{ص} \\ \sqrt{3}\text{س} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ وكانت : $أ = ب^{مد}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

الحل

$\because أ = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}\text{س} \\ \frac{1}{2}\text{ص} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

، $\because أ = ب^{مد}$

$\therefore \sqrt{3}\text{س} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ومنها س $= \frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ص = ٢ ومنها ص = ٤

حاول بنفسك

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & \text{س} + 2 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \\ -5 & \text{ص} \end{pmatrix}^{مد}$ **فأوجد :** $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن :

• أ تُسمى مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كانت : $أ = أ^{مد}$

• أ تُسمى مصفوفة شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت : $أ = -أ^{مد}$

فمثلًا

- إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

أى أن أ مصفوفة متماثلة لأن : $أ = أ^{مد}$

- إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} -٤ & -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

فإن : $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٤ & \frac{١}{٢} & ٠ \\ -٢ & ٠ & -\frac{١}{٢} \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -٤ & -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٢ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

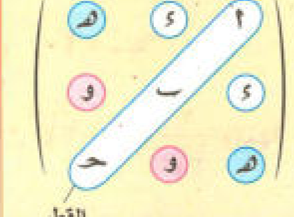
أى أن ب مصفوفة شبه متماثلة لأن : $ب = - ب^{مد}$

ملاحظات

- إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة فإننا نلاحظ تماثل عناصرها حول القطر الرئيسى ،

فيكون : $أ_{ص ع} = أ_{ع ص}$ كما بالشكل المقابل حيث :

$أ_{١٢} = أ_{٢١} = د$ ، $أ_{١٣} = أ_{٣١} = هـ$ ، $أ_{٢٣} = أ_{٣٢} = و$



- عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة شبه المتماثلة تكون مساوية الصفر وعناصرها تحقق العلاقة : $أ_{ص ع} = - أ_{ع ص}$ كما بالشكل المقابل :

حيث : $أ_{١٢} = - أ_{٢١} = - د$ ، $أ_{١٣} = - أ_{٣١} = - هـ$ ، $أ_{٢٣} = - أ_{٣٢} = - و$

القطر الرئيسى

- أى مصفوفة قطرية هى مصفوفة متماثلة.
- أى مصفوفة وحدة تكون مصفوفة متماثلة.

مثال ٦

١ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{٨} & \text{٢س} & \text{٥} \\ \text{٦} & \text{-٣} & \text{-٤} \\ \text{٤} & \text{٦} & \text{س + ٢ص} \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

٢ إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{٧} & \text{٣س} & \text{٠} \\ \text{-٢ع} & \text{٠} & \text{ع + ٣} \\ \text{٠} & \text{٦} & \text{٣ص - س} \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع

الحل

١ ∵ أ مصفوفة متماثلة. ∴ ٢ س = -٤ ومنها **س = -٢**

، س + ٢ ص = ٨ ∴ -٢ + ٢ ص = ٨ ومنها **ص = ٥**

٢ ∵ ب مصفوفة شبه متماثلة. ∴ ع + ٣ = -٣ س (١)

، ٣ ص - س = -٧ (٢)

، -٢ ع = -٦ ومنها **ع = ٣**

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٣ + ٣ = -٣ س ومنها **س = -٢**

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ٣ ص + ٢ = -٧ ومنها **ص = -٣**

حاول بنفسك

١ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{٨} & \text{٥} \\ \text{٦} & \text{-٢س} \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة **فأوجد قيمة :** س

٢ إذا كانت : $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{-٨} & \text{٠} \\ \text{١٢} & \text{٠} & \frac{1}{2}\text{س} \\ \text{٠} & \text{ص - س} & \text{-٥} \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة **فأوجد قيمتى :** س ، ص

تمـارين 1 على تنظيم البيانات فى مصفوفات



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهـم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ على النظم ....

(أ) ٢ × ١ (ب) ١ × ٣ (جـ) ٣ × ٢ (د) ٣ × ١

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٩ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{١٢} + ج_{٢١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) -٥ (د) ٣

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ فإن : عدد عناصر المصفوفة أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٥

(٤) إذا كانت ب مصفوفة على النظم ٣ × ١ فإن : $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٣ × ٣ (جـ) ١ × ١ (د) ١ × ٣

(٥) إذا كانت ▭ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢ فإن عدد عناصرها يساوى ....

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ٢ (د) ٤

(٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٤ فإن الصف يحتوى على .... عنصر.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فإن المصفوفة ٢ أ على النظم ....

(أ) ٦ × ٤ (ب) ٣ × ٤ (جـ) ٦ × ٢ (د) ٣ × ٢

(٨) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٧ & -٢ & ٣ \\ ٢ & -٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = أ^{مد}$ فإن : $أ_{٢١} + ب_{١٣}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٤ (د) ١٠

(٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٦ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $٢ أ^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & ٦ & ٤ \\ ١٢ & -١٤ & ٨ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ -٧ & ٦ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ -١٤ & ٦ \\ ١٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ -١٤ & ٣ \\ ١٢ & -١ \end{pmatrix}$

(١٠) أقل عدد عناصر يمكن أن تحتويها مصفوفة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١١) إذا كان عدد عناصر مصفوفة يساوى ٩ عناصر فإن عدد النظم الممكنة لهذه المصفوفة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة عدد عناصرها ن فإن ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٣) إذا كان عدد عناصر المصفوفة س يساوى ١٢ عنصر فأى مما يأتى لا يمكن أن يكون نظمًا للمصفوفة س؟

(أ) ٣ × ٤ (ب) ٢ × ٦ (جـ) ٤ × ٨ (د) ١ × ١٢

(١٤) المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة ....

(أ) وحدة. (ب) صفرية. (جـ) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(١٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٧ & ٢٠ - ٢\text{س} \\ ٣ - ٦\text{ص} & ١٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية فإن : س + ٢ ص = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(١٦) أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان : $\text{أ}_{١٢}$ = س + ٤ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ٤

(جـ) –٤ (د) أى عدد حقيقى ماعدا –٤

(١٧) فى المصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ١ \\ ١ & \text{س} & -١ \\ ٢ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ إذا كان مجموع عناصر القطر الرئيسى = ضعف مجموع عناصر القطر الآخر فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) –٤ (جـ) ٤ (د) ٧

(١٨) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان مجموع عناصر أ يساوى ١٢ فإن مجموع عناصر القطر الرئيسى فقط ....

(أ) يساوى ١٢ (ب) أقل من ١٢ (جـ) أكبر من ١٢ (د) يساوى صفر

(١٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & \text{س} & ٢ \\ -١ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٦ \\ ٢ & \text{ص} \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) –١٥ (ب) –٢ (جـ) ٢ (د) ١٥

(٢٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ \text{س} & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧ & \text{ص} + ١ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٧ (ب) –٣ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٢١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٤ & س \\ -١ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ع \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : $\begin{pmatrix} ص & س \\ ٠ & ع \end{pmatrix}$ مصفوفة ....

(أ) وحدة. (ب) صفرية. (جـ) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١٢ & -٢س \\ ١٦ & -٨ \end{pmatrix} = -٤ \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ص - س & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : $\sqrt{س ص}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س^٢ - ص^٢ & ٤ \\ ٨ & ١٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & س + ص \\ ٨ & ١٤ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٧}{٤}$

(٢٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} جا س & \frac{١}{٢} \\ ١ & جا س \end{pmatrix}$ حيث $٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٢}$ وكان : $أ_{١١} \times أ_{٢٢} = أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} جتا \theta & -جا \theta \\ جا \theta & جتا \theta \end{pmatrix}$ فإن قيمة θ التى تجعل أ مصفوفة وحدة هى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٢٦) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢س - ٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٢

(٢٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & س - ١ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٦

(٢٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س^٢ & ٣ \\ ١ & س + ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) صفر

(٢٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ = ٢ I حيث I مصفوفة الوحدة فإن : س + ص + ع + ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٣٠) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & م & ٢ \\ ص - س & ٥ & ٧ \\ ص & س - ١ & ١ \end{pmatrix}$ متماثلة فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) -٦ (جـ) ١٠ (د) -٨

(٣١) إذا كانت المصفوفة : ب = $\begin{pmatrix} ع & م & ٠ \\ ن & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : قيمة م + ع − ن = ...

(أ) ١٢ (ب) −٨ (جـ) صفر (د) −١٢

(٣٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & س \\ -٥ & ع & ص \\ ٠ & ل & -٤ \end{pmatrix}$ وكان : أ = − أ^{مد} فإن : س + ص + ع + ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٣٣) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} طا \frac{\theta}{٢} & جا\,\theta & جتا\,\theta \\ ١ & -جتا\,\theta & -١ \\ ٠ & جتا\,٢\theta & -١ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٣٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $أ_{ص\,ع}$ = ص − ٢ ع فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & -٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٣ & -١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كانت أ مصفوفة وكان $أ_{س\,ص}$ = س ص لكل س ∈ {١ ، ٢} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}
فإن المصفوفة أ تساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

(٣٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : $أ_{س\,ص} = \frac{س}{ص}$
فإن : $أ_{١١} \times أ_{٢١} \times أ_{١٢} \times أ_{٢٢}$ = ...

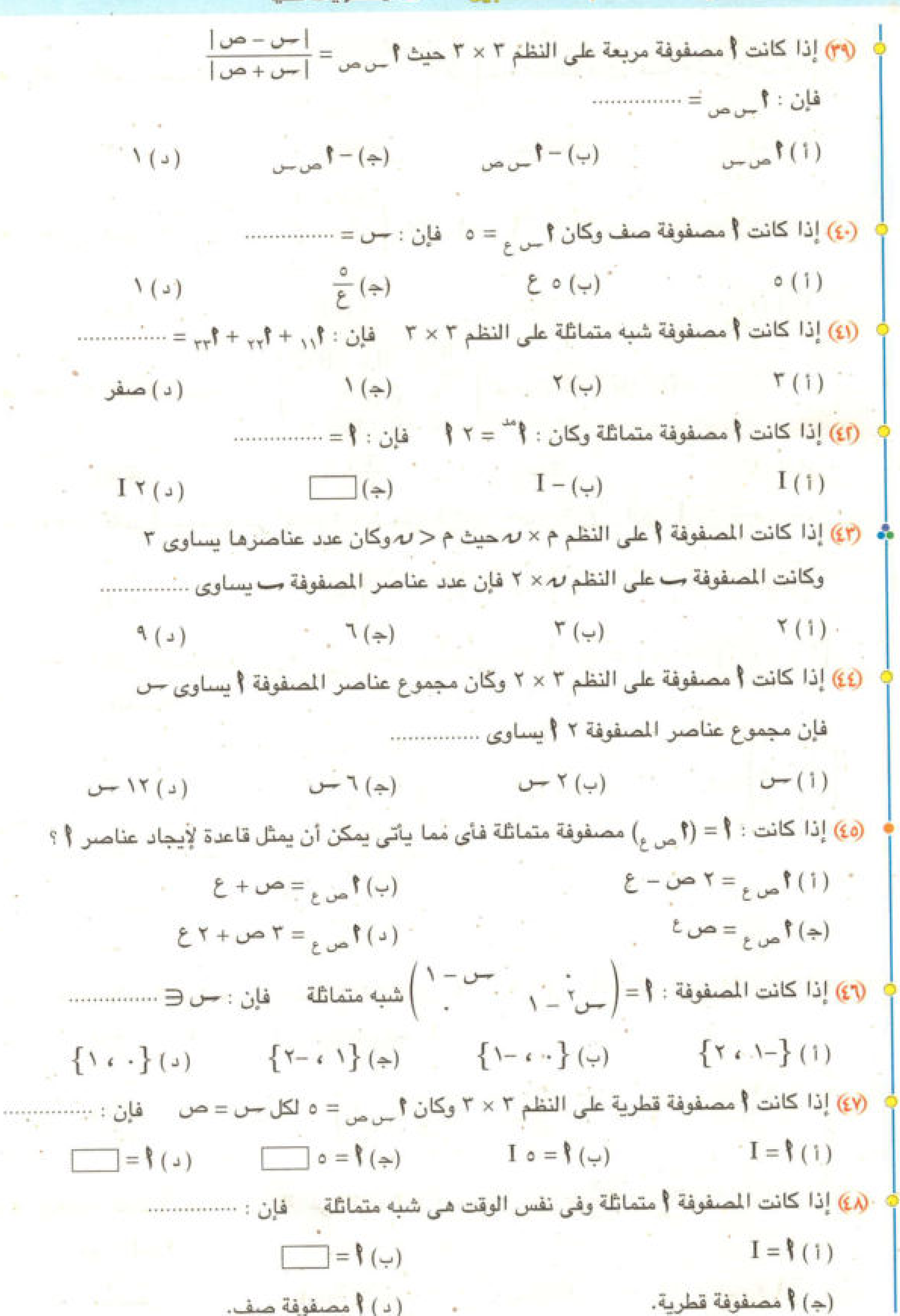
(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ وكان : $أ_{١١}$ = ٢ ، $أ_{١٢}$ = ٣ ، $أ_{٢٢} = \frac{١}{٢} أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢} = أ_{١٢} + ٣$ ،
$أ_{١٣}$ = −٩ ، $أ_{٢١} = \frac{١}{٣} أ_{١٣}$ فإن المصفوفة أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٩ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ -٣ & -٩ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ ١ & -٩ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٩ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٦ & -٣ \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س\,ص} = \frac{ص}{س} - \frac{س}{ص}$
فإن : أ + أ^{مد} = ...

(أ) صفر (ب) ▭ (جـ) ٢ أ (د) ٢ أ^{مد}



(٣٩) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص} = \frac{|س - ص|}{|س + ص|}$

فإن : $أ_{س ص}$ = ...

(أ) $أ_{ص س}$ (ب) $-أ_{س ص}$ (ج) $-أ_{ص س}$ (د) ١

(٤٠) إذا كانت أ مصفوفة صف وكان $أ_{س ع} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ ع (ج) $\frac{٥}{ع}$ (د) ١

(٤١) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ فإن : $أ_{١١} + أ_{٢٢} + أ_{٣٣}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة وكان : $أ^{مد} = ٢ أ$ فإن : أ = ...

(أ) I (ب) − I (ج) $\boxed{}$ (د) ٢ I

(٤٣) إذا كانت المصفوفة أ على النظم م × ن حيث م < ن وكان عدد عناصرها يساوى ٣

وكانت المصفوفة ب على النظم ن × ٢ فإن عدد عناصر المصفوفة ب يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٩

(٤٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ وكان مجموع عناصر المصفوفة أ يساوى س

فإن مجموع عناصر المصفوفة ٢ أ يساوى ....

(أ) س (ب) ٢ س (ج) ٦ س (د) ١٢ س

(٤٥) إذا كانت : أ = ($أ_{ص ع}$) مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يمكن أن يمثل قاعدة لإيجاد عناصر أ ؟

(أ) $أ_{ص ع}$ = ٢ ص − ع (ب) $أ_{ص ع}$ = ص + ع

(ج) $أ_{ص ع}$ = ص ع (د) $أ_{ص ع}$ = ٣ ص + ٢ ع

(٤٦) إذا كانت المصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} \cdot & س - ١ \\ س^٢ - ١ & \cdot \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : س ∈ ....

(أ) {−١ ، ٢} (ب) {٠ ، −١} (ج) {١ ، −٢} (د) {٠ ، ١}

(٤٧) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان $أ_{س ص}$ = ٥ لكل س = ص فإن : ....

(أ) أ = I (ب) أ = ٥ I (ج) أ = ٥ $\boxed{}$ (د) أ = $\boxed{}$

(٤٨) إذا كانت المصفوفة أ متماثلة وفى نفس الوقت هى شبه متماثلة فإن : ....

(أ) أ = I (ب) أ = $\boxed{}$

(ج) أ مصفوفة قطرية. (د) أ مصفوفة صف.

(٤٩) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ وكان $أ_{٣١}$ = ٤ أى من العبارات الآتية صحيحة ؟

(١) $أ_{١٣} = -٤$ (٢) $أ_{١١} = ٠$ (٣) $أ_{٢٢} + أ_{٣٣} = ٠$

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

(٥٠) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ١ & أ - ب \\ ب - ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} ٦ & أ - ٦ \\ ٤ - أ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : ٢ س = $ص^{مد}$

فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٥١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & جا ٣٠° \\ ظتا ٤٥° & ظا^٢ ٦٠° \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & م - جتا ٦٠° \\ ن + جتا^٢ ٩٠° & ف + قا^٢ ٤٥° \end{pmatrix}$ وكان : أ = ب

فإن : م + ف − ن = ...

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) −٢ (د) ١

(٥٢) أى مما يأتى يكفى لإيجاد قيمة س حيث $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & س \\ ن & ص & ع \\ م & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ؟

(١) $أ = أ^{مد}$ (٢) $أ = -أ^{مد}$ (٣) أ مصفوفة قطرية.

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (٣) فقط. (د) لا يمكن إيجاد قيمة س

(٥٣) إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} جا صفر & جا \frac{\pi}{٢} \\ جتا صفر & جتا \frac{\pi}{٢} \end{pmatrix}$ أى من العبارات التالية تكون صحيحة ؟

(١) أ مصفوفة وحدة. (٢) أ مصفوفة متماثلة. (٣) أ مصفوفة مربعة.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٨ & -٧ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٣} \\ -\frac{١}{٥} \end{pmatrix}$

(١) اذكر نظم كل مصفوفة. **(٢)** اكتب كلاً من العناصر الآتية : $أ_{٢٢}$ ، $ب_{١١}$ ، $ج_{١٣}$ ، $أ_{١٣}$ ، $ب_{٢٣}$ ، $ج_{١٢}$

٢ اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها :

(١) $\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٣ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١٥ & ١٢- & ١٠ \\ ٢٠ & ١٠- & ٧ \\ ٢- & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد : −٥ أ

٤ أوجد مدور كل من المصفوفات التالية موضحًا نظم المصفوفة الناتجة :

(١) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١- \\ ٣ & ١- & ٥ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} ١- & \sqrt{٥} \\ ٢ & ٣ \\ ٤- & ٧ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ٣- & ٤ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٦ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & ٦ & ٩ \\ ٤ & ٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

٥ اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية :

(١) أ = $(أ_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

(٢) ب = $(ب_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١

(٣) ج = $(ج_{ص ع})$ ، ص = ١ ، ٢ ، ع = ١ ، ٢

٦ إذا كانت : أ = $(أ_{س ص})$ لكل س ∈ {١ ، ٢ ، ٣} ، ص ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

اكتب المصفوفة أ إذا عُلم أن : $أ_{س ص}$ = ص − س ثم أوجد : $أ^{مد}$

٧ اكتب المصفوفة : أ = $(أ_{هـ ى})$ على النظم ٣ × ٢ حيث $أ_{هـ ى}$ = هـ − ى + ٢

ثم أوجد المصفوفة ج حيث ج = $أ^{مد}$ واذكر نظمها وأوجد قيمة $ج_{ى هـ}$ إذا كان هـ = ٣ ى

٨ أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان : $\begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٢أ - ١ & ٣ب + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١- \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$ «٢ ، ٢»

٩ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمتي : س ، ص «١٥ ، ٣»

١٠ إذا كانت : $\begin{pmatrix} -٥ & \text{س} + ٨ \\ -\text{ص} & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & ٣٨ \\ ٤\text{ص} - ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمتي : س ، ص** «٣٠ ، ٢»

---

١١ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١٥ & ٨ \\ \text{ع} + \text{ص} & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}^{٢} - ١ & \text{ل}^{٣} \\ ٨ & \text{ص} \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع ، ل «±٤ ، -١ ، ٩ ، ٢»

---

١٢ إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س} - \text{ع} & \text{س} + \text{ص} & ٣\text{س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٠ & ٤ & -٩ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «-٣ ، ٧ ، ٧»

---

١٣ **أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء إذا كان :**

(١) $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٣\text{ء} - ٢ & \text{أ} - ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{ب} + ١ & \text{أ} - ٢ \\ ١٦ & \text{حـ} \end{pmatrix}$ «٥ ، -٣ ، ٢ ، ٦»

(٢) $\begin{pmatrix} ٢\text{ب} & ١٥ \\ ٢\text{أ} + \text{حـ} & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٣\text{أ} \\ ١٠ & ٢\text{ب} - \text{ء} \end{pmatrix}$ «٥ ، ٥ ، ٠ ، ١٠»

(٣) $\begin{pmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ} + \text{ب} \\ \text{أ} - \text{ب} + ٢\text{ء} & \text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٩ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ «٣ ، ٦ ، -٢ ، ٤»

---

١٤ **بيِّن أيًا من المصفوفات الآتية متماثلة وأيها شبه متماثلة :**

(١) $\begin{pmatrix} -١ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} -١ & ١ & ١ \\ ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ١ \\ ٦ & ٢ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} -١ & -\frac{٥}{٢} & ٠ \\ \frac{١}{٢} & ٠ & \frac{٥}{٢} \\ ٠ & -\frac{١}{٢} & ١ \end{pmatrix}$

---

١٥ إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة حيث أ = $\begin{pmatrix} ٢\text{ص} + \text{س} & ٢\text{ص} & ٥ \\ \text{ع} + ٣ & -١ & \text{ع} + ١ \\ ٠ & ٨ & ٢ + ٣\text{س} \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع «٣،٥ ، ٣ ، ٥»

---

١٦ إذا كانت : ب مصفوفة شبه متماثلة حيث ب = $\begin{pmatrix} -٥ & -٢\text{س} & ٠ \\ ٣\text{ع} & ٠ & \text{ع} + ٦ \\ ٠ & ٦ & ٣\text{ص} + \text{س} \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة : س ص ع «-٤»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢س & ١ \\ س & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}^{مد}$ وكان أء − ب حـ = ١ فإن : س ∈ ....

(أ) {١ ، $-\frac{١}{٢}$} (ب) {−١ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {١ ، $\frac{١}{٢}$} (د) {−١ ، $\frac{-١}{٢}$}

(٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣س + ١ = ٠$

وكان $\begin{pmatrix} ل^٢ & م & -ل^٢ \\ م^٢ & & م \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : أء − ب حـ = ...

(أ) ١٨ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن : $\frac{أ + ب + حـ + و}{ء + س + ص + ع} =$ ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) هـ

(٤) إذا كانت المصفوفة ($أ_{س ص}$) على النظم ٢ × ٢ حيث $أ_{س ص} = س + ٢ ص$

وكان مجموع عناصر الصف الأول = $ك^٢$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $٢\sqrt{٢}$ (د) $\pm ٢\sqrt{٢}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن وكانت $أ^{مد}$ على النظم (٢ م − ١) × (ن − ١)

فإن : م + ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) إذا كان : $\begin{pmatrix} ١ + ت & ١ - ت \\ جاس & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ وكان أ ب حـ ء = ١ فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س^٢ - ص^٢ & ٦ \\ س^٢ + س ص + ص^٢ & ١٢ \end{pmatrix} = ٣ \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) ٢

(٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص} = \begin{cases} س + ص & \text{لكل } س \neq ص \\ ٦ & \text{لكل } س = ص \end{cases}$

فإن : مجموع عناصر القطر الرئيسي يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

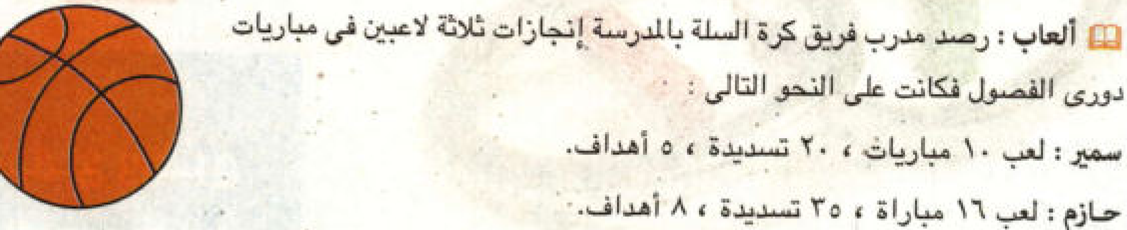


(٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣س & ٢س + ص \\ س + ص & ٣ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ب \\ أ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ١٥ (د) ٥



تطبيقات حياتية



١ **ألعاب :** رصد مدرب فريق كرة السلة بالمدرسة إنجازات ثلاثة لاعبين فى مباريات دورى الفصول فكانت على النحو التالى :

سمير : لعب ١٠ مباريات ، ٢٠ تسديدة ، ٥ أهداف.

حازم : لعب ١٦ مباراة ، ٣٥ تسديدة ، ٨ أهداف.

كريم : لعب ١٨ مباراة ، ٤١ تسديدة ، ١٠ أهداف.

(١) نظم البيانات فى مصفوفة على أن ترتب أسماء اللاعبين ترتيبًا تصاعديًا تبعًا لعدد الأهداف.

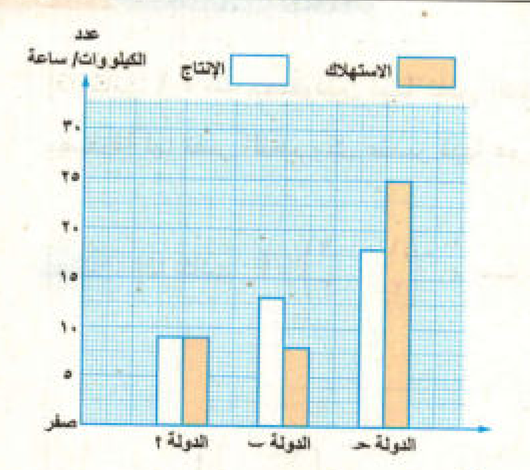
(٢) حدد نظم المصفوفة ، ما قيمة $أ_{٢٣}$ ؟

٢ **الربط بالطاقة :**

يمكن أن يقاس استهلاك الطاقة بالكيلووات/ساعة.

يبين الرسم البيانى المقابل إنتاج الطاقة والاستهلاك لبعض الدول.

اكتب مصفوفة تمثل بيانات الرسم البيانى المقابل.



٣ **الربط بالصناعة :**

يبين الجدول المقابل عدد المصانع الأهلية العاملة فى قطاعى صناعة الأغذية والمصنوعات الجلدية فى ثلاث مدن مختلفة من مدن بعض محافظات جمهورية مصر العربية.

	صناعة الأغذية	المصنوعات الجلدية
٦ أكتوبر	٤٤	٦٨
مدينة السادات	٢٨	٥٢
العاشر من رمضان	٣٧	١٤

(١) نظم البيانات فى مصفوفة.

(٢) اجمع عناصر كل عمود ، ما تفسيرك للنتائج التى حصلت عليها ؟

(٣) اجمع عناصر كل صف ، هل النتائج التى حصلت عليها يمكن أن تزودنا ببيانات ذات معنى ؟ فسر إجابتك.

الدرس

2

جمع وطرح المصفوفات

أولاً جمع المصفوفات

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لهما نفس النظم فإن عملية الجمع تكون ممكنة ويكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها نفس النظم وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين فى أ ، ب

فمثلاً إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : $أ + ب = \begin{pmatrix} ١ + ٢ & ٢ + ٥ \\ -٢ + ٣ & ٣ + ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$

مثال ١

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد إن أمكن كلاً من : ١ $٢ أ + ج^{مد}$ ٢ $ب + ج$

الحل

١ $٢ أ + ج^{مد} = ٢ \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ١٠ & ٦ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٠ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ١٤ & ٦ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

٢ المصفوفتان ب ، ج لا يمكن جمعهما لاختلاف نظمهما

حيث إن : ب مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٢ × ٣

مثال ٢

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & -٣ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix}$ **فحقق أن :** $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحل

$\because \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & -٣ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ٢ \\ ١٠ & -١ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٧ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$ (١)

، $\because \text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٤ & -٣ & -٨ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٦ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٤ & -٣ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٧ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** $\frac{١}{٢} (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}}$

مثال ٣

أوجد قيم أ ، ب ، حـ التى تحقق المعادلة : $٣ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & ٣ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} \text{أ} & ٦ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & \text{ب} + ٤ \\ \text{حـ} + ٣ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

$\begin{pmatrix} ٣\text{أ} & ٣\text{ب} \\ ٣\text{حـ} & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{أ} & ١٢ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & \text{ب} + ٤ \\ \text{حـ} + ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة)

$\therefore \begin{pmatrix} ٣\text{أ} & ٣\text{ب} \\ ٣\text{حـ} & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{أ} + ٤ & \text{ب} + ١٦ \\ \text{حـ} + ١ & ٩ \end{pmatrix}$

ومن خاصية تساوى مصفوفتين : $\therefore ٣\text{أ} = ٢\text{أ} + ٤$ ومنها : $\text{أ} = ٤$

، $٣\text{ب} = \text{ب} + ١٦$ ومنها : $\text{ب} = ٨$

، $٣\text{حـ} = \text{حـ} + ١$ ومنها : $\text{حـ} = \frac{١}{٢}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $٣ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & -٢ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} \text{أ} + ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ + \text{ب} \\ \text{حـ} + ٣ & -١٠ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، حـ**

خواص عملية جمع المصفوفات

بفرض أن أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظم م × ن وأن ☐ مصفوفة صفرية من نفس النظم

فإن الخواص الآتية تتحقق :

١ خاصية الانغلاق

أ + ب تكون مصفوفة من نفس النظم م × ن

٢ خاصية الإبـدال

أ + ب = ب + أ

فمثلًا $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

٣ خاصية الدمـج

(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

فمثلًا

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

فإن : (أ + ب) + ج = $\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 11 & 13 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 17 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

، أ + (ب + ج) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 13 & 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 17 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

أى أن (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

٤ خاصية وجود المحايد الجمعى

المصفوفة الصفرية ☐ هى المحايد الجمعى **أى أن :** أ + ☐ = ☐ + أ = أ

فمثلًا $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

٥ خاصية المعكوس (النظير الجمعى)

أ + (- أ) = (- أ) + أ = $\square$ حيث (- أ) هو النظير الجمعى للمصفوفة أ

فمثلًا إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : المعكوس الجمعى لها هو : - أ = $\begin{pmatrix} -٤ & -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{pmatrix}$

حيث : $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square_{٢ \times ٣}$

ثانيًا طرح المصفوفات

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لهما نفس النظم م × ن فإن ناتج الطرح (أ - ب)
هو المصفوفة ج من النظم م × ن والتى تُعرف كما يلى :
ج = أ - ب = أ + (- ب) حيث (- ب) هى المعكوس الجمعى للمصفوفة ب

فمثلًا إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : أ - ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ -٥ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & -٤ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن إجراء عملية الطرح مباشرة بطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين.

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٠ & ١ & -٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & -٢ & -٣ \\ ٨ & -١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٦ & ٦ \\ -٨ & ٢ & -٢ \end{pmatrix}$

مثال ٤

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٦ & -٢ \\ -٢ & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة : ٤ أ - ٢ ب + $\frac{١}{٢}$ ج

الحل

٤ أ - ٢ ب + $\frac{١}{٢}$ ج = $٤ \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix} + \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٦ & -٢ \\ -٢ & ٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ١٢ & -٤ \\ ١٦ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & -٤ \\ -١٠ & ٢ \\ ٦ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٣ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٤ \\ -١ & -٣ \\ ٢١ & -٢ \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

إذا كانت : ء = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** ٢ ء + ٣ ج − ٢ ب

ملاحظة

عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية وليست دامجة.

مثال ٥

إذا كانت : ء = $\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ١- \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢- \\ ٣- & ١- & ٠ \end{pmatrix}$ **أوجد المصفوفة س بحيث :** ٣ س + ٢ ب = ء

الحل

∵ ٣ س + ٢ ب = ء   بإضافة المعكوس الجمعى للمصفوفة ٢ ب للطرفين

∴ ٣ س + ٢ ب + (− ٢ ب) = ء + (− ٢ ب)

∴ ٣ س = ء − ٢ ب (بضرب الطرفين فى $\frac{١}{٣}$)

∴ س = $\frac{١}{٣}$ [ء − ٢ ب]

∴ س = $\frac{١}{٣}$ $\left[\begin{pmatrix} ٤ & ١ & ١- \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢- \\ ٣- & ١- & ٠ \end{pmatrix} \right]$ = $\frac{١}{٣}$ $\begin{pmatrix} ٢- & ٣- & ٣- \\ ٠ & ٣- & ٦ \\ ٨ & ٩ & ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \frac{٢}{٣}- & ١- & ١- \\ ٠ & ١- & ٢ \\ \frac{٨}{٣} & ٣ & ١ \end{pmatrix}$

مثال ٦

إذا كانت : ء = $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٠ \\ ٤- & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : ٢ [$س^{مد}$ − ء] = ٣ ب

الحل

∵ ٢ [$س^{مد}$ − ء] = ٣ ب   ∴ ٢ $س^{مد}$ − ٢ ء = ٣ ب   وبإضافة المصفوفة ٢ ء للطرفين

∴ ٢ $س^{مد}$ − ٢ ء + ٢ ء = ٣ ب + ٢ ء

∴ ٢ $س^{مد}$ = ٣ ب + ٢ ء = ٣ $\begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٠ \\ ٤- & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ + ٢ $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ١- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٤ \\ ٢- & ١٤ & ١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س^{مد} $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٥ \\ ١٣ & ١٤ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & \frac{٣}{٢} & \frac{٥}{٢} \\ \frac{١٣}{٢} & ٧ & -١ \end{pmatrix}$

وبأخذ مدور الطرفين : $\therefore$ (س^{مد})^{مد} $= \begin{pmatrix} ٢ & \frac{٣}{٢} & \frac{٥}{٢} \\ \frac{١٣}{٢} & ٧ & -١ \end{pmatrix}^{مد}$ $\therefore$ س $= \begin{pmatrix} ٢ & \frac{١٣}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & ٧ \\ \frac{٥}{٢} & -١ \end{pmatrix}$

مثال ٧

إذا كانت : س + ٢ س^{مد} $= \begin{pmatrix} ٩ & ١٤ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}$ **فأوجد :** المصفوفة س

الحل

$\because$ س + ٢ س^{مد} $= \begin{pmatrix} ٩ & ١٤ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (١)

وبأخذ مدور الطرفين : $\therefore$ (س + ٢ س^{مد})^{مد} $= \begin{pmatrix} ٩ & ١٤ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}^{مد}$

$\therefore$ س^{مد} + ٢ س $= \begin{pmatrix} ٩ & ١٣ \\ ١٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × -٢ :

$\therefore$ -٢ س^{مد} - ٤ س $= \begin{pmatrix} -١٨ & -٢٦ \\ -٢٨ & -١٢ \end{pmatrix}$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : $\therefore$ -٣ س $= \begin{pmatrix} -٩ & -١٢ \\ -١٥ & -٦ \end{pmatrix}$ $\therefore$ س $= \frac{-١}{٣}\begin{pmatrix} -٩ & -١٢ \\ -١٥ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

لاحظ أن

- (أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}
- (أ^{مد})^{مد} = أ

حاول بنفسك

إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ ٤ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : ٣ أ - ٢ ب = ٢ س - ٣ I حيث I على النظم ٢ × ٢

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى جمع وطرح المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

لاحظ أن

لأى مصفوفة مربعة أ يكون

أ $= \frac{١}{٢}$ (أ + أ^{مد}) + $\frac{١}{٢}$ (أ - أ^{مد})

↓ مصفوفة متماثلة ↓ مصفوفة شبه متماثلة



تمارين 2 على جمع وطرح المصفوفات

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\square$ هى المصفوفة الصفرية على النظم ٢ × ٣

فإن : $\begin{pmatrix} -٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{pmatrix} + \square = \dots\dots\dots$

(أ) I (ب) $\square$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & -٤ \\ ٠ & -٥ & ١ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٨ \\ -٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٦ \\ ١٢ \\ -١٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} -٢ & -٥ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٦ \\ -٦ & ٢ \end{pmatrix}^{مد} = \dots\dots\dots$

(أ) $\square$ (ب) $\begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) I

(٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ + ب = I فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & -٥ \\ -١ & -٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -٤ \\ ٠ & -٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -٥ \\ -١ & -٣ \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٣ \end{pmatrix} + ٣ \begin{pmatrix} -٢ & ١ \end{pmatrix}^{مد} = \dots\dots\dots$

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ -٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٨ \\ -٩ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$

(٦) إذا كان : ٢ س + $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ صفر & ٤ \end{pmatrix} = \square$ فإن : المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ صفر & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ صفر & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ صفر & -٢ \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

(٨) إذا كان: $\begin{pmatrix} \text{س} \\ ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن: س + ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٣

(٩) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣\text{ك} & -\text{ص} \\ ٢\text{س} & ١١ \end{pmatrix}$ فإن: س + ص + ك = ...

(أ) -٣ (ب) -٦ (ج) ١ (د) -٨

(١٠) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ فإن: $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & -٢ \end{pmatrix}$

(١١) إذا كان: $\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix} = \text{س} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} - \text{ص} \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن: س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) -٢

(١٢) إذا كانت: س ، ص ، ع أعدادًا حقيقية وكان $\text{س} \begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \\ ١ \end{pmatrix} + \text{ص} \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix} + \text{ع} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

فإن: س ص ع = ...

(أ) ١٢ (ب) ٤ (ج) -١٢ (د) ٣

(١٣) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ - \text{س} & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ص} + ٢ \end{pmatrix} = \boxed{}$ فإن: س + ص = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (ج) ٠ (د) -٤

(١٤) إذا كان: $\begin{pmatrix} \text{س} & -٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{ص} & -١ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & \text{س} \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن: ص = ...

(أ) -٢ (ب) -٥ (ج) -٣ (د) -٧

(١٥) لأى مصفوفة أ يكون: أ + (−أ) = ...

(أ) أ (ب) −أ (ج) $\boxed{}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب هى المعكوس الجمعى للمصفوفة أ

فإن ب على النظم ....

(أ) ٢ × ٣ (ب) ٣ × ٢ (ج) ٢ × ٢ (د) ٣ × ٣

(١٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، ج مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فأى العمليات الآتية معرفة ؟

(أ) أ + ب (ب) ب − ج (ج) أ + $\text{ج}^{\text{مد}}$ (د) أ − ج

(١٨) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن المعكوس الجمعي للمصفوفة أ يساوى ....

(١) − أ (٢) $\text{أ}^{\text{مد}}$ (٣) − $\text{أ}^{\text{مد}}$

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (جـ) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(١٩) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يكون متماثلة أيضًا ؟

(١) ٢ أ (٢) − أ (٣) $\text{أ}^{\text{مد}}$

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٢٠) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : I ≠ ....

(أ) أ − ب (ب) $\text{أ}^{\text{مد}}$ + ب (جـ) أ + $\text{ب}^{\text{مد}}$ (د) أ + ب

(٢١) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢ وكان حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى = ك (حيث ك ≠ ٠) وكانت المصفوفة ب هى المعكوس الجمعى للمصفوفة أ فإن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى للمصفوفة ب = ...

(أ) ك (ب) − ك (جـ) $\frac{١}{\text{ك}}$ (د) ٢ ك

(٢٢) إذا كانت : أ + $\text{أ}^{\text{مد}}$ = ▭ فإن : أ مصفوفة ....

(أ) صف. (ب) عمود. (جـ) متماثلة. (د) شبه متماثلة.

(٢٣) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن : أ + $\text{أ}^{\text{مد}}$ = ...

(أ) ٢ أ (ب) ٢ $\text{أ}^{\text{مد}}$ (جـ) ▭ (د) صفر

(٢٤) إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن : $\frac{١}{٢}$ $(\text{أ} + \text{أ}^{\text{مد}})$ = ...

(أ) أ (ب) $\frac{١}{٢}$ أ (جـ) I (د) ▭

(٢٥) $(\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}}$ − س = ...

(أ) ▭ (ب) س (جـ) ٢ س (د) صفر

(٢٦) إذا كانت المصفوفتان أ ، ب لهما نفس النظم م × ن
فإن المصفوفة أ − ٢ ب تكون على النظم ....

(أ) م × ١ (ب) ١ × ن (جـ) ن × م (د) م × ن

(٢٧) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٣ × ٢ فإن : المصفوفة $(٥ \text{أ} + ٣ \text{ب})^{\text{مد}}$
على النظم ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٥ × ٣ (جـ) ٢ × ٣ (د) ٣ × ٣

(٢٨) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٣ \\ -\text{ص} & \text{ص} + ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$

وكان : أ − ٢ ب = ٣ ج فإن : س ص = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢٩) إذا كان : $أ^{مد} + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : ٢ $(أ+ب)^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢- & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$

(٣٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣- & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ ، $(أ+ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤- & ١ \end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٦- & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦- & ١- \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٦- & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٦- & ١ \end{pmatrix}$

(٣١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) أ − ٢ (ب) أ − ٢ I (جـ) أ + I (د) أ − I

(٣٢) إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ك\,س = \begin{pmatrix} ٣أ & ٠ \\ ٢٤ & ٢ب \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب − ك = ...

(أ) −١٩ (ب) −٧ (جـ) ٧ (د) ١٩

(٣٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان بحيث أ + ب = أ − ب فإن ....

(أ) أ مصفوفة صفرية. (ب) ب مصفوفة صفرية.

(جـ) ب مصفوفة وحدة. (د) ب معكوس جمعى أ

(٣٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من نفس النظم ٢ × ٢ وكان : أ + ب = I ، ٢ أ − ٢ ب = I

فإن : أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{٣}{٤} \\ \frac{٣}{٤} & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كانت : $أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٤- & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : $ب - أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $(أ+ب)^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٦ & ٢- \end{pmatrix}$

(٣٦) إذا كان : $٢أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٥- & ٠ \\ ١٣ & ٧ \end{pmatrix}$ وكان : $٢ب + أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٨ & ٣ \\ ١٤ & ١- \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٩ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$

(٣٧) أبسط صورة للمقدار : $حتا\,\theta \begin{pmatrix} حا\,\theta & حتا\,\theta \\ حتا\,\theta & -حا\,\theta \end{pmatrix} + حا\,\theta \begin{pmatrix} -حتا\,\theta & حا\,\theta \\ حا\,\theta & حتا\,\theta \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ▭ (ب) I (جـ) $-I$ (د) $\begin{pmatrix} حا\,\theta & ١ \\ ١ & حتا\,\theta \end{pmatrix}$

(٣٨) أبسط صورة للمقدار : $قتا\,\theta \begin{pmatrix} -طتا\,\theta & قتا\,\theta \\ -قتا\,\theta & طتا\,\theta \end{pmatrix} + طتا\,\theta \begin{pmatrix} قتا\,\theta & -طتا\,\theta \\ طتا\,\theta & -قتا\,\theta \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ▭ (ب) I (جـ) $-I$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$

(٣٩) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} جتا \theta & -جا \theta \\ جا \theta & جتا \theta \end{pmatrix}$ حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ وكان : $أ + أ^{مد} = I$ فإن : $\theta = ...$

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ وكانت : $س = \begin{pmatrix} جتا \theta & جا \theta \\ -جا \theta & جتا \theta \end{pmatrix}$

فإن : س = ...

(أ) أ جا θ + ب جتا θ (ب) أ جتا θ + ب جا θ

(جـ) أ جا θ − ب جتا θ (د) أ جتا θ − ب جا θ

(٤١) إذا كانت : $أ = (أ_{ص ع})$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{ص ع} = \begin{cases} ص + ع ، ص = ع \\ ص - ع ، ص \neq ع \end{cases}$

فإن : $أ + أ^{مد} = ٤ \times ....$

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٨ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٢ \\ ١ & ٤ & -١ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ -١ & ٤ & ١ \\ -٢ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $أ_{ص ع} = |ص - ع|$ وكانت ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $ب_{ص ع} = ص - ع$ فإن : أ + ب = ...

(أ) $\boxed{}$ (ب) I (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٤٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ وكانت الدالة د معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

د (س) = ٣ س + ٥ I فإن : د (أ) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١٤ \\ ٥ & ١١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٩ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٣ & ١٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

(٤٤) إذا كان س مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : $س + س^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

فإن مجموع عناصر س يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٤٥) المصفوفة المربعة يمكن التعبير عنها دائمًا ....

(أ) كمجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى شبه متماثلة.

(ب) كمجموع مصفوفتين إحداهما قطرية والأخرى متماثلة.

(جـ) كحاصل ضرب عدد حقيقى ≠ صفر فى مصفوفة متماثلة لها نفس النظم.

(د) بجمع المصفوفة نفسها مع مدورها.

(٤٦) إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات بحيث $أ + ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب + جـ = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

، $جـ + أ = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب + جـ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ & -١ \\ -٣ & -٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ ٨ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد كلاً مما يأتى إن أمكن : (١) أ + ب (٢) أ + ج

---

٢ إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة : ٢ أ - ٣ ب + ٤ ج

---

٣ إذا كان : $\text{س} = \begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ -٣ & ٢ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة : ٣ س - ص + ع

---

٤ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -١ \\ -٢ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ حقق أن : ٤ (أ + ب) = ٤ أ + ٤ ب

---

٥ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

حقق أن : (١) $(\text{أ} + \text{ب})^{مد} = \text{أ}^{مد} + \text{ب}^{مد}$ (٢) $(\text{أ} - \text{ب})^{مد} = \text{أ}^{مد} - \text{ب}^{مد}$

(٣) أ - ب ≠ ب - أ (٤) - (أ + ب) = (- أ) + (- ب)

---

٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

أوجد : (١) $\frac{١}{٢}$ (أ + ج) (٢) ٢ أ - ب + ٢ ج

(٣) أ - ٢ ب + ٢ (ب + ج) (٤) $\text{أ} + ٢\,\text{ب}^{مد} - \text{ج}^{مد}$

---

٧ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٧ & ٠ & -٥ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٧ \\ -٦ & -٥ \end{pmatrix}$

فأوجد ناتج كل من العمليات الآتية إن أمكن ، مع ذكر السبب فى حالة تعذر إجراء العملية :

(١) أ + ب (٢) $\text{أ} + \text{ب}^{مد}$ (٣) $\text{أ}^{مد} + \text{ب}$

---

٨ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ \\ ٦ \\ -١٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \\ ٦ \end{pmatrix}$ أثبت أن : المصفوفة أ معكوس جمعى للمصفوفة ٢ ب

---

٩ إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٧ & ٥ \\ ٠ & -٦ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٤ & -٦ & -٧ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٥ & \text{أ} \\ ٨ & \text{ص} & -٢ \\ \text{ب} & -٣ & \text{ع} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع ، أ ، ب «٣ ، ١ ، ١٢ ، -٤ ، -١»

١٠ إذا كان : $٣\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ \text{س} & ٢ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٢ & \text{ص} \\ ٥ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٦ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}} + \begin{pmatrix} ٦ & -٥ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من : س ، ص «٤ ، ٣»

---

١١ أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، د التى تحقق المعادلة :

$٢\begin{pmatrix} \text{أ} & ٣ \\ ٦ & \text{ب} \end{pmatrix} = ٣\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{د} \\ \text{حـ} & -٢ \end{pmatrix} - ٤\begin{pmatrix} \text{حـ} & ٣ \\ ٠ & \text{أ} \end{pmatrix}$ «١٦ ، −٣٥ ، ٤ ، ٦»

---

١٢ أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التى تحقق أن :

$\text{س}\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & \text{ص} \end{pmatrix} + \text{ع}\begin{pmatrix} ٢ & \text{ل} \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} + ٥\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \square_{٢ \times ٢}$ «−١ ، ٢ ، −٢ ، ١»

---

١٣ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢\text{س} - ١ & ٨ \\ \text{ع} & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{س} + ٣ & ٥ \\ -٢\text{ع} & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤\text{س} & -٣\text{ص} \\ ٣ & \text{ك} \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} -\text{س} & ٦\text{ص} \\ -٦ & ٢\text{ك} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ك «−٤ ، $\frac{١}{٣}$ ، −٣ ، $\frac{٢}{٥}$»

---

١٤ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٦ \\ -١ & ٥ & ٨ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد : المصفوفة ب

---

١٥ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٨ & -٦ \\ ٢ & -٤ & ٨ \\ ٦ & ١٢ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٦ & ٢ \\ ٤ & -١٠ & ٠ \\ -١ & ٨ & -٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : $\text{س} = ٢\,\text{أ} - ٣\,\text{ب}$

---

١٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س حيث : $٢\,\text{أ} - \text{س} = \text{ب}^{\text{مد}}$

---

١٧ حل المعادلة المصفوفية : $٤\left[\text{س} + \begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}\right] = ٢\,\text{س} + \begin{pmatrix} ١٢ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{pmatrix}$

---

١٨ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ -٢ & -٦ & ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث :

(١) $\text{س}^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

(٢) $٢\left[\text{س}^{\text{مد}} + \text{أ}\right] = ٤\,\text{ب}$

(٣) $٥\,\text{س}^{\text{مد}} - ٢(\text{أ} - \text{ب}) = \square$

---

١٩ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ١ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : $٢\,\text{ب} + \text{س}^{\text{مد}} = ٣\,\text{س}^{\text{مد}} - \text{أ}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير صفرية فإن المصفوفة أ + أ^{مد} مصفوفة ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(2) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن المصفوفة (أ − أ^{مد}) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) صفرية. (د) قطرية.

(3) إذا كان : أ^{مد} + ب^{مد} = أ + ب فإن ....

(أ) أ متماثلة. (ب) ب متماثلة.

(جـ) (أ + ب) متماثلة. (د) (أ + ب) شبه متماثلة.

(4) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث أ$_{ص ع}$ = ٢ ص − ع ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث ب$_{ص ع}$ = ع − ص فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \\ -٢ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & ٠ \end{pmatrix}$

(5) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان أ + أ^{مد} = I فإن مجموع عناصر أ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(6) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان (أ + ب) مصفوفة متماثلة

فإن : $\frac{أ_{٢١} - أ_{١٢}}{ب_{٢١} - ب_{١٢}}$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

---

2 إذا كانت : س + ٢ ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ ، س + ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفتين : س ، ص

---

3 إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ ، وكان : (س − س^{مد})^{مد} = $\begin{pmatrix} هـ & و \\ م & ن \end{pmatrix}$

أوجد قيمة : هـ + و + م + ن «صفر»

---

4 إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب^{مد} = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : ٣ أ − ٢ ب^{مد} + ٢ س = ب − س^{مد}

الدرس

3

ضرب المصفوفات

مثال تمهيدى

إذا كانت المصفوفة أ تعبر عن نتائج ٢٠ مباراة لفريقى الأهلى والزمالك فى الدورى العام

لكرة القدم حيث : $أ = \begin{pmatrix} ١٢ & ٦ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (الأعمدة: فوز، تعادل، هزيمة — الصفوف: الأهلى، الزمالك)

وكانت المصفوفة ب تعبر عن عدد النقاط التى يحصل عليها كل فريق فى حالة الفوز

والتعادل والهزيمة حيث : $ب = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (فوز، تعادل، هزيمة)

فإن : مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الأهلى = ١٢ × ٣ + ٦ × ١ + ٢ × ٠ = ٤٢ نقطة

، مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الزمالك = ١١ × ٣ + ٤ × ١ + ٥ × ٠ = ٣٧ نقطة

ويمكن التعبير عن مجموع النقاط التى حصل عليها كل فريق بالمصفوفة ج = $\begin{pmatrix} ٤٢ \\ ٣٧ \end{pmatrix}$

ونلاحظ أن

٤٢ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف فالأول من أ فى عناصر عمود ب

، ٣٧ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف الثانى من أ فى عناصر عمود ب

- المصفوفة ج هى ناتج ضرب المصفوفة أ × المصفوفة ب

أى أن ج = أ ب = $\begin{pmatrix} ١٢ & ٦ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \times ٣ + ٦ \times ١ + ٢ \times ٠ \\ ١١ \times ٣ + ٤ \times ١ + ٥ \times ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٢ \\ ٣٧ \end{pmatrix}$

ضرب المصفوفات

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم م × ل ، ب مصفوفة على النظم ن × ه فإن :

- حاصل ضربهما ج = أ ب يكون ممكنًا إذا وفقط إذا كان : ل = ن

أى عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

- المصفوفة ج = أ ب تكون على النظم م × ه



- كل عنصر $ج_{ص ع}$ فى المصفوفة ج = أ ب يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف ص من أ فى عناصر العمود ع من ب عنصرًا بعنصر كلًا بنظيره.

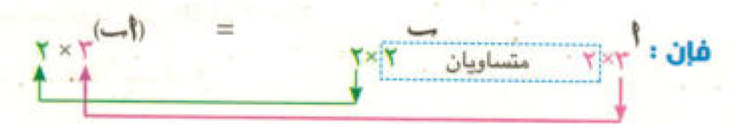
ولتوضيح مفهوم عملية ضرب المصفوفات :

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix}$

فإن : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

وحيث إن : عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

فإن :



أى أن عملية ضرب المصفوفة أ فى المصفوفة ب تكون ممكنة

وينتج مصفوفة أ ب على النظم ٣ × ٢ ونحصل عليها كالآتى :

* نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى المصفوفة أ بالعنصر المناظر فى العمود الأول فى المصفوفة ب ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود فى (الصف الأول والعمود الأول) فى المصفوفة (أ ب) كما يلى :

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{١١} ب_{١١} + أ_{٢١} ب_{١٢} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

* ثم نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى المصفوفة أ بالعنصر المناظر فى العمود الثانى فى المصفوفة ب ونجمع حواصل الضرب فتحصل على العنصر الموجود فى (الصف الأول والعمود الثانى) فى المصفوفة (أ ب)

كما يلى : $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ..... & أ_{١١} ب_{٢١} + أ_{٢١} ب_{٢٢} \\ ..... & .... \\ ..... & .... \end{pmatrix}$

* وهكذا حتى تحصل على جميع عناصر المصفوفة أ ب كما يلى :

$$أ ب = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{١١} ب_{١١} + أ_{٢١} ب_{١٢} & أ_{١١} ب_{٢١} + أ_{٢١} ب_{٢٢} \\ أ_{١٢} ب_{١١} + أ_{٢٢} ب_{١٢} & أ_{١٢} ب_{٢١} + أ_{٢٢} ب_{٢٢} \\ أ_{١٣} ب_{١١} + أ_{٢٣} ب_{١٢} & أ_{١٣} ب_{٢١} + أ_{٢٣} ب_{٢٢} \end{pmatrix}$$

لاحظ أن عملية ضرب المصفوفة ب فى المصفوفة أ تكون غير ممكنة.

اى أن ب أ غير ممكنة لأن عدد أعمدة المصفوفة ب ≠ عدد صفوف المصفوفة أ

مثال ١

أوجد أ ب إن أمكن فى كل مما يأتى :

١ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}$

٢ أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

٣ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$

الحل

١ ∵ أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٢

∴ أ ب ممكنة وتكون على النظم ٣ × ٢

$$أ ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٢)(-١) + (١)(٠) & (٢)(٢) + (١)(-٣) \\ (٣)(-١) + (-١)(٠) & (٣)(٢) + (-١)(-٣) \\ (٠)(-١) + (٤)(٠) & (٠)(٢) + (٤)(-٣) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٠ & -١٢ \end{pmatrix}$$

٢ ∵ أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ ≠ عدد صفوف المصفوفة ب ∴ أ ب غير ممكنة.

٣ ∵ أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ١

∴ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب = ٣ ∴ أ ب ممكنة وتكون على النظم ١ × ١

$$∴ أ ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix} = \left((٢)(-٢) + (-١)(١) + (٣)(٤)\right) = (٧)$$

مثال ٢

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ **أوجد :** $أ ب^{مد}$ إن أمكن.

الحل

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٢

∵ عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة $ب^{مد}$ ∴ $أ ب^{مد}$ ممكنة على النظم ٢ × ٢

∴ $أ ب^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ & -٩ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ **فأوجد إن أمكن :** $أ ب$ ، $أ ب^{مد}$ ، $أ^{مد} ب$

خواص عملية ضرب المصفوفات

إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات ، I هى مصفوفة الوحدة فإن الخواص الآتية تتحقق :

١ خاصية الدمج (التنسيق)

$(أ ب) ج = أ (ب ج)$ حيث عمليات الضرب ممكنة

فمثلًا إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٤ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ -١ \end{pmatrix}$

فإن : $أ ب = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٤ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٢٣ \\ ٥ & -١ & ٢٤ \end{pmatrix}$

∴ $(أ ب) ج = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٢٣ \\ ٥ & -١ & ٢٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩ \\ -١٧ \end{pmatrix}$ ، $ب ج = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٤ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ -٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ (ب ج) = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩ \\ -١٧ \end{pmatrix}$

أى أن $(أ ب) ج = أ (ب ج)$

٢ خاصية وجود المحايد الضربى

مصفوفة الوحدة I هى المحايد الضربى.

أى أن $أ I = I أ = أ$ حيث أ مصفوفة مربعة لها نفس نظم I

فمثلًا $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$

٣ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها

$\text{أ}(\text{ب}+\text{ج}) = \text{أب}+\text{أج}$ ، $(\text{أ}+\text{ب})\text{ج} = \text{أج}+\text{ب ج}$ حيث عمليات الضرب والجمع ممكنة.

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ}=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&0\end{pmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$ ، $\text{ج}=\begin{pmatrix}-2&6\\1&-1\end{pmatrix}$

فإن : $\text{ب}+\text{ج} = \begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&6\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}(\text{ب}+\text{ج}) = \begin{pmatrix}1&-2\\-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&-3\end{pmatrix}$ (١)

، $\because \text{أب}+\text{أج} = \begin{pmatrix}1&-2\\-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6\\1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&-9\\-9&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&8\\6&-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&-3\end{pmatrix}$ (٢)

$\therefore$ من (١) ، (٢) ينتج أن : $\text{أ}(\text{ب}+\text{ج}) = \text{أب}+\text{أج}$

ملاحظة

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين قابلتين للضرب على أى صورة بمعنى أن أب ممكنة ، ب أ ممكنة أيضًا.

فإنه ليس من الضرورى أن يكون أب = ب أ

وهذا يعنى أن **ضرب المصفوفات ليس عملية إبدالية**

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ}=\begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{pmatrix}-2&1\\5&6\end{pmatrix}$ ، $\text{ج}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$

فإن :

لاحظ أنه

يمكن ضرب أى مصفوفتين مربعتين على نفس النظم.

١ $\text{أب} = \begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23&-14\\-9&-4\end{pmatrix}$

، $\text{ب أ} = \begin{pmatrix}-2&1\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&5\\32&-21\end{pmatrix}$ **أى أن** $\text{أب} \neq \text{ب أ}$

٢ $\text{أج} = \begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&6\\-4&2\end{pmatrix}$

، $\text{ج أ} = \begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&6\\-4&2\end{pmatrix}$ **أى أن** $\text{أج} = \text{ج أ}$

مثال ٣

إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة كل من : أ^2 ، أ^3

الحل

أ^2 = أ × أ $= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

، أ^3 = أ^2 × أ $= \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 22 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}$

> **لاحظ أنه**
> إذا كانت أ مصفوفة غير مربعة فإن أ^2 غير ممكنة.

مثال ٤

إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^2 − ٢ أ − ٣ I^2 = $\boxed{}$

الحل

أ^2 − ٢ أ − ٣ I^2 $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$

> **لاحظ أن**
> * $I^2 = I$
> * $I^n = I$ حيث ن ∈ ص$^+$

حاول بنفسك

إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^2 − ٥ أ + ٢ I = $\boxed{}$

تفكير ناقد

١ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين ، وكان : أ ب = $\boxed{}$

فهل هذا يعنى دائمًا أن : أ = $\boxed{}$ أو ب = $\boxed{}$ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا أ $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ فإن : أ ب $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

، ∵ أ ≠ $\boxed{}$ ، ب ≠ $\boxed{}$

أى أنه إذا كانت : أ ب = $\boxed{}$ فهذا لا يعنى دائمًا أن : أ = $\boxed{}$ أو ب = $\boxed{}$

٢ إذا كانت : أ مصفوفة مربعة وكان $أ^٢ = I$ فهل هذا يعنى دائمًا أن $أ = I$ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

أى أن إذا كانت : $أ^٢ = I$ فهذا لا يعنى دائمًا أن : $أ = I$

٣ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين وكان : $أ \times ب = أ$ فهل هذا يعنى دائمًا أن : $ب = I$ ؟

الإجابة : لا

فإذا اتخذنا $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

فإن : $أ \times ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix} = أ$

أى أن إذا كانت : $أ \times ب = أ$ فهذا لا يعنى دائمًا أن : $ب = I$

مدور حاصل ضرب مصفوفتين

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين وكانت أ ب ممكنة فإن : $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

وبصفة عامة : $(أ ب ج ... هـ)^{مد} = هـ^{مد} ... ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}$ بشرط أن تكون عمليات الضرب ممكنة.

مثال ٥

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٢ & -٨ \end{pmatrix}$ **فحقق أن :** $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

الحل

$\because أ ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٢ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & -٣٩ \\ ١٧ & -٨ \end{pmatrix}$ $\therefore (أ ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٨ \end{pmatrix}$ (١)

، $\because ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}$ ، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore ب^{مد} أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٨ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore (أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$

مثال ٦

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٦ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $١٥\,\text{س}^{مد} = \text{أ}^{٢} + (\text{ب}\,\text{ج})^{مد}$

الحل

$\because \text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٧ \\ -٢١ & ٢٨ \end{pmatrix}$

، $\text{ب}\,\text{ج} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٦ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣٦ \\ ٥٢ & -١٣ \end{pmatrix}$ $\therefore (\text{ب}\,\text{ج})^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٥٢ \\ ٣٦ & -١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore ١٥\,\text{س}^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & -٧ \\ -٢١ & ٢٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٥٢ \\ ٣٦ & -١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٤٥ \\ ١٥ & ١٥ \end{pmatrix}$ $\therefore \text{س}^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{١٥} & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{١٥} & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

مثال ٧

أوجد قيم أ ، ب ، حـ إذا كان : $\begin{pmatrix} ١ & \text{أ} & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -١ & \text{ب} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٧ & ٦ & ٤ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٩ & -٦ & ٤ \\ ٦ & \text{حـ} & ٢٨ \\ -٢٤ & ١٢ & ٣٦ \end{pmatrix}$

الحل

يمكن إيجاد قيم أ ، ب ، حـ دون إجراء عملية الضرب كاملة كالتالى :

نضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

$\therefore ١ \times -١ + \text{أ} \times ٧ + ٢ \times -٢ = -١٩$ $\therefore \text{أ} = -٢$

، نضرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

$\therefore ٥ \times -١ - ١ \times ٧ + \text{ب} \times -٢ = -٢٤$ $\therefore \text{ب} = ٦$

، نضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الثانى من المصفوفة الثانية

$\therefore ٠ \times ٠ + ٢ \times ٦ + ٤ \times ٣ = \text{حـ}$ $\therefore \text{حـ} = ٢٤$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى ضرب المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

تمارين 3

على ضرب المصفوفات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن ، ب مصفوفة على النظم ر × ل
فإن حاصل الضرب أ ب يكون ممكنًا إذا كانت ....

(أ) م = ر (ب) ن = ر (جـ) ن = ل (د) م = ل

(٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ١ ، ب مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإن أ ب مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ١ × ١ (جـ) ٣ × ٣ (د) ١ × ٣

(٣) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، أ ب مصفوفة على النظم ٣ × ١
فإن ب مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٢ × ١ (جـ) ٣ × ١ (د) ٢ × ٢

(٤) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣
فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٢ × ١ (جـ) ٣ × ٢ (د) ١ × ٣

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ١ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٣ × ٢
فإن : $ب^{مد}$ $أ^{مد}$ على النظم ....

(أ) ٢ × ٣ (ب) ٣ × ٢ (جـ) ٢ × ١ (د) ١ × ٢

(٦) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ١ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ، جـ مصفوفة على النظم ١ × ٢
فإن : (ب أ) جـ على النظم ....

(أ) ٢ × ١ (ب) ١ × ١ (جـ) ١ × ٢ (د) ٢ × ٢

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإنه يمكن إجراء أى من العمليات الآتية ؟

(أ) أ + ب (ب) $ب^{مد}$ + $أ^{مد}$ (جـ) أ $ب^{مد}$ (د) أ ب

(٨) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(١٠) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ & ١- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٦- \\ ٨ \end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٢٠ & ١٢- & ٨- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢٠ \\ ١٢- \\ ٨- \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(١١) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين حيث أ ب $= \begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : ب^{مد} أ^{مد} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٥ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ١- \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ١- & ٣ \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢- \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : (ب أ)^{مد} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ١٥ \\ ٤- & ١٠- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٦ & ٤- \\ ١٥ & ١٠- \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ \end{pmatrix}$

(١٣) إذا كانت : I هي مصفوفة الوحدة فإن : $I^{ن}$ = ... (حيث ن عدد صحيح موجب)

(أ) $I^{مد}$ (ب) $I^{٢}$

(جـ) $I^{٣}$ (د) جميع ما سبق صحيح.

(١٤) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٤ & ٢- \end{pmatrix}$ فإن : أ^{٢} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٤ & ٢- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$ (جـ) $\square_{١ \times ١}$ (د) $\square_{٢ \times ٢}$

(١٥) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ١- & ١- \end{pmatrix}$ فإن : أ^{٤} = ...

(أ) أ (ب) ٢ أ (جـ) ٤ أ (د) ٨ أ

(١٦) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} س & ٠ \\ ١ & ص \end{pmatrix}$ ، أ × ب $= \begin{pmatrix} ٩ & ٦ \end{pmatrix}$

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س & ٧ \\ ٣ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣- (ب) ٣ (جـ) ٢- (د) ١-

(١٨) إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ فإن : أ^{٢} − أ = ...

(أ) I (ب) $\square$ (جـ) ٣ I (د) ٥ I

(١٩) إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{س}^٢ + ٣\,\text{س} =$ ....

(أ) $١٢\,I$ (ب) $١٨\,I$ (جـ) ٩ س (د) ١٢ س

(٢٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١- & ١ \\ \text{س} & ٣- \end{pmatrix} = I$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) -٣ (د) -٤

(٢١) إذا كانت س مصفوفة بحيث $\text{س} \times \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن : س يمكن أن تكون ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س} & ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ١ \\ ٢ & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ١٤ \\ ٢- & ١٩ \end{pmatrix}$ فإن : س - ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) -٥ (د) -٣

(٢٣) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١- & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥- & ٠ \end{pmatrix}$ وكان : $\text{أ}\,\text{ب}^{مد} + \text{س} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٨ & ٥ \end{pmatrix}$

فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٧ & ١٢ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

(٢٤) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣- & ١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ ج ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١٨- & ١٠ \\ ٢٧- & ١٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٧- & ٢١- \\ ٤ & ١٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦- & ٦ \\ ٠ & ١٨ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٥) $\begin{pmatrix} ٠ & \text{ت}^٣ \\ \text{ت} & -\text{ت} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\text{ت} & \text{ت} \\ \text{ت} & ٠ \end{pmatrix} =$ .... (حيث $\text{ت}^٢ = -١$)

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٢- & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٦) $\begin{pmatrix} \text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta \\ \text{حا}\,\theta & -\text{حتا}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta \\ -\text{حا}\,\theta & \text{حتا}\,\theta \end{pmatrix} =$ ....

(أ) I (ب) $-I$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢٧) إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$ فإن مجموع عناصر المصفوفة $(\text{س}\,\text{س}^{مد})$ يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٢٩ (جـ) ٤٧ (د) ٦٥

(٢٨) إذا كانت المصفوفة $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ \text{ب} & \text{أ} \end{pmatrix}$ وكان $\text{ج}^٢ = \square$ فإن : أ ب = ...

(أ) صفر (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٢٩) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{ص} \end{pmatrix}$ وكان : أ ب = ب أ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = ٢ ص (جـ) س = ٣ ص (د) س = $\frac{١}{٢}$ ص

(٣٠) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ وكانت : $\text{أ}^٢ = ٩\,I$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) -٣ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق $\text{أ}^٢ = ٩\,I$

(٣١) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & \text{س} \\ -\text{س} & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^٢ = \begin{pmatrix} -٥ & ١٢ \\ -١٢ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٤ (د) صفر

(٣٢) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^٢ = ٨\,\text{أ} + \text{ك}\,I$ حيث ك عدد صحيح فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) -٧ (د) ٧

(٣٣) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & \text{ك} \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١٣ & ١١ \\ ١١ & ١٧ \end{pmatrix}$ وكان : $\text{أ} \times \text{أ}^{مد} = \text{ب}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٤) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ \text{أ} & \text{ب} & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^٢$ = ...

(أ) I (ب) ☐ (جـ) أ (د) -أ

(٣٥) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^٢$ = ...

(أ) أ (ب) ٣ أ (جـ) ٤ أ (د) ٥ أ

(٣٦) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^٥$ = ...

(أ) ٥ أ (ب) ١٠ أ (جـ) ١٦ أ (د) ٣٢ أ

(٣٧) فى محل للكشرى كانت أ مصفوفة تمثل عدد الأطباق المباعة فى ثلاث أيام متتالية (الأحد والأثنين والثلاثاء) ، ب مصفوفة تمثل سعر كل طبق حسب حجمه (صغير - وسط - كبير) ، ج مصفوفة تمثل مجموع أثمان كل نوع من الأطباق المباعة خلال الثلاث أيام حيث :

أ =

	صغير	وسط	كبير
الأحد	٢٠٠	٣٠٠	١٥٠
الأثنين	٢٥٠	٤٠٠	١٠٠
الثلاثاء	٣٠٠	٤٠٠	٣٠٠

، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١٥ \\ ٢٠ \\ ٢٥ \end{pmatrix}$ (صغير ، وسط ، كبير) فإن : ج = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١٢٧٥٠ \\ ١٤٢٥٠ \\ ٢٠٠٠٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٢٧٥٠ \\ ٢٠٠٠٠ \\ ١٤٢٥٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١٤٢٥٠ \\ ١٢٧٥٠ \\ ٢٠٠٠٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢٠٠٠٠ \\ ١٤٢٥٠ \\ ١٢٧٥٠ \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \\ س \end{pmatrix} = \square$ فإن : س = ...

(أ) −٤ (ب) −١ (ج) ١ (د) ٤

(٣٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{pmatrix}$ وكان : أ × ب = أ − ب فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ٥- \\ ٧ & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix}$

(٤٠) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix}$ وكان : أ × س = ب + س

فإن المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ١- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٨ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤- \end{pmatrix}$

(٤١) إذا كانت : أ = (ظا س جا س جتا س) وكان : أ $أ^{مد}$ = (٢) فإن : س = ...

حيث س ∈ $]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

(أ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (ج) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ظا\ \theta & قا\ \theta \\ -قا\ \theta & ظا\ \theta \end{pmatrix}$ فإن : $أ^٢$ = ...

(أ) I (ب) ٢ $ظا^٢ \theta$ × I

(ج) ($ظا^٢ \theta$ + ١) × I (د) (٢ $ظا^٢ \theta$ + ١) × I

(٤٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٦- & ٧ \\ ٧- & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢٠٢١}$ = ...

(أ) I (ب) أ (ج) $\frac{١}{٢}$ $أ^٢$ (د) ٢ I

(٤٤) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} جا\ \theta & ٠ \\ ٠ & جا\ \theta \end{pmatrix}$ حيث ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ وكانت $س^٢$ = $\frac{١}{٢}$ I

فإن قيمة θ التى تحقق ذلك = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (ج) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٤٥) إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات مربعة من نفس النظم :

(١) إذا كان : أ = ب فإن : أ ج = ب ج (٢) إذا كان : أ ج = ب ج فإن : أ = ب

أى الخيارات الآتية صحيحة ؟

(أ) (١) صحيح بينما (٢) خطأ. (ب) (١) خطأ بينما (٢) صحيح.

(ج) كل من (١) ، (٢) صحيح. (د) كل من (١) ، (٢) خطأ.

(٤٦) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ وكانت الدالة د معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

د (س) = (س + I) (س − I) فإن : د (أ) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

(٤٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث كان : $أ^٢ - أ = I$ فإن : $أ^٣ = $ ....

(أ) أ + ٢ I (ب) ٢ أ + I (جـ) ٣ أ + I (د) أ + ٣ I

(٤٨) إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث : $أ^٢ = أ$ فإن : $(I + أ)^٢ = $ ....

(أ) أ + ٢ I (ب) I + ٢ أ (جـ) ٣ أ + I (د) ٣ I + أ

(٤٩) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على النظم ٢ × ٢ أى مما يأتى يكون صحيح دائمًا ؟

(أ) (أ + ب) (أ − ب) = $أ^٢ - ب^٢$ (ب) $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢$

(جـ) $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$ (د) $(أ ب)^{مد} = أ^{مد} ب^{مد}$

(٥٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث $أ^٢ = أ$ فإن لكل م عدد طبيعى يكون $أ^{م+١} = $ ....

(أ) I (ب) ☐ (جـ) أ (د) − أ

(٥١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة حيث $أ^٢ = I$ فإن : $أ^م = أ$ عندما م عدد ....

(أ) طبيعى. (ب) طبيعى زوجى.

(جـ) طبيعى فردى. (د) طبيعى يقبل القسمة على ٣

(٥٢) إذا كانت أ مصفوفة وكان : $ب = أ أ^{مد}$ فإن ب تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة.

(جـ) مصفوفة الوحدة I (د) المصفوفة الصفرية ☐

(٥٣) إذا كانت كل من أ ، ب مصفوفة متماثلة فإن المصفوفة (أ ب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) مثلثية.

(٥٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان متماثلتان فإن المصفوفة (أ ب − ب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(٥٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين متماثلتين فإن (أ ب) مصفوفة متماثلة إذا كان ....

(أ) أ ب = I (ب) أ = ب (جـ) أ ب = ب أ (د) جميع ماسبق.

(٥٦) إذا كانت المصفوفة $(أ^{مد} ب أ)$ متماثلة فإن ذلك يشترط أن تكون ....

(أ) أ متماثلة. (ب) أ شبه متماثلة.

(جـ) ب متماثلة. (د) ب شبه متماثلة.

(٥٧) إذا كانت : أ × $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ × أ = ب فإن كلًا من المصفوفتين أ ، ب على النظم ....

(أ) ٢ × ٢ (ب) ٣ × ٣ (جـ) ٢ × ٣ (د) ٣ × ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مصفوفة حاصل الضرب فى كل مما يأتى (إن أمكن) مبينًا نظم المصفوفة الناتجة :

(١) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٢ \\ -١ & ١ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ \\ ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

(٦) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & -٣ \end{pmatrix}$

(١٠) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٦ \\ ٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

(١١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ & -٤ \\ ٦ & ٩ & -٥ \\ ٤ & ٧ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٤ & -١ & ٣ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

(١٢) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & ٩ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

---

٢ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٩ \end{pmatrix}$ فأوجد كلًا مما يأتى :

(١) أ ب (٢) ب أ (٣) (أ + ب) أ

---

٣ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$ فأوجد : أ ب ، أ^{٢} ، أ^{مد} ب

---

٤ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة : س^{٢} − ص^{٢}

---

٥ إذاً كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ & -٧ \\ ١٠ & -٥ & ٥ \\ -٨ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$

فأثبت أن : أ ب = ١٠ I

٦ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ حقق أن : (أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}

---

٧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

فحقق أن : أ (ب + ج) = أ ب + أ ج

---

٨ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & ٠ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

فحقق كلاً مما يأتى : (١) (أ ب) ج = أ (ب ج)   (٢) ب I = I ب = ب

---

٩ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، (أ + ب)^{مد} = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فأوجد : (أ^{مد} ب)^{مد}

---

١٠ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & ١ & ١ \\ ٤ & -٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & -٢ & -١ \\ ٦ & ١٢ & ٦ \\ ٥ & ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

فبيّن أن : أ ب = ☐ بينما ب أ ≠ ☐

---

١١ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

حقق أن : (أ ب ج)^{مد} = ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}

---

١٢ إذا كانت : أ^{مد} = $\begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^{٢} − ٥ أ + ٢٢ I = ☐

---

١٣ أوجد س ، ص ، ع التى تحقق : $\begin{pmatrix} -١ & س \\ ص & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٣ & ع & ١ \\ ٥ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ «٣ ، ٢ ، ٧»

---

١٤ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ص & س \end{pmatrix}$

أوجد قيمة كل من س ، ص التى تجعل : أ ب = ب أ «٠ ، ٢»

---

١٥ إذا كانت : م = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة كل من س ، ص التى تحقق المعادلة :

م^{٢} − س م + ص I = ☐ «٤ ، ٣»

---

١٦ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١٣ \\ ٨ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ ٧ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : ٢ س^{مد} = أ^{٢} + (ب ج)^{مد}

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} \text{جتا } \theta \\ \text{جا } \theta \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} \text{جا } \theta \\ -\text{جتا } \theta \end{pmatrix}$ فإن : س سَ^مد + ص صَ^مد = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : أ^٢٧ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب + حـ + ء = ...

(أ) ١٩ (ب) ٢٧ (جـ) ٢٩ (د) ٣٦

(٣) إذا كانت ل ، م هما جذرا المعادلة س^٢ - ٣ س + ١ = ٠

فإن : $\begin{pmatrix} ٣ & ل \\ ل & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & م \\ م & ٣ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٧ & ٩ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت كل من المصفوفتين أ ، ب ليست مصفوفة صف أو مصفوفة عمود وكان عدد عناصر المصفوفة أ = ١٠ وعدد عناصر المصفوفة ب = ٦ وكان : أ ب ممكن فإن عدد عناصر المصفوفة (أ ب) يساوي ....

(أ) ٦٠ (ب) ١٦ (جـ) ١٥ (د) ٦

(٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النظم فإن : (أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢ إذا كان ....

(أ) أ ب = ب أ (ب) أ = - ب (جـ) أ = ب^مد (د) ٢ أ = - ب

(٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ك \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ^ن = ... حيث ن عدد صحيح موجب.

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ن ك \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ن & ن ك \\ ٠ & ن \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ن & ك^ن \\ ٠ & ن \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ك^ن \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ت & ٠ \\ ٠ & ت \end{pmatrix}$ ، ن ∈ ص+ فإن : أ^٤ن = ...

(أ) I (ب) $\begin{pmatrix} ت & ٠ \\ ٠ & ت \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ت \\ ت & ٠ \end{pmatrix}$ (د) ▭

(٨) إذا كان : أب = $\square$ فإن : ....

(أ) أ = $\square$ ، ب = $\square$ (ب) أ = $\square$ و ب = $\square$

(جـ) ليس من الضرورى أن يكون أ = $\square$ ، ب = $\square$ (د) جميع ما سبق خطأ

(٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : أ^{س} = $\begin{pmatrix} ٣٢ & ٣٢ \\ ٣٢ & ٣٢ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٠) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : أ^{٢} = ٣ أ + ٢ I ، أ^{٣} = م أ + ل I

فإن : م + ل = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٧ (جـ) ١١ (د) ٦

(١١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ ، أ × $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ \\ -٣ \end{pmatrix}$ ، أ × $\begin{pmatrix} -١ \\ ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -١ \\ -٣ \end{pmatrix}$

فإن : أ × $\begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٤ \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ^{ن} + (ن - ١) I = ...

(أ) ٢$^{ن-١}$ أ (ب) - ن أ (جـ) ن أ (د) (ن + ١) أ

(١٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$ فإن : (I + ٢ أ + ٣ أ^{٢} + ٤ أ^{٣} + ...) يساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٤ & -١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & -٨ \end{pmatrix}$

(١٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ فإن : أ^{٦٠} = ...

(أ) ٢^{٣٠} I (ب) ٢^{٦٠} I (جـ) ٢^{٩٠} I (د) ٢^{١٢٠} I

(١٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{جتا } \theta & \text{جا } \theta \\ \text{جا } \theta & -\text{جتا } \theta \end{pmatrix}$ فإن : أ^{٢٠١٩} = ...

(أ) أ (ب) أ^{٢} (جـ) ٢٠١٩ أ^{٢} (د) ٢٠١٩ I

---

٢ إذا كان : ب^{مد} + جـ^{مد} = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق أن : س = (أ ب + أ جـ)^{مد}

٣ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ١ & ب \end{pmatrix}$ أوجد أ ، ب إذا كان : $س^٢ + س = \square$

---

٤ إذا كانت : س ، ص ، ع مصفوفات غير صفرية مربعة وكان : $ع = ص^{مد} س^{مد} + س ص$

فأثبت أن : ع مصفوفة متماثلة.

---

٥ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $س^{٢٠١٤} = I$

تطبيقات حياتية

١ **الربط بالسياحة :** يستهلك أحد الفنادق في مدينة الغردقة السياحية الكميات الموضحة من اللحوم والخضروات والفاكهة بالكيلو جرام في وجبتي الغداء والعشاء

	لحوم	خضروات	فاكهة
وجبة الغداء	٢٠٠	١٠٠	١٥٠
وجبة العشاء	١٢٠	٨٠	١٠٠

، وذلك تبعًا للجدول المقابل ، فإذا كان متوسط سعر الكيلو جرام من اللحوم ٦٥ جنيهًا ومتوسط سعر الكيلو جرام من الخضروات أربعة جنيهات ومتوسط سعر الكيلو جرام من الفاكهة هو خمسة جنيهات ، فأوجد باستخدام ضرب المصفوفات التكاليف الكلية للوجبتين. «١٤١٥٠ ، ٨٦٢٠»

---

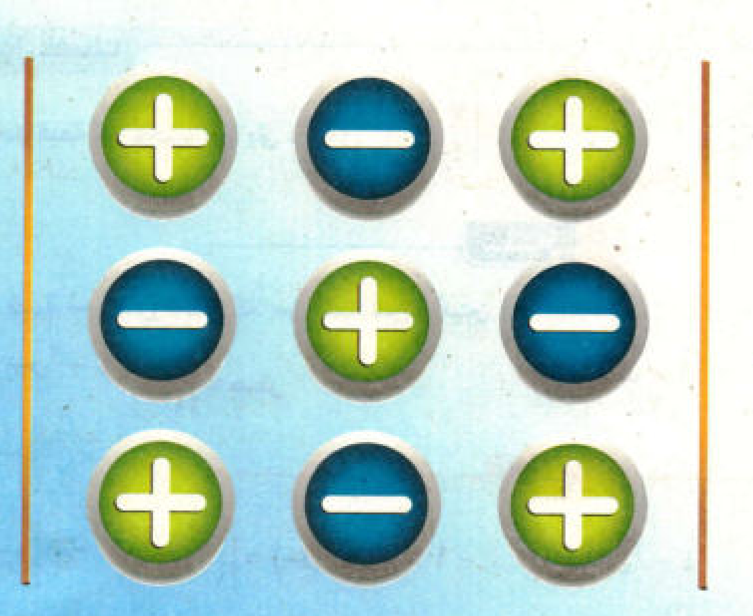
٢ **الربط بالسياحة :** لدى شركة سياحية ٣ فنادق بمدينة الغردقة ، يبين الجدول المقابل عدد الغرف المختلفة في كل فندق ، فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحتوي على سرير واحد ٢٥٠ جنيهًا ، وللغرفة التي تحتوي على سريرين ٤٥٠ جنيهًا ، وللجناح ٦٠٠ جنيه.

الفندق	غرفة بسرير	غرفة بسريرين	جناح
الزهرة	٢٨	٦٤	٨
اللؤلؤة	٣٥	٩٥	٢٠
الماسة	٢٠	٨٠	١٥

(١) اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف المختلفة في الثلاثة فنادق ، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

(٢) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للشركة ، على فرض أن جميع الغرف تم شغلها.

(٣) ما الدخل اليومي للشركة على فرض أن جميع الغرف تم شغلها ؟ «١٥٤١٠٠»



الدرس

4

المحـــــــــددات

محدد الرتبة الثانية

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث أ = $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{حـ} \end{pmatrix}$

فإن : محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

ويسمى بمحدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرف كالآتى : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{حـ} \end{vmatrix} = \text{أء} - \text{حـ ب}$

أى أن : قيمة محدد الرتبة الثانية تساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحًا منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر.

مثال ١

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

١ $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix}$ ٢ $\begin{vmatrix} ٧- & ٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ ٣ $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤- & ٨- \end{vmatrix}$ ٤ $\begin{vmatrix} \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & -\text{جتا}\,\theta \end{vmatrix}$

الحـــل

١ $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٢ × ٨ − ٣ × ٥ = ١٦ − ١٥ = ١

٢ $\begin{vmatrix} ٧- & ٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٤ × ٦ − ٢ × (−٧) = ٢٤ + ١٤ = ٣٨

٣ $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤- & ٨- \end{vmatrix}$ = ٦ × (−٤) − (−٨) × ٣ = −٢٤ + ٢٤ = صفر

٤ $\begin{vmatrix} \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & -\text{جتا}\,\theta \end{vmatrix}$ = جا θ × جا θ − (− جتا θ) × جتا θ = جا² θ + جتا² θ = ١

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل محدد مما يلى : ① $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

مثال ٢

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

① $\begin{vmatrix} س^2 - 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ صفر ② $\begin{vmatrix} س + 2 & 3 \\ -2 & س - 2 \end{vmatrix} = 1$

الحل

① ∵ $\begin{vmatrix} س^2 - 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (س^2 - 4) \times 1 - 0 \times 1 = س^2 - 4$

∴ $س^2 - 4 = 0$ ∴ $س^2 = 4$ ∴ $س = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

② ∵ $\begin{vmatrix} س + 2 & 3 \\ -2 & س - 2 \end{vmatrix} = (س + 2)(س - 2) - (-2) \times 3 = س^2 - 4 + 6 = س^2 + 2$

∴ $س^2 + 2 = 1$ ∴ $س^2 = -1$ ∴ $س = \pm\sqrt{-1}$

∴ س = ت أ، س = − ت (حيث : $ت^2 = -1$)

حاول بنفسك

أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} 2س & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$

محدد الرتبة الثالثة

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{pmatrix}$

فإن : محدد المصفوفة أ يرمز له بالرمز |أ|

ويُسمى بمحدد الرتبة الثالثة حيث : $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix}$

وقبل التعرف على كيفية فك محدد الرتبة الثالثة سنتعرف أولاً على «المحدد الأصغر» المناظر لأى عنصر فى المصفوفة أ وكيفية تحديد إشارته.

لكل عنصر فى المصفوفة أ محدد أصغر يمكن الحصول عليه بحذف الصف والعمود المتقاطعين على هذا العنصر.

فمثلًا يمكن الحصول على المحدد الأصغر المناظر لكل عنصر من عناصر الصف الأول كما يلي :

للحصول على المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{١١}$ ويُرمز له بالرمز $|أ_{١١}|$

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

للحصول على المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{٢١}$ ويُرمز له بالرمز $|أ_{٢١}|$

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

للحصول على المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{٣١}$ ويُرمز له بالرمز $|أ_{٣١}|$

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

- ويمكن تحديد إشارة أى محدد أصغر لعنصر ما فى المصفوفة بأن :

نجمع رتبة الصف ورتبة العمود الذين يتقاطعان عند هذا العنصر فإذا كان مجموع الرتبتين :

– **زوجيًا** : كانت الإشارة موجبة. – **فرديًا** : كانت الإشارة سالبة.

فمثلًا

– إشارة $|أ_{١١}|$ موجبة لأن : ١ + ١ = ٢ (زوجى)

– إشارة $|أ_{٢١}|$ سالبة لأن : ١ + ٢ = ٣ (فردى)

– إشارة $|أ_{٣١}|$ موجبة لأن : ١ + ٣ = ٤ (زوجى)

لاحظ أن

إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{ص ع}$ تتعين بالقاعدة : $(-١)^{ص + ع}$

- وعلى هذا يمكن كتابة قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر كما بالشكل المقابل :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

فك محدد الرتبة الثالثة

يمكن فك محدد الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف أو أى عمود ومحدداتها الصغرى وباستخدام قاعدة الإشارات السابق ذكرها.

فمثلًا إذا كان : $|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ فإن :

- $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر الصف الأول)

- $|أ| = - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٢٢} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢٣} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر العمود الثانى)

مثال ٣

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

الحل

باستخدام عناصر الصف الأول نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(0 \times (-3) - 1 \times 4\right) - 3\left(-2 \times (-3) - 1 \times 4\right) - \left(-2 \times 1 - 1 \times 0\right)$$

$$= 2\,(0 - 4) - 3\,(6 - 4) - (-2 - 0) = 2 \times (-4) - 3 \times 2 + 2 = -12$$

ملاحظة

يمكن فك المحدد باستخدام أى صف أو أى عمود كما ذكرنا وسوف نقوم هنا بفكه مرة أخرى باستخدام عناصر العمود الثانى مع مراعاة قاعدة الإشارات.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \text{صفر}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3\left(-2 \times (-3) - 1 \times 4\right) + \text{صفر} - \left(2 \times 4 - (-2) \times (-1)\right)$$

$$= -3\,(6 - 4) - (8 - 2) = -3 \times 2 - 6 = -12$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقًا (حاول بنفسك استخدام أى صف أو أى عمود آخر)

مثال ٤

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

الحل

يفضل فك هذا المحدد بدلالة عناصر العمود الأول لوجود أكبر عدد من الأصفار

$\therefore$ قيمة المحدد $= 4\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \text{صفر}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \text{صفر}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 4\left(5 \times (-1) - (-3) \times (-2)\right) - \text{صفر} + \text{صفر} = 4\,(-5 - 6) = 4 \times (-11) = -44$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

محدد المصفوفة المثلثة

المصفوفة المثلثة

هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى (أو فوقه) أصفار.

مثل : $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & -٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

قيمة محدد المصفوفة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى.

أى أن $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ ٠ & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}\, أ_{٢٢}$ ، $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١}\, أ_{٢٢}\, أ_{٣٣}$

الإثبات $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ ٠ & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}\, أ_{٢٢} - ٠ \times أ_{١٢} = أ_{١١}\, أ_{٢٢} - ٠ = أ_{١١}\, أ_{٢٢}$

، $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - صفر \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + صفر \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

$= أ_{١١} (أ_{٢٢}\, أ_{٣٣} - أ_{٢٣} \times ٠) = أ_{١١}\, أ_{٢٢}\, أ_{٣٣}$

وعلى هذا فإن : $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & -٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٢ \times (-٣) \times ٧ = -٤٢$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$

مثال ٥

حل المعادلة الآتية : $\begin{vmatrix} س & ٠ & ١ \\ ٨ & ١ - س & -س \\ س & -١ & ١ + س \end{vmatrix} =$ صفر

الحل

بفك المحدد :

$\therefore$ س $\begin{vmatrix} ١ - س & -س \\ -١ & ١ + س \end{vmatrix}$ - صفر $\begin{vmatrix} ٨ & -س \\ س & ١ + س \end{vmatrix}$ + ١ $\begin{vmatrix} ٨ & ١ - س \\ س & -١ \end{vmatrix}$ = صفر

$\therefore$ س [(١ - س) (١ + س) - (-س × -١)] - صفر + ١ [٨ × -١ - (١ - س) × س] = صفر

$\therefore$ س (١ − س^{٢} − س) + ١ (−٨ − س + س^{٢}) = صفر

$\therefore$ س − س^{٣} − س^{٢} − ٨ − س + س^{٢} = صفر

$\therefore$ − س^{٣} − ٨ = صفر $\therefore$ س^{٣} = −٨ $\therefore$ **س = −٢**

حاول بنفسك

حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ٢ & -٢ \\ ٢ & س & -٢ \\ -٢ & ٢ & س \end{vmatrix} = ٠$

مثال ٦

إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٧ **أوجد :** |٣ أ|

الحل

نفرض أن : أ = $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ $\therefore$ |أ| = س ل − ص ع = ٧ (١)

، ٣ أ = ٣ $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣س & ٣ص \\ ٣ع & ٣ل \end{pmatrix}$

$\therefore$ |٣ أ| = $\begin{vmatrix} ٣س & ٣ص \\ ٣ع & ٣ل \end{vmatrix}$ = ٩ س ل − ٩ ص ع = ٩ (س ل − ص ع) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : |٣ أ| = ٩ × ٧ = ٦٣

- **من المثال السابق يمكن استنتاج الملاحظات التالية :**

ملاحظات

١ إذا كان : أ مصفوفة على النظم ن × ن ، ك ∈ ح فإن : |ك أ| = ك^{ن} |أ|

فمثلاً :

* إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٣

فإن : |٥ أ| = ٥^{٢} × |أ| = ٢٥ × ٣ = ٧٥

* إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان : |أ| = ٥

فإن : |٢ أ| = ٢^{٣} × |أ| = ٨ × ٥ = ٤٠

٢ إذا كان : أ مصفوفة مربعة فإن : |أ| = |أ^{مد}|

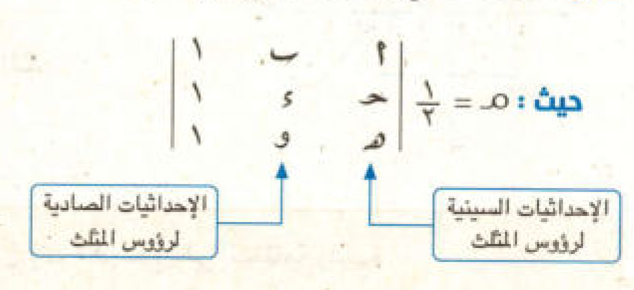
٣ إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين بحيث : أ ب موجودة فإن : |أ ب| = |أ| × |ب|

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

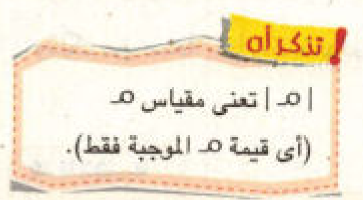
يمكن استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح مثلث باستخدام إحداثيات رؤوسه كما يلى :

إذا كان : س ص ع مثلثًا **حيث :** س (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و)

فإن : مساحة سطح Δ س ص ع هى | مـ |



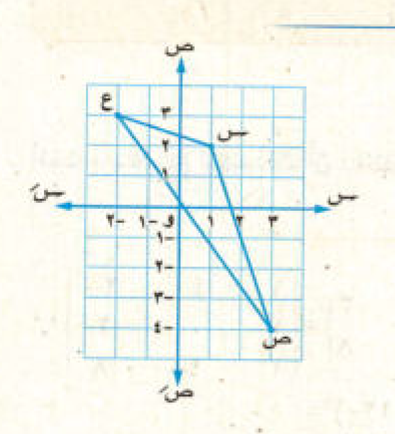
حيث : $\text{مـ} = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{حـ} & \text{ء} & ١ \\ \text{هـ} & \text{و} & ١ \end{vmatrix}$



وسوف نعرض فى نهاية هذا الدرس إثبات القانون السابق كنشاط إثرائى.



أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث المقابل الذى إحداثيات رؤوسه س (١ ، ٢) ، ص (٣ ، -٤) ، ع (-٢ ، ٣)



الحـل

$\because \text{مـ} = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$

وباستخدام عناصر العمود الثالث :

$\therefore \text{مـ} = \frac{١}{٢}\left[\begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix}\right]$

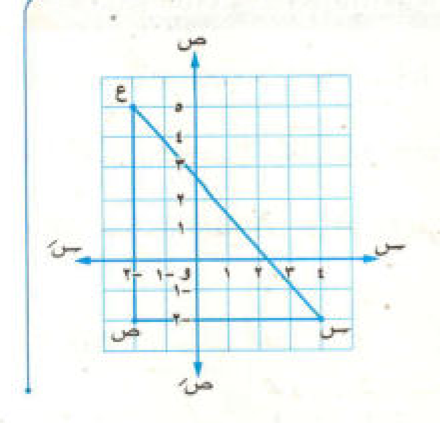
$= \frac{١}{٢}\left[(٩ - ٨) - (٣ + ٤) + (-٤ - ٦)\right] = \frac{١}{٢}(١ - ٧ - ١٠) = -٨$

$\therefore$ مساحة Δ س ص ع = | مـ | = | -٨ | = ٨ وحدة مربعة

لاحظ أننا استخدمنا عناصر العمود الثالث فى فك المحدد لأنها الأسهل فى إجراء العمليات الحسابية لوجود الواحد الصحيح.

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



ـس ص ع مثلث حيث : ـس (٤ ، −٢)

، ص (−٢ ، −٢) ، ع (−٢ ، ٥)

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح Δ ـس ص ع

وتأكد من صحة الحل باستخدام قانون حساب مساحة المثلث.

ملاحظة

لإثبات أن ثلاث نقاط ـس (أ ، ب) ، ص (حـ ، ء) ، ع (هـ ، و) تقع على استقامة واحدة

باستخدام المحددات نثبت أن : $\begin{vmatrix} أ & ب & ١ \\ حـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix} =$ صفر

مثال ٨

أثبت باستخدام المحددات أن : النقط (−٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

الحل

$\because \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٨ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ٨ & -٤ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٨ & -٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}$

$= (-١٢ - ٠) - (٨ - ٣٢) + (٠ - ١٢) = -١٢ + ٢٤ - ١٢ =$ صفر

$\therefore$ النقط (−٢ ، ٤) ، (٣ ، ٠) ، (٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

حاول بنفسك

أثبت باستخدام المحددات أن النقط : (٤ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (−٢ ، −٥) تقع على استقامة واحدة.

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

أولًا حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين

- حل نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين يُقصد به إيجاد قيم المجهولين الذين يحققان المعادلتين معًا.
- إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين كالتالى :

أ ـس + ب ص = م

حـ ـس + ء ص = ن

فإنه لحل هذا النظام نتبع ما يأتى :

١ نوجد قيم ثلاثة محددات وذلك بعد وضع المعادلتين على الصورة السابقة ، وهذه المحددات هى :

المحدد	الوصف
$\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$	• يسمى محدد مصفوفة المعاملات ويُرمز له بالرمز Δ ويُقرأ (دلتا) • نحصل عليه بوضع معاملى س فى المعادلتين فى العمود الأول ، ومعاملى ص فى المعادلتين فى العمود الثانى.
$\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ء \end{vmatrix}$	• يسمى محدد المجهول س ويُرمز له بالرمز $\Delta_{س}$ ويُقرأ (دلتا س) • نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الأول (معاملى س) بالثابتين م ، ن
$\begin{vmatrix} أ & م \\ حـ & ن \end{vmatrix}$	• يسمى محدد المجهول ص ويُرمز له بالرمز $\Delta_{ص}$ ويُقرأ (دلتا ص) • نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الثانى (معاملى ص) بالثابتين م ، ن

٢ نوجد قيمة س ، وقيمة ص كما يأتى (بفرض أن : $\Delta \neq ٠$) :

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ء \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}} = \frac{م ء - ن ب}{أ ء - حـ ب}$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} أ & م \\ حـ & ن \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}} = \frac{أ ن - حـ م}{أ ء - حـ ب}$$

لاحظ أنه إذا كان : $\Delta \neq$ صفر فإن للنظام حلًا وحيدًا

أما إذا كان : $\Delta =$ صفر فإن للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل

والمثال التالى يوضح الخطوات السابق ذكرها.

مثال ٩

حل بطريقة كرامر المعادلتين الآتيتين : ٦ س − ٥ ص = −٢٣ ، ٣ س + ٣ ص = ١٦

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٦ & -٥ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ \times ٣ - ٣ \times (-٥) = ١٨ + ١٥ = ٣٣$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٢٣ & -٥ \\ ١٦ & ٣ \end{vmatrix} = -٢٣ \times ٣ - ١٦ \times (-٥) = -٦٩ + ٨٠ = ١١$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٦ & -٢٣ \\ ٣ & ١٦ \end{vmatrix} = ٦ \times ١٦ - ٣ \times (-٢٣) = ٩٦ + ٦٩ = ١٦٥$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١١}{٣٣} = \frac{١}{٣} ، ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١٦٥}{٣٣} = ٥$$

وتكون مجموعة الحل = $\left\{ \left(\frac{١}{٣} ، ٥ \right) \right\}$

ملاحظة

يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض في كل من المعادلتين بقيمة س ، وقيمة ص

حاول بنفسك

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام طريقة كرامر : ٤ س + ٣ ص = −٤ ، ٣ س − ص = −٣

ثانيًا حل أنظمة المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل كالآتى :

١ $أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ ع = م$ | ٢ $أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ ع = ن$

٣ $أ_٣ س + ب_٣ ص + حـ_٣ ع = ك$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه فى حالة نظام معادلتين خطيتين فى مجهولين يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & حـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & حـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & حـ_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المعاملات}$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} م & ب_١ & حـ_١ \\ ن & ب_٢ & حـ_٢ \\ ك & ب_٣ & حـ_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول س}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ_١ & م & حـ_١ \\ أ_٢ & ن & حـ_٢ \\ أ_٣ & ك & حـ_٣ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ص}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثانى (معاملات ص) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & م \\ أ_٢ & ب_٢ & ن \\ أ_٣ & ب_٣ & ك \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ع}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت م ، ن ، ك

وبفرض أن $\Delta \neq$ صفر فإن : $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$ ، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$

والمثال التالى يوضح الخطوات السابقة.

مثال ١٠

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٢ ص + ٢ س = ع + ١ ، ٣ س + ٢ ع = ٨ − ٥ ص ، ٣ ع − ١ = س − ٢ ص

الحل

١ نضع نظام المعادلات على الصورة : أ س + ب ص + حـ ع = م كالتالى :

٢ س + ٣ ص − ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨ ، س − ٢ ص − ٣ ع = −١

٢ نوجد كلاً من : Δ ، $\Delta_{س}$ ، $\Delta_{ص}$ ، $\Delta_{ع}$ كالتالى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٢(-١٥ + ٤) - ٣(-٩ - ٢) + (-١)(-٦ - ٥)$$
$$= -٢٢ + ٣٣ + ١١ = ٢٢$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٨ & ٥ & ٢ \\ -١ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ١(-١٥ + ٤) - ٣(-٢٤ + ٢) + (-١)(-١٦ + ٥)$$
$$= -١١ + ٦٦ + ١١ = ٦٦$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & ٨ & ٢ \\ ١ & -١ & -٣ \end{vmatrix} = ٢(-٢٤ + ٢) - ١(-٩ - ٢) + (-١)(-٣ - ٨)$$
$$= -٤٤ + ١١ + ١١ = -٢٢$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٥ & ٨ \\ ١ & -٢ & -١ \end{vmatrix} = ٢(-٥ + ١٦) - ٣(-٣ - ٨) + ١(-٦ - ٥)$$
$$= ٢٢ + ٣٣ - ١١ = ٤٤$$

٣ نوجد قيم المجاهيل س ، ص ، ع كالتالى :

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٦٦}{٢٢} = ٣$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٢٢}{٢٢} = -١$ ، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٤٤}{٢٢} = ٢$

وتكون مجموعة الحل = $\{(٣ ، -١ ، ٢)\}$

ملاحظتان

- يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض عن المجاهيل الثلاثة فى كل معادلة.
- يُسمى (٣ ، −١ ، ٢) ثلاثى مرتب.

حاول بنفسك

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٢ س + ص − ع = ٣ ، س + ص = ١ − ع ، س = ٢ ص + ٣ ع + ٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد قيمة المحدد وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.

نشاط طريقة لإثبات قانون إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات

بفرض أن س ص ع مثلث حيث :

س (أ ، ب) ، ص (جـ ، د) ، ع (هـ ، و) فإن :

مساحة Δ س ص ع

= مساحة شبه المنحرف س سَ عَ ع

+ مساحة شبه المنحرف ع عَ صَ ص

− مساحة شبه المنحرف س سَ صَ ص

$$= \frac{\text{ب}+\text{و}}{2}(\text{هـ}-\text{أ}) + \frac{\text{و}+\text{د}}{2}(\text{جـ}-\text{هـ}) - \frac{\text{ب}+\text{د}}{2}(\text{جـ}-\text{أ})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\text{ب}+\text{و})(\text{هـ}-\text{أ}) + (\text{و}+\text{د})(\text{جـ}-\text{هـ}) - (\text{ب}+\text{د})(\text{جـ}-\text{أ})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{ب هـ} - \text{ب أ} + \text{و هـ} - \text{و أ} + \text{و جـ} - \text{و هـ} + \text{د جـ} - \text{د هـ} - \text{ب جـ} + \text{ب أ} - \text{د جـ} + \text{د أ}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{ب هـ} - \text{و أ} + \text{و جـ} - \text{د هـ} - \text{ب جـ} + \text{د أ}\right] \qquad (1)$$

وبفك المحدد $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ} & \text{د} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثالث نجد أن :

$$\text{المحدد} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{جـ و} - \text{هـ د} - \text{أ و} + \text{هـ ب} + \text{أ د} - \text{ب جـ}\right] \qquad (2)$$

وبمقارنة الناتج الذى حصلنا عليه فى (١) ، والناتج الذى حصلنا عليه فى (٢) نجد أن :

$$\text{مساحة } \Delta \text{ س ص ع} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ} & \text{د} & 1 \\ \text{هـ} & \text{و} & 1 \end{vmatrix}$$ (بشرط أخذ القيمة المطلقة للناتج)

تمـارين 4 على المحـــــددات



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٢٩ (ب) ١ (جـ) -١ (د) ١١

(٢) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) -٨ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ١٠

(٣) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٤) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) -٨ (جـ) ٢٠ (د) -٢٠

(٥) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٠ & ٤٢ & ٣ \\ ٢ & ١٨ & ٧ \\ ٠ & ٢٨ & ٣ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٨٤ (جـ) ٤٨ (د) -٨٤

(٦) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٥ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix}^{٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) -٢٩

(٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $\dfrac{|٢ أ|}{٢ |أ|}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & س \end{vmatrix} = ٠$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} س^{٢} & ٥ \\ ٣ & س \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣ (ج) ١٢ (د) ٢٧

(١٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢س & ٥ \\ ٦ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١١$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ١٢ \\ ٣ & س \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) $\pm$ ٦

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & -١ \\ ٢ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٣ أ ، -٢ (ب) -٣ أ ، ٢ (ج) ٣ أ ، ٢ (د) -٣ أ ، -٢

(١٣) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ٠ & ٠ \\ ٥ & ٣ & ٠ \\ ٤ & -١ & ٢س \end{vmatrix} = ٦$ هي ....

(أ) $\{٣\}$ (ب) $\{٦\}$ (ج) $\{١ ، -١\}$ (د) $\{٦ ، -٦\}$

(١٤) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢س & ٠ & ٠ \\ ١ & ٣س & ٠ \\ ٢ & ٤ & -س \end{vmatrix} = ٤٨$ فإن : قيمة س = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) $\pm$ ٢ (د) صفر

(١٥) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س^{٢} & -٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر في ك هي ....

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{-٢ ، ٢\}$ (ج) $\{-٢ت ، ٢ت\}$ (د) $\{-ت ، ت\}$

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س + ٢ & ٢ \\ س & س - ٣ \end{vmatrix} = ٤$ هي ....

(أ) $\{٣ ، -٢\}$ (ب) $\{٢ ، -٣\}$ (ج) $\{٥ ، -٢\}$ (د) $\{٢ ، -٥\}$

(١٧) قيمة أ الممكنة التي تجعل المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & أ & ١ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$ هي ....

(أ) ٥ (ب) -٢ (ج) ١ (د) ٣

(١٨) إذا كانت : أ (٣ ، ٥) ، ب (٢ ، ٠) ، ح (-٣ ، ٣)

فإن مساحة سطح المثلث أ ب ح تساوي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٨ (ب) ١٤ (ج) ٧ (د) ٢

(١٩) مساحة Δ أب جـ = ... وحدة مساحة.

(أ) −٣

(ب) −١,٥

(جـ) ١,٥

(د) ٣

(٢٠) في الشكل المقابل :

مساحة الشكل الرباعي أب جـ ء = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢٠

(ب) ١٠

(جـ) ٦٨

(د) ٣٤

(٢١) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = ٦$ وكان $\begin{vmatrix} \text{أك} & \text{كجـ} \\ \text{ب} & \text{ء} \end{vmatrix} = -٢٤$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −٤

(٢٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = ٥$ وكان ء − جـ = ٧ فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} + ٢ & \text{ب} + ٢ \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ١٤ (جـ) −٩ (د) ١٩

(٢٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{س} & ٢\text{ص} \\ ٠ & \text{ع} \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ فإن : س × ص × ع = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٤) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : $|\text{أ} - \text{م} I| =$ صفر فإن : م = ...

(أ) ١ أ، ٤ (ب) −١ أ، ٤ (جـ) −٤ أ، ١ (د) −٤ أ، −١

(٢٥) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : $\text{م}^٢ - ٥\text{م} = ٧$ فإن : $|\text{أ} - \text{م} I| =$ ....

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٢٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢\text{ك} - ١ & ٢ \\ ٣ & \text{ك} + ١ \end{vmatrix} = ٢\text{ك}^٢ + ١$ فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} ل & ٢ & -١ \\ س - ٢ & م & ٣ \\ ٠ & ٠ & ن \end{vmatrix}$ = ل م ن حيث ل ، م ، ن أعداد غير صفرية

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٦ (د) ل م

(٢٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ٥ \\ ٥ & ب \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\begin{vmatrix} ب & ٢ \\ ٢ & جـ \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\begin{vmatrix} أ & ١ \\ ١ & جـ \end{vmatrix}$ = ٠

فإن : $\begin{vmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ -١ & ب & ٠ \\ ٢ & ٥ & جـ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ± ١٠ (ب) ± ٥٠ (جـ) ± ١٠٠ (د) ± ٢٠

(٢٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & س \\ ٢ & ص \end{pmatrix}$ وكان |ب| = ٣ ، |أ + ب| = ٥

فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٩ (د) ٢١

(٣٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث : |أ| = ٢ فإن : |أ^{مد}| = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٧ فإن : |أ^{٢}| = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٤٩ (د) ٥٦

(٣٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ١٥ فإن : |٢ أ| = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٣٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : |ب| = ١٢ فإن : |أ ب| = ...

(أ) -٢٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٣

(٣٤) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على النظم ٣ × ٣ بحيث كان : |أ| = ٢ ، |ب| = -١

فإن : |٣ أ ب| = ...

(أ) -٦ (ب) -١٨ (جـ) ٥٤ (د) -٥٤

(٣٥) إذا كانت أ مصفوفة مربعة تحقق العلاقة : أ أ^{مد} = I فإن : |أ| = ...

(أ) صفر فقط. (ب) ١ فقط. (جـ) -١ فقط. (د) ± ١

(٣٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ وكان : |أ^{٣}| = ١٢٥ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ± ٢ (جـ) ± ٣ (د) ± ٥



(٣٧) إذا كانت : $أ^٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١٤ \end{pmatrix}$ فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) ٢ (د) −٢

(٣٨) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان : |أ| = ٥ فإن : |− أ| = ...

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢٥

(٣٩) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان : |أ| = ٥ فإن : |− أ| = ...

(أ) −٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢٥

(٤٠) إذا كانت : أ = − $أ^{مد}$ حيث : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ فإن : |أ| = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤١) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم م × م حيث م عدد زوجي فإن : |أ| = ...

(أ) صفر فقط. (ب) ١ فقط. (جـ) −١ فقط. (د) أي عدد حقيقي.

(٤٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ وكان : |٢ أ| = ٨ فإن : |٣ أ| = ...

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٤٣) في نظام المعادلات $أ_١$ س + $ب_١$ ص = $حـ_١$ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $حـ_٢$

إذا كان : $\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = ٥$ ، $\begin{vmatrix} حـ_١ & ب_١ \\ حـ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = -١٠$ ، $\begin{vmatrix} أ_١ & حـ_١ \\ أ_٢ & حـ_٢ \end{vmatrix} = ١٥$

فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (−٥٠ ، ٧٥) (د) (٧٥ ، −٥٠)

(٤٤) عند حل نظام المعادلات : ٢ س + ٣ ص − ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨

، س − ٢ ص − ٣ ع = −١ يكون $\frac{\Delta_س}{\Delta}$ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

(٤٥) في الشكل المقابل :

$\overline{أحـ}$ قطعة مماسة للدائرة م ، $\overline{أب}$ قطر في الدائرة

فإن قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ع & ص \\ ٢ & س & ع \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣

(جـ) صفر (د) ٢

(٤٦) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س - ٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & س - ٣ & ٠ \\ ٤ & -١ & س \end{vmatrix}$ = صفر هي ....

(أ) {٠} (ب) {٣ ، ٤ ، −١} (جـ) {٢ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

(٤٧) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س - ٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ & س + ٢ \end{vmatrix}$ = ٥ هى ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {٣ ، -٣} (جـ) {٣ ، ٢} (د) {١ ، -١}

(٤٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} جا \theta & ٠ & ٠ \\ ٢ & قتا \theta & ٠ \\ ١ & ٣ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} جا \theta & جتا \theta \\ -جتا \theta & جا \theta \end{vmatrix}$ = ٠ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) جا θ

(٤٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ س & ٥ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix}$ = ٨ س فإن مجموعة حل المعادلة هى ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {٠ ، -٢ ، ٢} (جـ) $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$ (د) $\{٠ ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$

(٥٠) إذا كانت : $\theta \in$]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} طا \theta & جتا \theta \\ جتا \theta & ظتا \theta \end{vmatrix} = \frac{٣}{٤}$ هى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{٣}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{٤}\}$ (جـ) $\{\frac{\pi}{٦}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{١٢}\}$

(٥١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ - ٤ س - ١٠ = ٠ فإن : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ ل & -١ \\ ٣ & م \end{vmatrix}$ تساوى ....

(أ) -١٧ (ب) -١٢ (جـ) -٨ (د) -٦

(٥٢) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء أربعة أعداد صحيحة متتالية فإن : $\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ١

(٥٣) إذا كانت النقط (١ ، -٢) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٣) منتصفات أضلاع Δ أ ب حـ
فإن مساحة Δ أ ب حـ تساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٥٤) إذا كان : أ (ك ، ك + ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٣ ، ١) هى رؤوس المثلث أ ب حـ
وكانت مساحة Δ أ ب حـ تساوى ١,٥ وحدة مساحة فإن : ك = ...

(أ) ١ فقط. (ب) ٢ فقط. (جـ) ١ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٣

(٥٥) إذا كانت النقط (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٩) ، (٩ ، ٤) ثلاثة رؤوس لمتوازى الأضلاع فإن مساحة متوازى الأضلاع = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٧٦ (د) ٣٠٤



(٥٦) إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٥ وحدة مساحة حيث أ (١ ، −١) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (س$_1$ ، ص$_1$)
وكانت حـ تقع على المستقيم ٣ س + ص − ٤ ك = ٠ فإن : ك $\ni$ ....

(أ) {−٣ ، −٢} (ب) {−٣ ، ٢} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٣ ، ٢}

(٥٧) إذا كان : أ (١ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (٣ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)
فإن مساحة الشكل الرباعى أ و ب حـ = ... وحدة مساحة.

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥

(٥٨) مساحة المثلث المحصور بين المستقيمات ل$_1$: س + ص = ٣ ، ل$_2$: ٢ س + ص = −٥
، ومحور السينات يساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ٣٠ (ب) $\frac{١٢١}{٤}$ (جـ) $\frac{١٢٥}{٤}$ (د) $\frac{١٣٧}{٧}$

(٥٩) لكى يكون لنظام المعادلات أ$_1$ س + ب$_1$ ص = حـ$_1$ ، أ$_2$ س + ب$_2$ ص = حـ$_2$
حل وحيد يجب أن يكون ....

(أ) $\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} = ٠$ (ب) $\begin{vmatrix} حـ_1 & ب_1 \\ حـ_2 & ب_2 \end{vmatrix} = ٠$

(جـ) $\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} \neq ٠$ (د) $\begin{vmatrix} حـ_1 & ب_1 \\ حـ_2 & ب_2 \end{vmatrix} \neq ٠$

(٦٠) إذا كان : $\frac{١}{أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1} \begin{pmatrix} ب_2 & -ب_1 \\ -أ_2 & أ_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

فإن مجموعة حل نظم المعادلات : $\left\{ \begin{matrix} أ_1 س + ب_1 ص = ٥ \\ أ_2 س + ب_2 ص = ٢ \end{matrix} \right.$ هى ....

(أ) {(١ ، −١)} (ب) {(١)} (جـ) {(−١ ، ١)} (د) {(١ ، ١)}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} -\frac{٣}{٤} & \frac{٢}{٣} \\ -١ & \frac{٨}{٩} \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} أ + س & أ \\ ب + ص & ب \end{vmatrix}$ (٤) $\begin{vmatrix} س + ١ & س^٢ + ١ \\ ص + ١ & ص^٢ + ١ \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} ١ & قا \theta \\ قا \theta & ظا^٢ \theta \end{vmatrix}$ (٦) $\begin{vmatrix} \frac{١}{حتا \theta} & ١ + ظا^٢ \theta \\ ١ & \frac{١}{حتا \theta} \end{vmatrix}$

٢ أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ٢ س & -١ \\ ٢ & ٣ س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٦ س \\ س & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} قا \theta & ظا^٢ \theta \\ ١ & قا \theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix} = ١$

٣ إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix} = ٣$ فاحسب قيمة كل من :

(١) $\begin{vmatrix} ٢ س & ٥ ص \\ ٢ ع & ٥ ل \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} س - ص & ٤ ص \\ ع - ل & ٤ ل \end{vmatrix}$

---

٤ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٤ \\ ٠ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$ (٤) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ + ت \\ ٠ & ١ & ت \\ ١ - ت & - ت & ١ \end{vmatrix}$ (حيث $ت^٢ = -١$)

---

٥ حل كلًا من المعادلات الآتية :

(١) $\begin{vmatrix} ٣ س & -٤ \\ ٢ & ٢ - س \end{vmatrix} = -١$ «-١ أ ، ٣»

(٢) $\begin{vmatrix} س^٢ - ١ & س + ١ \\ س + ١ & س^٢ - ١ \end{vmatrix} =$ صفر «-١ أ ، صفر أ ، ٢»

(٣) $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & س \\ س & ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ «٨ أ ، -٢»

(٤) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & س \\ س & ١ & ٠ \\ ١ & س + ٣ & ٣ \end{vmatrix} =$ صفر «-٥ أ ، ٠ أ ، ٢»

(٥) $\begin{vmatrix} جا ٢٠° & جا ٧٠° \\ - جتا ٢٠° & جتا ٧٠° \end{vmatrix} = ٢ س - ٣$ «٢»

---

٦ أوجد قيمة س التى تجعل : $\begin{vmatrix} ٣ س & ١ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ يساوى ثلاثة أمثال $\begin{vmatrix} -١ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ -١ & س & ٧ \end{vmatrix}$ «$\frac{-١١}{٣}$»

---

٧ أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث :

(١) أ (٢ ، ٤) ، ب (-٢ ، ٤) ، حـ (٠ ، -٢) «١٢ وحدة مربعة»

(٢) س (٣ ، ٣) ، ص (-٤ ، ٢) ، ع (١ ، -٤) «$٢٣\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة»

---

٨ باستخدام المحددات أثبت أن كلًا من النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

(١) (٣ ، ٥) ، (٤ ، -١) ، (٥ ، -٧) (٢) (٣ ، ٢) ، (-١ ، ٠) ، (-٥ ، -٢)

---

٩ حل كل نظام من المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر :

(١) س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ٨ «-١ ، ٢»

(٢) س + ٢ ص = ٠ ، ٢ س − ٣ ص = ١ «$\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-١}{٧}$»

(٣) ٣ س = ١ − ٤ ص ، ٥ س + ١٢ = ٧ ص «−١ ، ١»

١٠ حل كل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر :

(١) ٢ س + ص − ٢ ع = ١٠ ، ٣ س + ٢ ص + ٢ ع = ١
، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٤ «١ ، ٢ ، −٣»

(٢) س + ٢ ص − ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص − ٤ ع = ٢
، ٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٤ «٢ ، ٢ ، صفر»

(٣) ص + ٢ س + ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص + ع = −٣
، س − ٢ ص + ٢ ع = −١١ «$\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٦٥}{١٢}$ ، $\frac{-١١}{١٢}$»

(٤) س + ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ٢ س + ٥ ص = ٣ ، ٣ ص + ع = ٤ «−١ ، ١ ، ١»

(٥) س − ص = ٥ ، ع − ص = ٨ ، س + ص + ع = ٤ «٢ ، −٣ ، ٥»

(٦) ٣ س + ع = ٧ − ٢ ص ، ٥ ص + ٣ ع = ٤ − س ، س = ٢ ص − ع − ١ «٢ ، ١ ، −١»

(٧) س + ص = ٥ − ٣ ع ، ص = ع ، ٢ س − ٤ ع = −٢ «١ ، ١ ، ١»

١١ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٦ & أ ب & أ حـ \\ ٧ & ب ء & ء حـ \end{vmatrix}$ «صفر»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} حتا θ & حا θ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} حتا θ & -١ \\ حا θ & ١ \end{pmatrix}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{π}{٢}$[
وكان | أ × ب | = $\frac{١}{٢}$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{π}{١٢}$ (ب) $\frac{π}{٦}$ (جـ) $\frac{π}{٤}$ (د) $\frac{π}{٣}$

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٣ + حا θ & ١ \\ ٤ & حا θ \end{vmatrix}$ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π[فإن : θ = ...

(أ) π (ب) $\frac{π}{٢}$ (جـ) $\frac{π}{٣}$ (د) $\frac{π}{٤}$

(٣) حل المعادلة : $\begin{vmatrix} حا س & ٠ & ٠ \\ حتا س & قتا س & ٠ \\ قا س & ظتا س & ظا س \end{vmatrix}$ = ١ حيث ٠° ≤ س < ٣٦٠° هو ....

(أ) ٤٥° أ ، ١٣٥° (ب) ١٣٥° أ ، ٢٢٥° (جـ) ٤٥° أ ، ٢٢٥° (د) ٤٥° أ ، ٣١٥°

(٤) النقط أ (-١ ، ٥) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (٣ ، ١) ....

(أ) رؤوس مثلث قائم الزاوية مساحته ٥ وحدات مربعة.

(ب) رؤوس مثلث متساوى الساقين مساحته ١٠ وحدات مربعة.

(جـ) رؤوس مثلث متساوى الأضلاع مساحته ٩ وحدات مربعة.

(د) تقع على استقامة واحدة.

(٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{ل} + \frac{1}{\text{ل}} & 1 \\ 1 & \text{ل} + \frac{1}{\text{ل}} \end{vmatrix} = 15$ فإن : $\text{ل}^{2} + \frac{1}{\text{ل}^{2}} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) ١٣

(٦) عدد قيم س الصحيحة التى تجعل قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5\text{س} + 14 & -2 \\ 7\text{س} + 8 & \text{س} \end{vmatrix} \leq 1$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

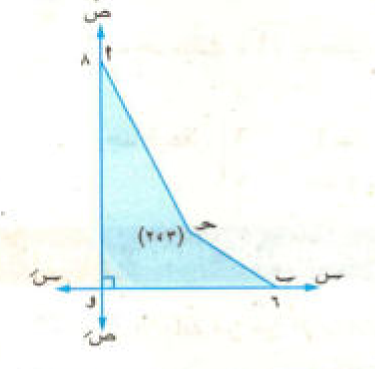
(٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ جاس} & 0 & 0 \\ 1 & \text{أ جتاس} & 0 \\ \text{قاس} & \text{ظتاس} & \text{أ ظاس} \end{vmatrix} = -\text{أ}^{3}\ \text{جتا}^{2}\text{س} + 8$ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) -٢ (جـ) -٨ (د) ٢


٢ فى الشكل المقابل :

أوجد مساحة الشكل المظلل

مستخدمًا المحددات.



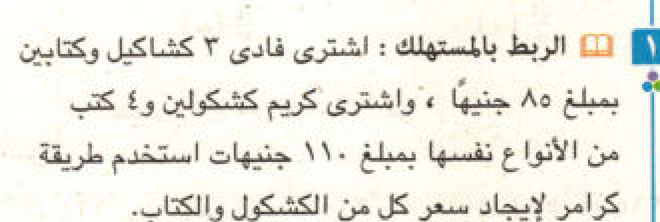
«١٨ وحدة مربعة»

٣ باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :

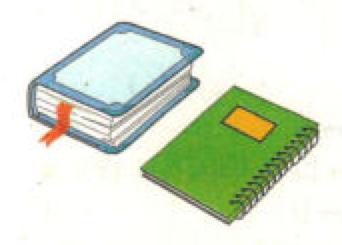
$\begin{vmatrix} 2 & \text{ص} \\ 1 & \text{س} \end{vmatrix} = 1$ ، $\begin{vmatrix} 3 & \text{ع} \\ 2 & \text{ص} \end{vmatrix} = 1$ ، $\begin{vmatrix} 3 & \text{س} \\ 1 & \text{ع} \end{vmatrix} = 2$

«١ ، ١ ، ١»

تطبيقات حياتية



١ الربط بالمستهلك : اشترى فادى ٣ كشاكيل وكتابين بمبلغ ٨٥ جنيهًا ، واشترى كريم كشكولين و٤ كتب من الأنواع نفسها بمبلغ ١١٠ جنيهات استخدم طريقة كرامر لإيجاد سعر كل من الكشكول والكتاب.



«١٥ جنيهًا ، ٢٠ جنيهًا»



الدرس 5

المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين مربعتين على النظم ٢ × ٢

وكان : $\text{أ ب} = \text{ب أ} = I$ حيث I مصفوفة الوحدة على النظم ٢ × ٢

فإن : المصفوفتين أ ، ب كلًا منهما معكوس ضربى للآخر.

فمثلًا إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{-3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{-3}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ، $\text{ب أ} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{-3}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

أى أن $\text{أ ب} = \text{ب أ} = I$

∴ المصفوفتان أ ، ب كل منهما معكوس ضربى للآخر.

ملاحظة

إذا كان المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ، المصفوفة $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

فإن المصفوفة أ ليست معكوس ضربى للمصفوفة ب

على الرغم من أن : $\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

وذلك لأن المصفوفة أ ، **المصفوفة ب ليست مربعة.**

المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ

الذى يرمز له بالرمز $أ^{-1}$ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد أ = Δ ≠ ٠ ويكون :

$$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$$ **حيث** $أ أ^{-1} = أ^{-1} أ = I$

مثال ١

أوجد المعكوس الضربي إذا كان له وجود لكل من المصفوفتين الآتيتين :

١ $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ٢ $ب = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

الحل

١ ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = (-٢)(-٤) - (٣)(٢) = ٢$ ∴ Δ ≠ ٠ ∴ للمصفوفة أ معكوس ضربى.

$$∴ أ^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & -١ \end{pmatrix}$$

٢ ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = (\frac{١}{٢})(١٢) - (٢)(٣) = ٠$ ∴ $ب^{-1}$ غير معرف (ليس له وجود)

حاول بنفسك

أوجد إن أمكن المعكوس الضربي للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

مثال ٢

أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل للمصفوفة أ فى كل مما يأتى معكوسًا ضربيًا :

١ $أ = \begin{pmatrix} س & ٣ \\ ١٢ & س \end{pmatrix}$ ٢ $أ = \begin{pmatrix} س - ١ & ٤ \\ ٣ & س - ٢ \end{pmatrix}$

الحل

١ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى إذا كان : |أ| = ٠

أى عندما $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ١٢ & س \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $س^٢ - ٣٦ = ٠$ ∴ س = ± ٦

∴ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى عند س = ± ٦

∴ يكون للمصفوفة أ معكوس ضربى عندما س ∈ ح - {-٦ ، ٦}

٢ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى إذا كان $|أ| = ٠$

أى عندما $\begin{vmatrix} س - ١ & ٤ \\ ٣ & س - ٢ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $(س - ١)(س - ٢) - ١٢ = ٠$

∴ $س^٢ - ٣س + ٢ - ١٢ = ٠$ ∴ $س^٢ - ٣س - ١٠ = ٠$

∴ $(س - ٥)(س + ٢) = ٠$ ∴ $س = ٥$ أ، $س = -٢$

∴ المصفوفة أ لا يكون لها معكوس ضربى عندما $س = ٥$ أ، $س = -٢$

∴ المصفوفة أ يكون لها معكوس ضربى عندما $س \in ح - \{٥ ، -٢\}$

حاول بنفسك

أوجد قيم س الحقيقية التى تجعل للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} س - ١ & ٤ \\ ٢ & س + ١ \end{pmatrix}$ معكوسًا ضربيًا.

مثال ٣

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن :

١ $(أ^{-١})^{-١} = أ$ ٢ $(أ ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

الحل

١ ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١)(٤) - (٣)(٢) = -٢$ ∴ $\Delta \neq ٠$

∴ $أ^{-١}$ له وجود (معرف) ، ∵ $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$ حيث : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{pmatrix}$

، ∵ $|أ^{-١}| = \begin{vmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{vmatrix} = (-٢)(\frac{-١}{٢}) - (\frac{٣}{٢})(١) = \frac{-١}{٢} \neq ٠$ ∴ $(أ^{-١})^{-١}$ له وجود.

∴ $(أ^{-١})^{-١} = \frac{١}{\frac{-١}{٢}} \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = -٢ \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} = أ$

٢ ∵ $أ ب = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٢ \\ -٨ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ $|أ ب| = \begin{vmatrix} -٧ & ٢ \\ -٨ & ٢ \end{vmatrix} = (-٧)(٢) - (٢)(-٨) = ٢ \neq ٠$ ∴ $(أ ب)^{-١}$ له وجود.

∴ $(أ ب)^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٨ & -٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & \frac{-٧}{٢} \end{pmatrix}$ (١)

، ∵ $|ب| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = (٢)(١) - (-١)(-٣) = -١$ ∴ $ب^{-١}$ له وجود.

$\therefore ب^{-1} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $\because أ^{-1} = \begin{pmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

$\therefore ب^{-1} أ^{-1} = \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & -\frac{٧}{٢} \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(أ ب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$

حاول بنفسك

باستخدام المصفوفتين أ ، ب فى المثال السابق أثبت أن : $(أ^{-1} ب)^{-1} = ب^{-1} أ$

ملاحظة

إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ بحيث $|أ| \neq ٠$ ، ج مصفوفة أخرى وكان :

١ $أ س = ج$ فإن : $س = أ^{-1} ج$

وذلك : بضرب طرفى المعادلة × $أ^{-1}$

$\therefore أ^{-1} أ س = أ^{-1} ج$ $\therefore I س = أ^{-1} ج$ $\therefore س = أ^{-1} ج$

٢ $س أ = ج$ فإن : $س = ج أ^{-1}$

لاحظ أن

* $أ^{-1} أ = I$ ، $I س = س$
* $|أ^{-1}| = \frac{١}{|أ|}$

مثال ٤

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} \times س = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

الحل

بفرض أن : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ المعادلة هى : $أ س = ج$ $\therefore س = أ^{-1} ج$

، $\because |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix} = (٢)(٠) - (-١)(٣) = ٣ \neq ٠$

$\therefore أ^{-1} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٣} \\ -١ & \frac{٢}{٣} \end{pmatrix}$ $\therefore س = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٣} \\ -١ & \frac{٢}{٣} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

حاول بنفسك

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : $س \times \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

حل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

لحل المعادلتين الخطيتين على الصورة : $أ_١$ س + $ب_١$ ص = $حـ_١$ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $حـ_٢$

آنيًا باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة نتبع الآتي :

١ نكتب المعادلتين على صورة المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} حـ_١ \\ حـ_٢ \end{pmatrix}$$ أى على الصورة $أ\,س = ج$

حيث $أ = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات

، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجاهيل ، $ج = \begin{pmatrix} حـ_١ \\ حـ_٢ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت.

٢ نوجد حل المعادلة المصفوفية : $أ\,س = ج$ فيكون $س = أ^{-١}\,ج$

ومن ذلك يمكن استنتاج قيم المجهولين س ، ص

مثال ٥

حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

١ ٢ س + ٣ ص = ٧ ، س − ص = ١

٢ س = ٢ ص − ١ ، ٣ ص = ٢ س

الحل

١ المعادلة المصفوفية هى : $أ\,س = ج$ حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} ، س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} ، ج = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\because \Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (٢)(-١) - (٣)(١) = -٥ \neq ٠$$

∴ للمصفوفة أ معكوس ضربى هو $أ^{-١}$ ∴ $أ^{-١} = \frac{١}{-٥}\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}$

، ∵ $س = أ^{-١}\,ج$ ∴ $س = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ ∴ س = ٢ ، ص = ١ وتكون مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

٢ س − ٢ ص = −١ ، ٢ س − ٣ ص = ٠

المعادلة المصفوفية هى : $أ\,س = ج$ حيث : $أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\because \Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = (١)(-٣) - (-٢)(٢) = ١ \neq ٠$ $\therefore$ $أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

، $\because$ س = $أ^{-١}$ ج $\therefore$ س = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ $\therefore$ س = ٣ ، ص = ٢ وتكون مجموعة الحل = {(٣ ، ٢)}

حاول بنفسك

حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة : س + ٢ ص = ٤ ، ص = ٢ س + ٧

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = أ $س^{٢}$ + ب يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (-١ ، -٣)

استخدم المصفوفات لإيجاد قيمتى الثابتين : أ ، ب

الحل

$\because$ منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٢ ، ٠) $\therefore$ د (٢) = ٠

$\therefore$ أ × $(٢)^{٢}$ + ب = ٠ $\therefore$ ٤ أ + ب = ٠ (١)

، $\because$ منحنى الدالة د يمر بالنقطة (-١ ، -٣) $\therefore$ د (-١) = -٣

$\therefore$ أ × $(-١)^{٢}$ + ب = -٣ $\therefore$ أ + ب = -٣ (٢)

ولحل المعادلتين (١) ، (٢) نكتب المعادلة المصفوفية :

أ س = ج حيث : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix}$

فيكون س = $أ^{-١}$ ج

، $\because \Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٤ \times ١ - ١ \times ١ = ٣$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{pmatrix}$ $\therefore$ س = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{-١}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٤ \end{pmatrix}$ $\therefore$ أ = ١ ، ب = -٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة وسوف نقوم بعرض ذلك فى نهاية الوحدة.



تمارين 5 على المعكوس الضربى للمصفوفة

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ؟

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$

(٢) أى من المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ؟

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ س - ٤ & -٤ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

(أ) -٨ (ب) -١٠ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥) إذا كانت المصفوفة ب هى المعكوس الضربى للمصفوفة أ فإن ....

(أ) أ + ب = ▭ (ب) أ ب = I (جـ) أ ب = ▭ (د) أ = $\frac{١}{ب}$

(٦) المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ١٢ \\ ٣ & أ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى عندما ....

(أ) أ = ٦ (ب) أ = ± ٦

(جـ) أ ∈ ح - {٦} (د) أ ∈ ح - {-٦ ، ٦}

(٧) المصفوفة $\begin{pmatrix} س + ٣ & ٠ \\ ٢ & س - ٣ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى عندما س = ...

(أ) ٣ فقط (ب) ± ٣ (جـ) ٥ فقط (د) ± ٥

(٨) المعكوس الضربى للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ يساوى ....

(أ) I (ب) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \frac{-٣}{٧} & \frac{٢}{٧} \\ \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \end{pmatrix}$

(٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٣ & ٥\end{pmatrix}$ فإن : $أ^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix}٥ & ٣\\ ٢ & ١\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}١ & -٢\\ -٣ & ٥\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}٥ & -٢\\ -٣ & ١\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}-١ & ٣\\ ٢ & -٥\end{pmatrix}$

(١٠) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix}أ & ١\\ -١ & ٠\end{pmatrix}$ فإن : $س^{-١}$ = ...

(أ) س (ب) $س^{مد}$ (جـ) I (د) ☐

(١١) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix}١ & ٣\\ ٢ & ٥\end{pmatrix}$ وكانت $أ^{-١}$ = $\begin{pmatrix}-١ & ٢\\ ٣ & س\end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٥ (د) -٥

(١٢) إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين أ × ب = I وكانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix}٣ & ٢\\ ٨ & ٥\end{pmatrix}$
فإن المصفوفة ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix}٣ & ٢\\ ٨ & ٥\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}٥ & ٨\\ ٢ & ٣\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}-٣ & ٨\\ ٢ & -٥\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}٥ & -٢\\ -٨ & ٣\end{pmatrix}$

(١٣) إذا كان : $\begin{pmatrix}١ & ٤\\ ١ & ٣\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-١ & ١\\ س & -٣\end{pmatrix}$ = I فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) إذا كانت : أ × $\begin{pmatrix}٢ & ١\\ ١ & -١\end{pmatrix}$ = I فإن : ٣ أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ $\begin{pmatrix}١ & ١\\ ١ & -٢\end{pmatrix}$ (ب) ٣ $\begin{pmatrix}-٢ & ١\\ ١ & ١\end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ $\begin{pmatrix}٢ & ١\\ ١ & ١\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}-٢ & ١\\ ١ & ١\end{pmatrix}$

(١٥) إذا كانت : $أ^{-١}$ = $\begin{pmatrix}٢ & -١\\ ٣ & ١\end{pmatrix}$ ، أ ب = $\begin{pmatrix}-٢ & ٤\\ ١ & ٠\end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix}-٢ & ٤\\ ١ & ٠\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}-٤ & ٤\\ ١ & -٤\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}٤ & -٤\\ ١ & ٤\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}٤ & -٤\\ ١ & -٤\end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix}٤ & -١\\ ٣ & -٢\end{pmatrix}$ وكان أ = $أ^{-١}$ × ب فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix}٤ & -٧\\ ١ & -٤\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}٨ & -٧\\ ١ & -٤\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}-٨ & ٧\\ -١ & ٤\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}-٨ & ٧\\ ٤ & ٤\end{pmatrix}$

(١٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix}٢ & س\\ -٢ & ص\end{pmatrix}$ وكان : أ × $أ^{-١}$ = $أ^{٢}$ فإن : س × ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -٣

(١٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix}١ & ١\\ ١ & ٠\end{pmatrix}$ س = $\begin{pmatrix}س + ص & س\\ س & ٠\end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix}٠ & س\\ س & ص\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}س & س\\ ص & ٠\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}ص & س\\ س & ٠\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}ص & س\\ ص & ٠\end{pmatrix}$

(١٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢- & ١- \\ ك & ١ \end{pmatrix}$ وكان : $أ^{٢}$ = − أ فإن : ك = ... حيث ك ∋ ص

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٣

(٢٠) إذا كان : $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٦ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢١) عند حل المعادلتين : أ س + ب ص = ٥ ، حـ س + ء ص = −١ وجد أن المصفوفة $\begin{pmatrix} ب & أ \\ ء & حـ \end{pmatrix}$

معكوسها الضربى هو $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) ٩ (د) −٣

(٢٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٨ & ٥- \end{pmatrix}$ ، $أ^{-١}$ + $(أ^{مد})^{مد}$ = س فإن المصفوفة س = ...

(أ) ٤ أ (ب) ٣ I (جـ) ٦ I (د) ١٠ I

(٢٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ وكان $أ^{-١}$ + $ب^{مد}$ = $أ^{مد}$ فإن المصفوفة ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & ١- \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٥- & ١ \\ ١ & ٥- \end{pmatrix}$

(٢٤) إذا كانت : $أ^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان أ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن : ص − س = ...

(أ) ١٧ (ب) −١٧ (جـ) ٧ (د) −٧

(٢٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{١}{٤}$ (أ + $أ^{-١}$) = ...

(أ) $\begin{pmatrix} . & ١- \\ ١ & . \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} . & ١ \\ ١ & . \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & . \\ . & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣- & ٢- \end{pmatrix}$ وكان : ب = $أ^{-١}$ × $أ^{مد}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٥- & ٤ \\ ١ & ٣- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٩- & ٤ \\ ٧ & ٣- \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٣- & ٤ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٩- & ٢ \\ ٧ & ٣- \end{pmatrix}$

(٢٧) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من نفس النظم بحيث كان : أ ب = $ب^{-١}$ فإن : $أ^{-١}$ = ...

(أ) أ ب (ب) ب أ (جـ) $أ^{٢}$ (د) $ب^{٢}$

(٢٨) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان فإن : $(أ ب)^{-١}$ أ = ...

(أ) $أ^{-١}$ (ب) $ب^{-١}$ (جـ) $أ^{-١}$ $ب^{-١}$ أ (د) أ ب $أ^{-١}$

(٢٩) إذا كان : أ س ب = ج فإن : س = ...

(أ) $أ^{-1}$ ج $ب^{-1}$ (ب) أ ج ب (جـ) $ب^{-1}$ ج $أ^{-1}$ (د) $أ^{-1}$ $ب^{-1}$ ج

(٣٠) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان مربعتان بحيث | أ | ≠ ٠ ، | ب | ≠ ٠ وكان : ب = − $أ^{-1}$ ب أ

فإن : $(أ + ب)^{٢}$ = ...

(أ) $أ^{٢}$ + $ب^{٢}$ (ب) ▭ (جـ) $أ^{٢}$ + ٢ أ ب + $ب^{٢}$ (د) أ + ب

(٣١) إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ | = ١ فإن : ....

(أ) أ = − أ (ب) أ = − I (جـ) أ = $أ^{-1}$ (د) $أ^{-1}$ = − أ

(٣٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} جتا θ & -جا θ \\ جا θ & جتا θ \end{pmatrix}$ فإن :

أولًا : أ لها معكوس ضربي عندما θ ∋ ....

(أ) [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] فقط. (ب) [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] فقط. (جـ) [٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] فقط. (د) ح

ثانيًا : $أ^{-1}$ = ...

(أ) − أ (ب) $أ^{مد}$ (جـ) − $أ^{مد}$ (د) أ

(٣٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ وكان : | أ ب | = ٩ ، | أ $ب^{-1}$ | = ٤

فإن : | أ | + | ب | يمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١٣}{٢}$ (د) $\frac{١٥}{٢}$

(٣٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة $أ^{ن}$ حيث ن ∋ $ص^{+}$ هو ....

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ن & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ن \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -ن & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ن \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة بحيث | أ | ≠ ٠ وكان $أ^{٢}$ = I فإن : $أ^{-1}$ = ...

(أ) ▭ (ب) أ (جـ) ٢ أ (د) أ + I

(٣٦) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث | أ | ≠ ٠ وكان : $أ^{٥}$ = I فإن : $أ^{-1}$ = ...

(أ) $أ^{٢}$ (ب) $أ^{٣}$ (جـ) $أ^{٤}$ (د) أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بين المصفوفات التى لها معكوسات ضربية والمصفوفات التى ليس لها معكوسات ضربية فيما يلى وأوجد المعكوس إن وجد :

(١) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} س & -ص \\ س & -ص \end{pmatrix}$ حيث س ص ≠ ٠

٢ ما قيم أ الحقيقية التي تجعل لكل من المصفوفات الآتية معكوسًا ضربيًا :

(١) 📖 $\begin{pmatrix} أ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ (٢) 📖 $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} أ & ٤ \\ ٣ & أ - ١ \end{pmatrix}$

(٤) 📖 $\begin{pmatrix} أ - ١ & -٢ \\ ١ & أ - ٢ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ٨ & أ - ٣ \\ أ + ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} أ & ت \\ ت & -١ \end{pmatrix}$ حيث $ت^{٢} = -١$

٣ أوجد قيم س الحقيقية التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٢٧ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي. «±٩»

٤ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : المصفوفة ب معكوس ضربي للمصفوفة أ

٥ 📖 إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $س^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

٦ 📖 إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $ب^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$ علمًا بأن : س ص ≠ ٠

٧ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن :

(١) 📖 $(س ص)^{-١} = ص^{-١} س^{-١}$ (٢) $(س^{-١})^{-١} = س$ (٣) $(س^{-١} ص)^{-١} = ص^{-١} س$

٨ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $(أ^{مد})^{-١} = (أ^{-١})^{مد}$

٩ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & س \\ ص & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : س ص = ٧ أثبت أن : $أ + أ^{-١} = ٦ I$

١٠ 📖 إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $أ ب = I$ فأوجد : المصفوفة أ

١١ أوجد المصفوفة أ في كل مما يأتي :

(١) 📖 $أ \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

١٢ 📖 إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $أ ب = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ فأوجد : المصفوفة ب

١٣ إذا كان : $(أ ب)^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ وكانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد : $ب^{-١}$

١٤ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

(١) ٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣

(٢) ٢ س - ٧ ص = ٣ ، س - ٣ ص = ٢

(٣) ٣ س + ٢ ص - ١ = ٠ ، س = ٣ ص - ٧

(٤) $\frac{١}{٢}$ س - ص = -١ ، س + $\frac{١}{٢}$ ص = ٥

---

١٥ باستخدام المصفوفات أوجد عددين مجموعهما ١٠ والفرق بينهما ٤ «٧ ، ٣»

---

١٦ نصف الفرق بين عددين هو ٢ ومجموع العدد الأكبر وضعف الأصغر هو ١٣ باستخدام المصفوفات أوجد العددين. «٧ ، ٣»

---

١٧ إذا كان : ٣ ، -١ هما جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب س - ٣ = ٠

فاستخدم المصفوفات فى إيجاد قيمتى الثابتين : أ ، ب «١ ، -٢»

---

١٨ يمر المنحنى : ص = أ س^{٢} + ب س بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٨)

استخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين : أ ، ب «٢ ، -٦»

---

١٩ الخط المستقيم الذى معادلته : ص + أ س = حـ يمر بالنقطتين (١ ، ٥) ، (٢ ، ١)

استخدم المصفوفات لإيجاد قيمة كل من الثابتين : أ ، حـ «٤ ، ٩»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٢ × ٢ فإن : أ$^{-١}$ تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٢) إذا كان : أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣ فإن : أ$^{-١}$ تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٣) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : أ = ٣ أ$^{-١}$ فإن : س + ص = ...

(أ) -٣ (ب) -٥ (جـ) -٧ (د) -٩

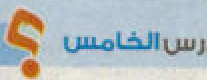
(٤) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & \text{طا}\,\theta \\ -\text{طا}\,\theta & ١ \end{pmatrix}$ حيث θ زاوية حادة فإن :

أولًا : س$^{-١}$ = ...

(أ) حتا^{٢} θ س (ب) حتا^{٢} θ س^{مد} (جـ) قا^{٢} θ س (د) قا^{٢} θ س^{مد}

ثانيًا : إذا كان : س^{مد} س$^{-١}$ = I فإن : θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$



(٥) إذا كانت س مصفوفة مربعة بحيث كان $س^٢ + ٥ س + ٥ I = $ ☐ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة (س + ٢ I) يساوى ....

(أ) س − ٢ I (ب) س + ٣ I (جـ) س + ٢ I (د) س − ٣ I

(٦) إذا كان : $أ^٢ - أ + I = $ ☐ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ هى ....

(أ) أ (ب) أ − I (جـ) I − أ (د) أ + I

(٧) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين على النظم ٢ × ٢ فأى مما يأتى دائمًا صحيح ؟

(١) إذا كان : أب = ☐ فإن : أ = ☐ أو ب = ☐

(٢) إذا كان : أب = I فإن : $أ = ب^{-١}$

(٣) $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ أب + ب^٢$

(أ) (١) ، (٢) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (٢) فقط.

(٨) إذا كانت أ مصفوفة مربعة وكان $أ = أ^{-١}$ فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(١) $أ^٢ = I$ (٢) |أ| = ١ (٣) أ مصفوفة قطرية.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

تطبيقات حياتية



١ **معرض الكتاب :** ذهبت هدى ومريم إلى معرض القاهرة الدولى للكتاب ، فاشترت هدى من إحدى المكتبات ٥ كتب علمية و ٤ كتب تاريخية ودفعت ثمنًا لهم مبلغ ١٢٠ جنيهًا ، واشترت مريم من نفس المكتبة ٥ كتب علمية ، ١٠ كتب تاريخية ، ودفعت ثمنًا لهم مبلغ ١٥٠ جنيهًا ، فإذا كانت الكتب العلمية لها نفس الثمن ، وكذلك الكتب التاريخية لها نفس الثمن ، استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر كل من الكتاب العلمي والكتاب التاريخي. «٢٠ ، ٥»

٢ **الربط بالمستهلك :** اشترت أمل ٨ كجم من الدقيق ، ٢ كجم من الزبد ، بمبلغ ١٤٠ جنيهًا ، واشترت صديقتها ريم ٤ كيلو جرامات من الدقيق ، ٣ كيلو جرامات من الزبد بمبلغ ١٧٠ جنيهًا ، استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر الكيلو جرام الواحد من كلا النوعين. «٥ ، ٥٠»

٣ **الربط بالحياة :** يشترى سائق دراجة بخارية ٢٤ لترًا من البنزين و ٥ لترات من الزيت بمبلغ ٥٦ جنيهًا لتموين دراجته ، بينما يشترى سائق دراجة بخارية أخرى ١٨ لترًا من البنزين ، ١٠ لترات من الزيت بمبلغ ٦٧ جنيهًا لتموين دراجته ، استخدم المصفوفات فى إيجاد ثمن كل من لتر البنزين ولتر الزيت ، إذا علمت أنهما يستخدمان نفس النوعية من البنزين والزيت. «$١\frac{١}{٢}$ ، ٤»



على الوحدة الأولى

استخدام الآلة الحاسبة العلمية فى المصفوفة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية التى تدعم المصفوفات فى العديد من العمليات التى تتعلق بالمصفوفات مثل :

* إيجاد مدور المصفوفة.
* إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
* إيجاد قيمة محدد المصفوفة.
* إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة.

وما نعرضه هنا سيكون باستخدام الآلة من النوع (*CASIO fx-991ES PLUS*)

أولًا : إدخال المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٧ & ٠ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$:

• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالى من اليسار إلى اليمين : MODE 6 1 5

وذلك لاختيار مصفوفة من النظم ٢ × ٢

ثم أدخل عناصر المصفوفة أ بالضغط على الأزرار بالتتابع التالى :

إدخال عناصر الصف الأول: (-) 7 = 0 =

إدخال عناصر الصف الثانى: 4 = 7 =

ثانيًا : إدخال المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$:

• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالى من اليسار لليمين : SHIFT [MATRIX] 4 2 2 5

لاختيار مصفوفة أخرى من النظم ٢ × ٢

ثم أدخل عناصر المصفوفة ب بالضغط على الأزرار بالتتابع التالى :

إدخال عناصر الصف الأول: (-) 8 = 4 =

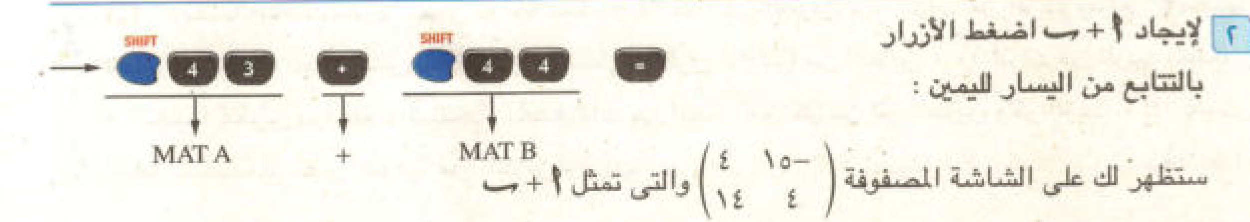
إدخال عناصر الصف الثانى: 0 = 7 = AC

وهكذا نكون أدخلنا المصفوفتين أ ، ب ويمكن إجراء بعض العمليات عليهما كالتالى :

١ لإيجاد أ^{مد} اضغط الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :

SHIFT 4 8 (لاختيار أمر Trn (مدور)) SHIFT 4 3 (لاختيار MAT A (مصفوفة أ)) =

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -٧ & ٤ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ التى تمثل أ^{مد}



٢ لإيجاد أ + ب اضغط الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :

SHIFT 4 3 (MAT A) + SHIFT 4 4 (MAT B) =

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١٥ & ٤ \\ ٤ & ١٤ \end{pmatrix}$ والتى تمثل أ + ب

٣ لإيجاد أب اضغط الأزرار بالتتابع

SHIFT 4 3 × SHIFT 4 4 = ←

MAT A × MAT B

من اليسار لليمين :

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٥٦ & -٢٨ \\ -٣٢ & ٦٥ \end{pmatrix}$ والتى تمثل أب

٤ لإيجاد قيمة محدد المصفوفة أ اضغط الأزرار

SHIFT 4 7 SHIFT 4 3 = ←

Det لاختيار أمر (محدد) ، MAT A لاختيار (مصفوفة أ)

بالتتابع من اليسار لليمين :

سيظهر لك على الشاشة -٤٩ والذى يمثل قيمة محدد المصفوفة أ

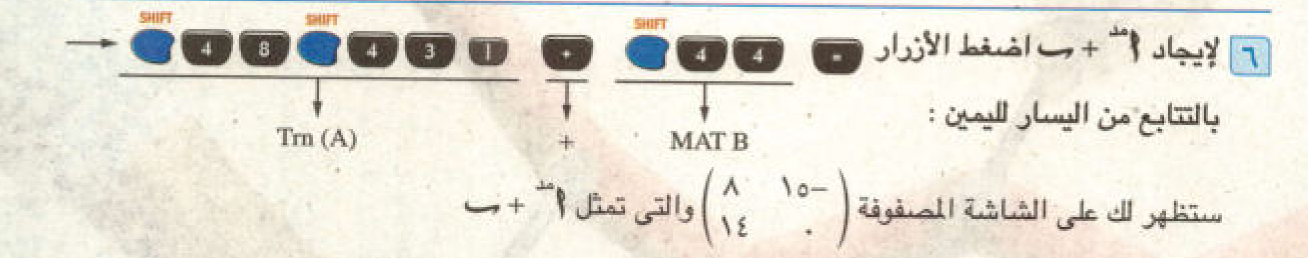
٥ لإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ اضغط

SHIFT 4 3 x^{-1} = ←

MAT A لاختيار (مصفوفة أ)

الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -\frac{١}{٧} & ٠ \\ \frac{٤}{٤٩} & \frac{١}{٧} \end{pmatrix}$ والتى تمثل المعكوس الضربى للمصفوفة أ



٦ لإيجاد $أ^{مد}$ + ب اضغط الأزرار

SHIFT 4 8 SHIFT 4 3) + SHIFT 4 4 = ←

Trn (A) + MAT B

بالتتابع من اليسار لليمين :

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١٥ & ٨ \\ ٠ & ١٤ \end{pmatrix}$ والتى تمثل $أ^{مد}$ + ب

حاول بنفسك

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل مما يأتى :

$ب^{مد}$ ، أ - ب ، ب أ ، محدد ب ، $ب^{-١}$ ، أ + $ب^{مد}$ ، $أ^{مد}$ ب ، ب $أ^{مد}$

الوحدة الثانية

البرمجة الخطية



دروس الوحدة

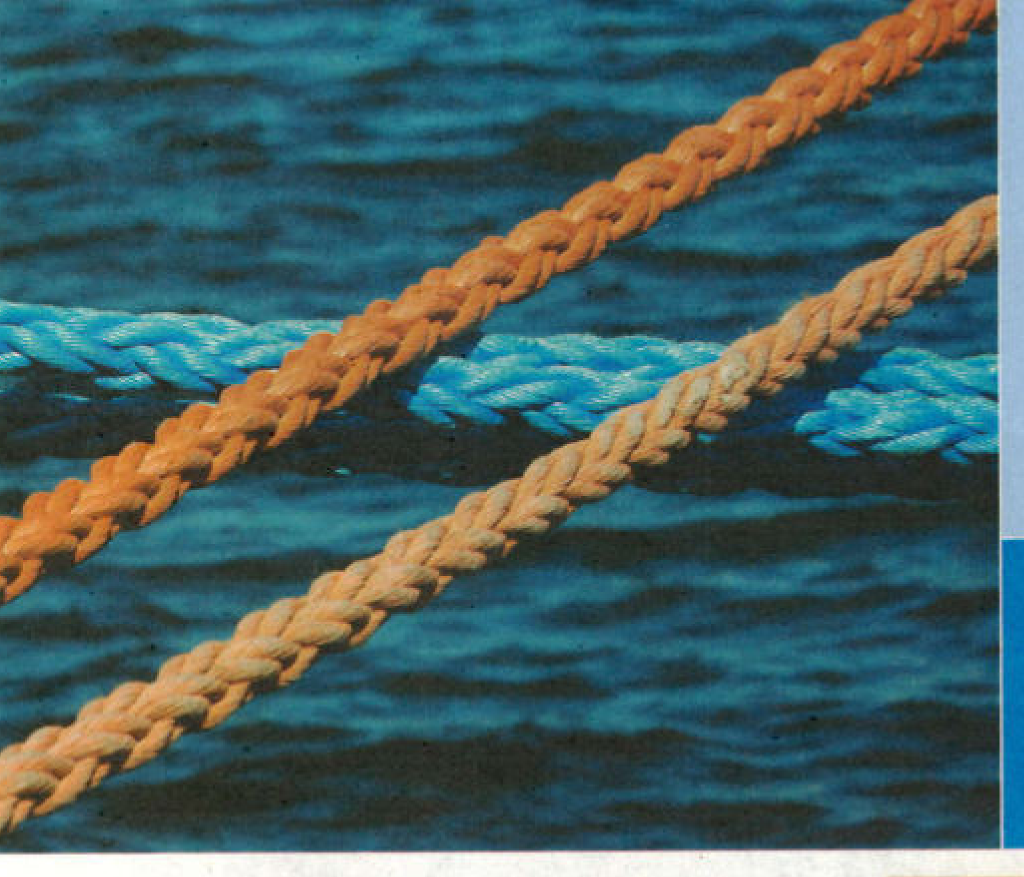
الدرس 1 المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا.

الدرس 2 البرمجة الخطية والحل الأمثل.

نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًا.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى فى مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًا.
- يحل نظامًا من المتباينات الخطية بيانيًا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية فى حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية فى جدول مناسب ، ويترجم البيانات لها فى صورة متباينات خطية ، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات ، مع تحديد النقط التى تنتمى إلى مجموعة الحل وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.



الدرس

1

المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيا

تذكر خواص علاقة التباين فى ح :

بفرض أن أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية :

- إذا كان : أ ≥ ب فإن : أ + حـ ≥ ب + حـ سواء كانت حـ موجبة أو سالبة
- إذا كان : أ ≥ ب فإن : أ حـ ≥ ب حـ إذا كانت حـ موجبة
- إذا كان : أ ≥ ب فإن : أ حـ ≤ ب حـ إذا كانت حـ سالبة

- يمكنك استنتاج الخواص السابقة فى حالة علامات التباين الأخرى «≤ ، > ، <»

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد بيانيًا

* كل من المتباينات : ٣ س > ٥ ، ٤ - س ≤ ٢ س ، ٢ ≥ س > ٦ تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد.

* حل المتباينة معناه إيجاد جميع عناصر مجموعة التعويض التى تحقق المتباينة.

* وقد تكون مجموعة التعويض هى ح أو ح × ح

، وفيما يلى نوضح كيفية حل المتباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى كلتا الحالتين.

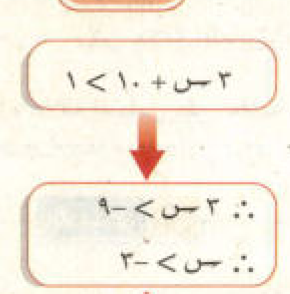
مثال توضيحى

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ١٠ > ١

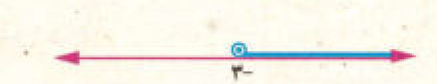
[١] إذا كانت مجموعة التعويض هى ح

[٢] إذا كانت مجموعة التعويض هى ح × ح

الحـل

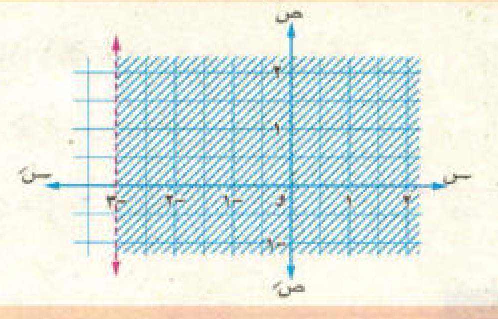


١ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح تمثل مجموعة الحل على خط الأعداد



- مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من −٣
- مجموعة الحل تمثل الجزء من خط الأعداد الذى يقع يمين العدد −٣
- وجود حلقة مفرغة عند −٣ يعنى أنها ليست متضمنة فى مجموعة الحل.

٢ إذا كانت مجموعة التعويض هى ح × ح تمثل مجموعة الحل على الشبكة التربيعية



- مجموعة الحل هى جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها السينى أكبر من −٣
- مجموعة الحل هى المنطقة التى تقع على يمين الخط المستقيم : س = −٣ (وتسمى نصف المستوى).
- رسم المستقيم س = −٣ بشكل متقطع يشير أن مجموعة نقاط هذا المستقيم ليست متضمنة فى مجموعة الحل.

مثـال ١

وضح بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٥ س − ٧ ≤ ٢ س − ١ فى ح × ح



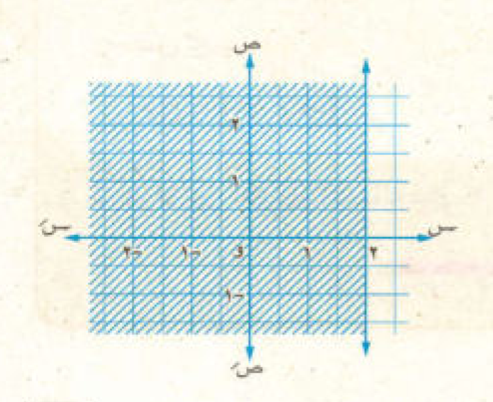
الحـل

∵ ٥ س − ٧ ≤ ٢ س − ١

∴ ٥ س − ٢ س ≤ −١ + ٧

∴ ٣ س ≤ ٦

∴ س ≤ ٢



لاحظ أن

١ المنطقة المظللة على يسار المستقيم س = ٢ لأن علاقة التباين أصغر من.

٢ المستقيم س = ٢ رسم متصلًا لاحتواء علاقة التباين على علامة التساوى أى ≥

مثال ٢

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : س − ١ ≤ ٤ س + ٥ < س + ١٧ حيث س ∈ ع

الحل

∵ س − ١ ≤ ٤ س + ٥ < س + ١٧ ∴ −١ ≤ ٣ س + ٥ < ١٧

∴ −٦ ≤ ٣ س < ١٢ ∴ −٢ ≤ س < ٤

∴ م.ح = [−٢ ، ٤[

−٣ −٢ −١ صفر ١ ٢ ٣ ٤ ٥

مثال ٣

أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينة :

٢ س − ٢ ≤ ٣ س − ١ < س + ٥ حيث س ∈ ع

الحل

بتجزئة المتباينة إلى متباينتين كالتالى :

٢ س − ٢ ≤ ٣ س − ١	٣ س − ١ < س + ٥
∴ ٢ س − ٣ س ≤ −١ + ٢	∴ ٣ س − س < ٥ + ١
∴ − س ≤ ١	∴ ٢ س < ٦
∴ س ≥ −١	∴ س < ٣
∴ م.ح = [−١ ، ∞[	∴ م.ح =]−∞ ، ٣[

∴ مجموعة حل المتباينة الأصلية = [−١ ، ∞[∩]−∞ ، ٣[= [−١ ، ٣[



حل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا

* من المعلوم أنه يمكن تمثيل

المعادلة الخطية :

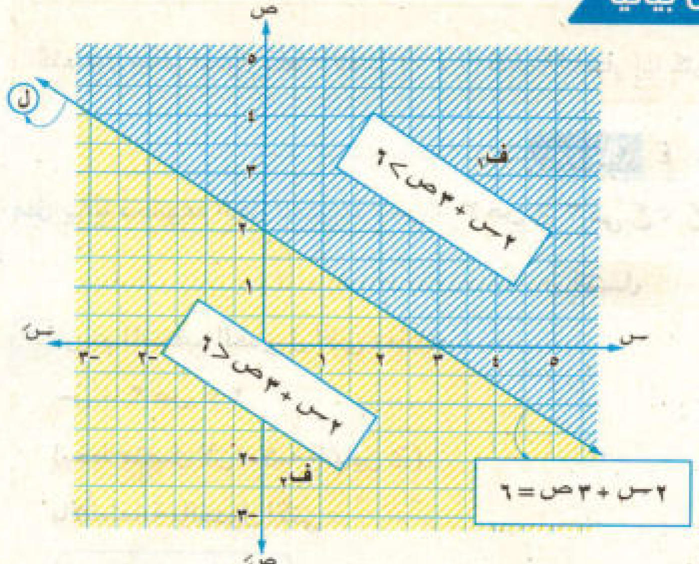
٢ س + ٣ ص = ٦ بيانيًا

بخط مستقيم كالتالى :

س	.	٣
ص	٢	.

«ويمكن أخذ زوج مرتب ثالث

للتحقق من صحة الرسم»



* نلاحظ من الرسم أن هذا المستقيم يجزئ المستوى الكارتيزى إلى ثلاث مجموعات من النقط :

١ مجموعة نقط المستقيم ل (يسمى المستقيم الحدى) والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص = ٦

٢ مجموعة نقط المستوى التى تقع على أحد جانبى المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى)

ويرمز لها بالرمز ف١ والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص > ٦

٣ مجموعة نقط المستوى التى تقع على الجانب الآخر من المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى أيضًا)

ويرمز لها بالرمز ف٢ والتى كل منها يحقق أن : ٢ س + ٣ ص < ٦

ونستطيع من التوضيح السابق أن نستنتج أن :

- نصف المستوى ف١ هو المنطقة التى تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص > ٦
- نصف المستوى ف١ بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≥ ٦
- نصف المستوى ف٢ هو المنطقة التى تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص < ٦
- نصف المستوى ف٢ بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

خطوات حل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا

١ نمثل معادلة المستقيم المرتبطة بالمتباينة

وذلك بخط متصل فى حالة علامة التباين ≤ أ، ≥ ، وبخط متقطع فى حالة علامة التباين > أ، <

٢ نحدد نصف المستوى الذى تقع فيه منطقة الحل

وذلك بأخذ أى نقطة (س١ ، ص١) تنتمى إلى أحد نصفى المستوى كنقطة اختبار ونعوض بها فى المتباينة :

- فإن حققتها كانت منطقة الحل تقع فى هذا النصف.
- وإن لم تحققها كانت منطقة الحل تقع فى نصف المستوى الآخر الذى لا تنتمى إليه نقطة الاختبار.

ملاحظة

للتسهيل يمكن اختيار نقطة الأصل (٠ ، ٠) كنقطة اختبار إذا كان المستقيم الحدى لا يمر بنقطة الأصل.

مثال ٤

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : س − ٣ ص ≤ ٣ فى ح × ح

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

س − ٣ ص = ٣

(بخط متصل لأن علامة التباين ≤)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

س	٠	٣
ص	−١	٠

٢ نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار :

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة : (لأن : ٠ ≤ ٣)

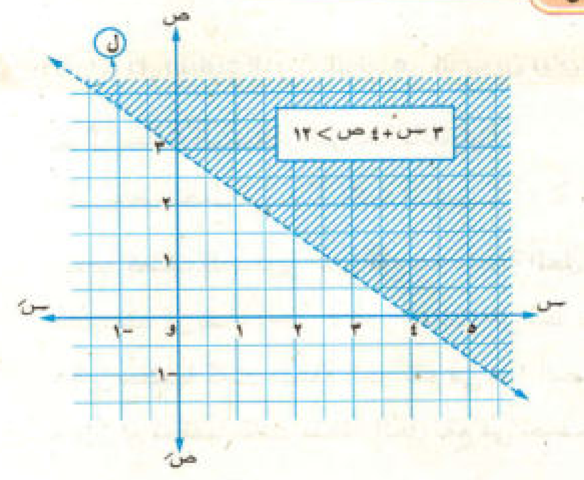
∴ مجموعة الحل للمتباينة هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

[لاحظ أنه يمكننا رسم المستقيم الحدى بدون تكوين الجدول السابق وذلك بالاستعانة بميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات كما درسنا فى الأعوام السابقة]

مثال ٥

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٣ س + ٤ ص > ١٢ فى ح × ح

الحل



١ نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

٣ س + ٤ ص = ١٢

(بخط متقطع لأن علامة التباين >)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

س	٠	٤
ص	٣	٠

٢ نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار

، ∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ١٢)

∴ مجموعة الحل للمتباينة هى نصف المسـتوى الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها المنطقة المظللة فى الشكل السابق.

ملاحظات

- المعادلة : ص = ٠ تمثل بيانيًا بمحور السينات.
- المعادلة : سـ = ٠ تمثل بيانيًا بمحور الصادات.
- المعادلة : ص = أ تمثل بيانيًا بمستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ)
- المعادلة : سـ = أ تمثل بيانيًا بمستقيم يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ٠)
- معادلة المستقيم التى على الصورة : $\frac{سـ}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ تمثل بيانيًا بمستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

حاول بنفسك

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : ٢ سـ − ٥ ص ≥ ١٠ فى ح × ح

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

لإيجاد الحل البيانى لمتباينتين نتبع الآتى :

١ نظلل المنطقة سـ$_{١}$ التى تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأولى.

٢ نظلل المنطقة سـ$_{٢}$ التى تمثل مجموعة الحل للمتباينة الثانية.

فتكون مجموعة حل المتباينتين معًا تمثلها منطقة التظليل المشتركة سـ حيث سـ = سـ$_{١}$ ∩ سـ$_{٢}$

مثال ٦

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينتين : سـ + ٢ ص ≥ ٣ ، ٢ سـ + ص ≥ ٤ فى ح × ح

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$: سـ + ٣ ص = ٣ (بخط متصل)



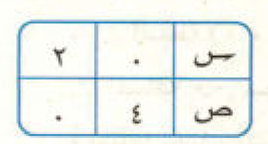
سـ	٠	٣
ص	١	٠

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٣)

∴ المنطقة سـ$_{١}$ مجموعة حل المتباينة : سـ + ٣ ص ≥ ٣

يمثلها ل$_{١}$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(١)]

٢ نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$: ٢ سـ + ص = ٤ (بخط متصل)



سـ	٠	٢
ص	٤	٠

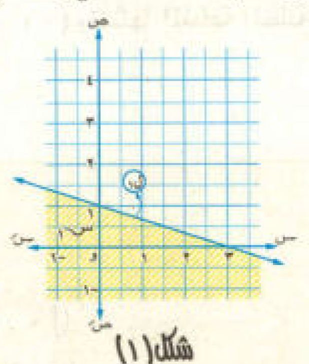
، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ < ٤)

∴ المنطقة سـ$_{٢}$ مجموعة حل المتباينة : ٢ سـ + ص ≥ ٤

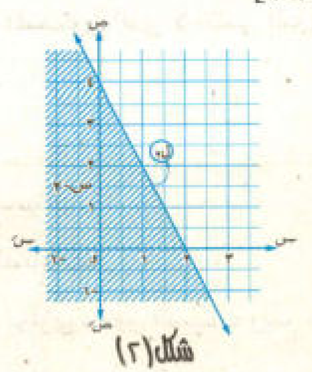
، يمثلها ل$_{٢}$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(٢)]

۳ مجموعة حل المتباينتين معًا هى : $س = س_1 \cap س_2$

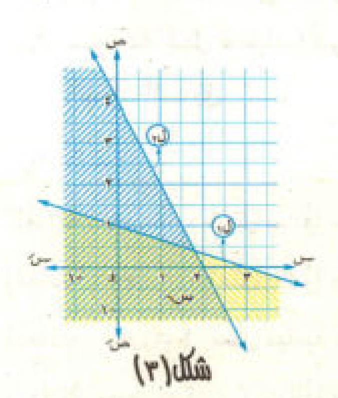
وتمثلها منطقة التظليل المشتركة [شكل(۳)]



شكل(۱)



شكل(۲)



شكل(۳)

ملاحظة

محورا الإحداثيات السينى والصادى يقسمان المستوى إلى ٤ أرباع :

الربع الأول : حيث س > ۰ ، ص > ۰

، الربع الثانى : حيث س < ۰ ، ص > ۰

، الربع الثالث : حيث س < ۰ ، ص < ۰

، الربع الرابع : حيث س > ۰ ، ص < ۰

ص

س < ۰ ، ص > ۰ | س > ۰ ، ص > ۰

س َ — س

س < ۰ ، ص < ۰ | س > ۰ ، ص < ۰

ص َ

مثال ۷

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينات :

س ≥ ۰ ، ص ≥ ۰ ، ص + ۳ س ≤ ۹ ، ص − س < ۱ فى ح × ح

الحل

۱ المتباينتان س ≥ ۰ ، ص ≥ ۰ مجموعة الحل لهما يمثلها و س ⟵ ∪ و ص ⟵ ∪ الربع الأول من المستوى.

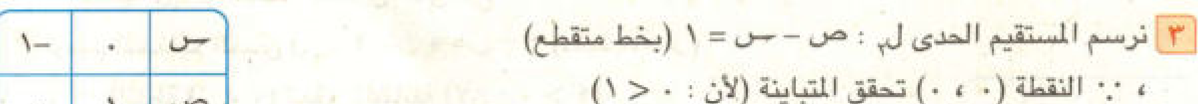
۲ نرسم المستقيم الحدى $ل_1$: ص + ۳ س = ۹ (بخط متصل)

س	۲	۳
ص	۳	۰

، ∵ النقطة (۰ ، ۰) تحقق المتباينة (لأن : ۰ < ۹)

∴ المنطقة $س_1$ مجموعة حل المتباينة : ص + ۳ س ≤ ۹

، يمثلها $ل_1$ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(۱)]



۳ نرسم المستقيم الحدى $ل_2$: ص − س = ۱ (بخط متقطع)

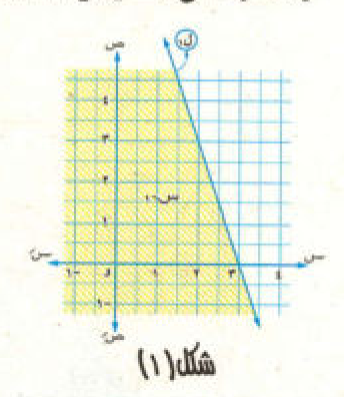
س	۰	−۱
ص	۱	۰

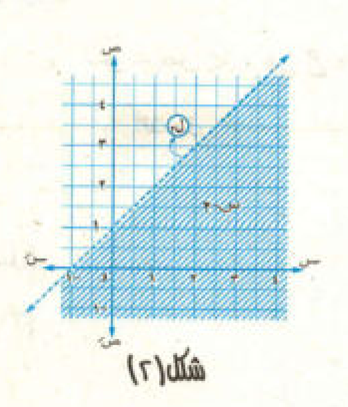
، ∵ النقطة (۰ ، ۰) تحقق المتباينة (لأن : ۰ < ۱)

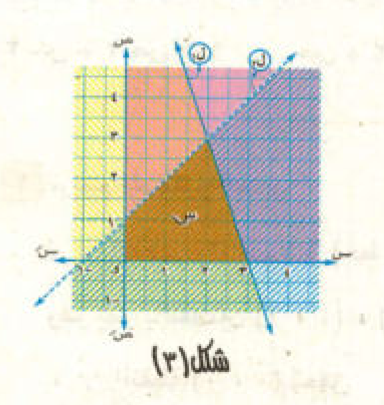
∴ المنطقة $س_2$ مجموعة حل المتباينة : ص − س < ۱

، يمثلها نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل [شكل(۲)]

٤ س مجموعة الحل للمتباينات الأربعة تمثلها المنطقة الواقعة فى الربع الأول والمشتركة فى التظليل [شكل(٣)]


شكل(١)


شكل(٢)


شكل(٣)

ملاحظة

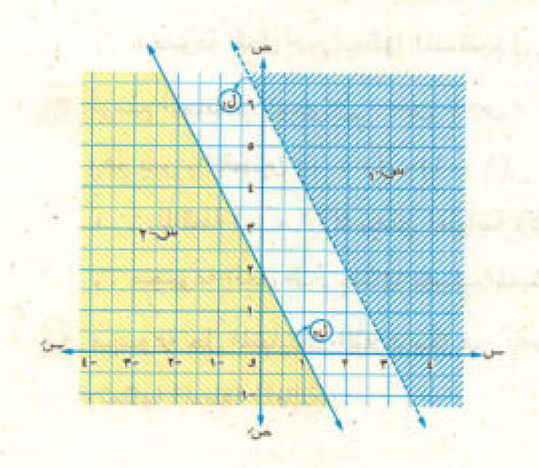
فى المثالين السابقين رسمنا رسمًا منفصلاً لتوضيح منطقة الحل لكل متباينة على حدة ثم جعلنا الشكل الأخير يوضح منطقة الحل لجملة المتباينات ويمكن للطالب بعد قليل من التمرين أن يستغنى عن هذه الأشكال ويكتفى بالشكل الأخير.

مثال ٨

مثل بيانيًا مجموعة الحل للمتباينتين :

٢ س + ص > ٦ ، ٤ س + ٢ ص ≤ ٤ فى ح × ح

الحل



١ نرسم المستقيم الحدى ل١ :

٢ س + ص = ٦ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل س١ يمثلها نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٤ س + ٢ ص = ٤

(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة.

∴ مجموعة الحل س٢ يمثلها المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ مجموعة حل المتباينتين معًا هى : س = س١ ∩ س٢ = ∅

مثال ٩

مثل بيانيًا مجموعة الحل لجملة المتباينات الآتية :

٢ س + ٢ ص ≤ ٦ ، ص + ٣ ≥ ٠ ، س − ص > ٠ في ح × ح

الحل

١ نرسم المستقيم الحدى

ل١ : ٣ س + ٢ ص = ٦ (خط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق

المتباينة (لأن : ٠ < ٦)

∴ مجموعة الحل س١ يمثلها

المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى

الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = −٣ (خط متصل)

[مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٣)]

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ > −٣)

∴ مجموعة الحل س٢ يمثلها المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ نرسم المستقيم الحدى ل٣ : س − ص = ٠ (خط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

، ∵ النقطة (٠ ، ٢) لا تحقق المتباينة (لأن : −٢ ≯ ٠)

∴ مجموعة الحل س٣ يمثلها نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٠ ، ٢)

٤ مجموعة حل المتباينات الثلاث معًا هى : س = س١ ∩ س٢ ∩ س٣

وتمثلها المنطقة المظللة.

مثال ١٠

مصنع لإنتاج لعب الأطفال ينتج لعبة على شكل سيارة وأخرى على شكل طائرة يعمل بطاقة إنتاج يومى قدرها ٢٥٠ لعبة على الأكثر فإذا كانت تكلفة إنتاج السيارة الواحدة ١٥ جنيهًا ، تكلفة إنتاج الطائرة الواحدة ١٠ جنيهات والتكلفة الإجمالية للإنتاج اليومى لا تزيد عن ٣٠٠٠ جنيه.

اكتب نظام متباينات خطية يمثل ما سبق ثم مثل بيانيًا منطقة حل هذا النظام.

الحــل

بفرض عدد السيارات المنتجة ـس سيارة ، الطائرات ص طائرة.

• **نظام المتباينات هو :**

[١] ـس ≤ ٠ [٢] ص ≤ ٠ [٣] ـس + ص ≥ ٢٥٠

[٤] ١٥ ـس + ١٠ ص ≥ ٣٠٠٠ **أى أن** ٣ ـس + ٢ ص ≥ ٦٠٠

• **تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :**

[١] المتباينتان ـس ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يمثلها و ـس ∪ و ص ∪ الربع الأول.

[٢] نرسم المستقيم الحدى ل١ : ـس + ص = ٢٥٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٥٠) ، (٢٥٠ ، ٠)

، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : ٠ > ٢٥٠)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

[٣] نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٣ـس + ٢ ص ≥ ٦٠٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣٠٠) ، (٢٠٠ ، ٠)

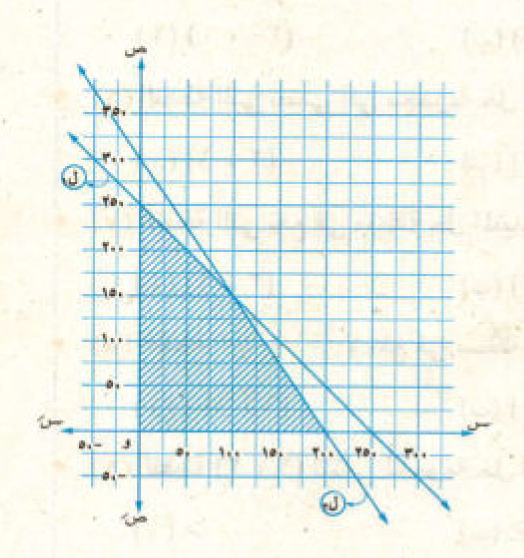
، ∵ النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

(لأن : ٠ > ٦٠٠)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها

المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى

تقع فيه نقطة الأصل.



[٤] الأزواج المرتبة التى كل من إحداثيها السينى

والصادى أعداد صحيحة بالمنطقة

المظللة بالشكل البيانى مجموعة الحل لنظام

المتباينات المطلوب.

تمارين 6 على المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيًا

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : -١ > - س ≤ ١ فى ح هى ....

(أ)]-١ ، ١[(ب) ح -]-١ ، ١[(جـ) {٠ ، ١} (د) [-١ ، ١]

(٢) مجموعة حل المتباينة : ١ ≤ ٢ س - ١ > ٥ فى ح هى ....

(أ)]١ ، ٣[(ب)]١ ، ٣] (جـ) [١ ، ٣[(د) [١ ، ٣]

(٣) الربع الذى يمثل حل نظام المتباينتين : س > ٠ ، ص > ٠ هو ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينتين : ص > ٠ ، س < ٠ فى ح × ح هى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٥) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينتين : س > ٠ ، ص < ٠ هى ....

(أ) (٠ ، -٣) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، -٣) (د) (٢ ، ٣)

(٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين : س > ٢ ، ص > ١ معًا هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٣ ، ٢)

(٧) النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة : س + ص ≤ ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (١ ، ٤)

(٨) النقطة .... لا تقع فى منطقة حل المتباينة : ٢ س + ص ≤ ٥

(أ) (-١ ، ٦) (ب) (٥ ، -١) (جـ) (١ ، ٤) (د) (٢ ، ٤)

(٩) النقطة (٣ ، ٢) تنتمى لمجموعة حل المتباينة : ٣ س - ص ١

(أ) > (ب) ≥ (جـ) < (د) أ ، ب معًا

(١٠) إذا كانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لمجموعة حل المتباينة س + ص ≥ أ فإن : ....

(أ) أ < ٥ (ب) أ ≤ ٥ (جـ) أ > ٥ (د) أ > ٠

(١١) إذا كانت : (١ ، ص) تنتمى إلى منطقة حل المتباينة : س + ٢ ص < ٧ فإن : ....

(أ) ص > ٣ (ب) ص < ٣ (جـ) ص = ٣ (د) ص < ٧

(١٢) النقطتان (٣ ، ٥) ، (١ ، ٥) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : س + ص ٨

(أ) $<$ (ب) $\leq$ (جـ) $>$ (د) $\geq$

(١٣) النقطة التى لا تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٢ ، ص ≤ ٠ ، س + ص > ٣

هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٢ ، ١)

(١٤) النقطة التى تنتمى إلى نظام حل المتباينات : س > ٢ ، ص < ١ ، س + ص ≥ ٥

هى ....

(أ) (٦ ، −٢) (ب) (١ ، −٢) (جـ) (٤ ، ٤) (د) (٣ ، −٢)

(١٥) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين : ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٣ ، −١)

(١٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل نظام المتباينات : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٤

، ٣ س + ٢ ص ≤ ٨ فى ح × ح هى ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٣)

(١٧) فى المستوى الديكارتى : المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات : ١ ≥ س ≥ ٥ ، ٢ ≥ ص ≥ ٤

تكون منطقة ....

(أ) دائرية. (ب) مربعة. (جـ) مثلثة. (د) مستطيلة.

(١٨) مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤ تمثل منطقة مثلثة رؤوسها

النقط ....

(أ) (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٤) (ب) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٤ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٤ ، ٤)

(١٩) إذا كانت س~ هى مجموعة حل المتباينة : س + ص ≥ ٥ ، ص~ هى مجموعة حل المتباينة :

س + ص > ٥ فإن : ....

(أ) س~ = ص~ (ب) س~ ⊂ ص~

(جـ) ص~ ⊂ س~ (د) س~ ∩ ص~ = ∅

(٢٠) إذا كانت أ هى مجموعة حل المتباينة : س + ص < ٤ ، ب هى مجموعة حل المتباينة : س + ص > ٤

فإن : ....

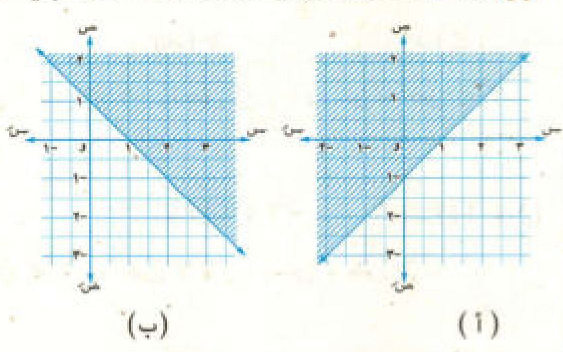
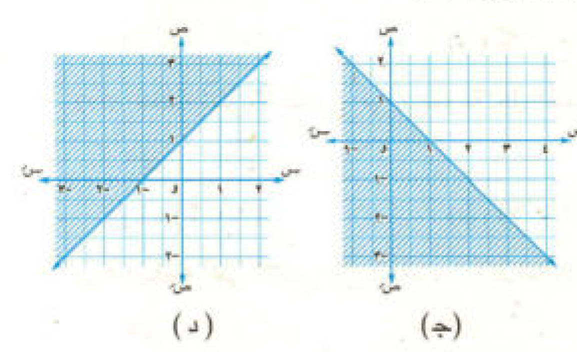
(أ) أ = ب (ب) أ ⊂ ب (جـ) ب ⊂ أ (د) أ ∩ ب = ∅

(٢١) إذا كانت النقط : (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٤) هى رؤوس منطقة حل المتباينات :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص ≥ حـ فإن : حـ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

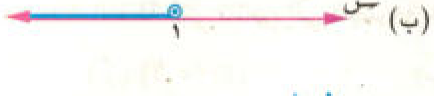
(٢٢) أى الأشكال الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : س + ص ≤ ١ ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

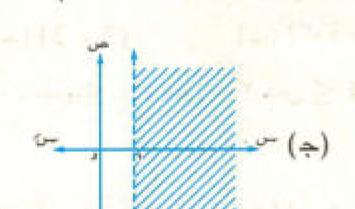
(٢٣) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٥ − ٢ س < ٣ فى ح × ح ؟

(أ)

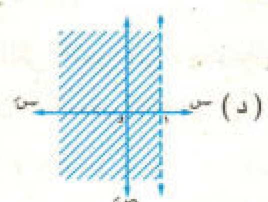


(ب)

(جـ)



(د)





(٢٤) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح × ح



(أ) ص ≥ ٢

(ب) ص > ٢

(جـ) ص ≤ ٢

(د) ص < ٢

(٢٥) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح × ح



(أ) س + ص < ٥

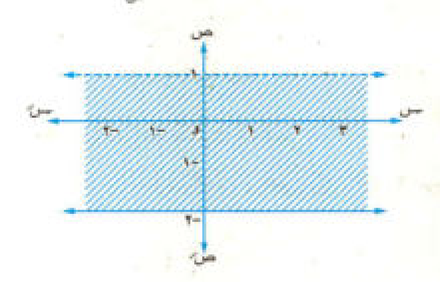
(ب) ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

(جـ) ٣ س + ٢ ص < ٦

(د) ٢ س + ٣ ص < ٦

(٢٦) الشكل الآتى يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح × ح





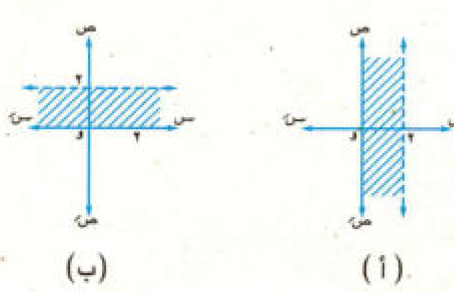
(أ) −٢ ≤ س < ١

(ب) −٢ < س ≤ ١

(جـ) −٢ ≤ ص < ١

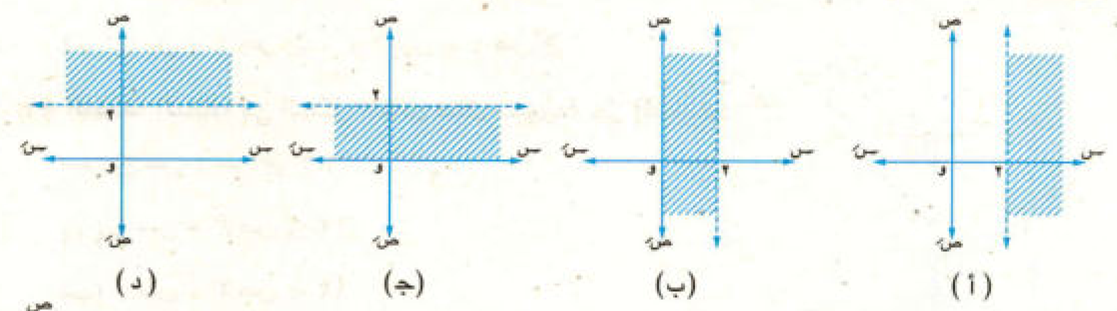
(د) −٢ < ص ≤ ١

(٢٧) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٠ ≥ س < ٢ فى ح × ح ؟



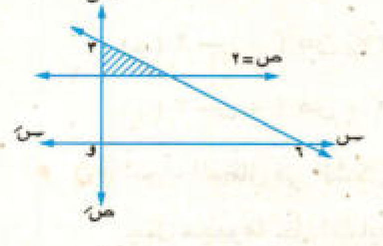
(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢٨) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : ٠ ≥ ص < ٢ فى ح × ح ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢٩) المنطقة المظللة تمثل مجموعة حل المتباينات :



ص ≤ ٢ ، س ≤ ٠ ، ....

(أ) س + ٢ ص − ٦ ≥ ٠ (ب) س + ٢ ص + ٦ ≥ ٠

(جـ) س + ٢ ص − ٦ ≤ ٠ (د) س + ٢ ص + ٦ ≤ ٠

(٣٠) الجزء المظلل فى الشكل المقابل يمثل

مجموعة حل المتباينات ....

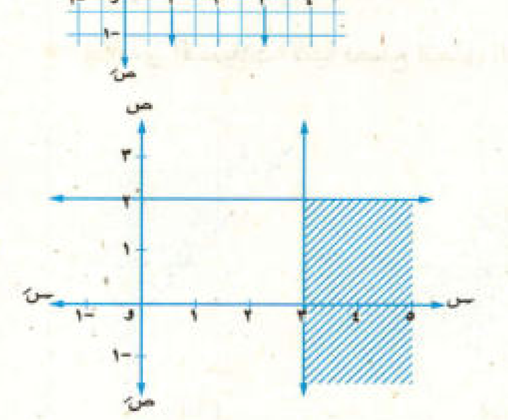
(أ) س > ١ ، ص > ٢

(ب) ١ < س < ٣ ، ٢ < ص < ٤

(جـ) ١ ≥ س ≥ ٣ ، ٢ ≥ ص ≥ ٤

(د) س + ص ≤ ٣ ، س − ص ≥ ٧

(٣١) الجزء المظلل فى الشكل المقابل



يمثل مجموعة حل المتباينات ....

(أ) س > ٣ ، ص > ٢

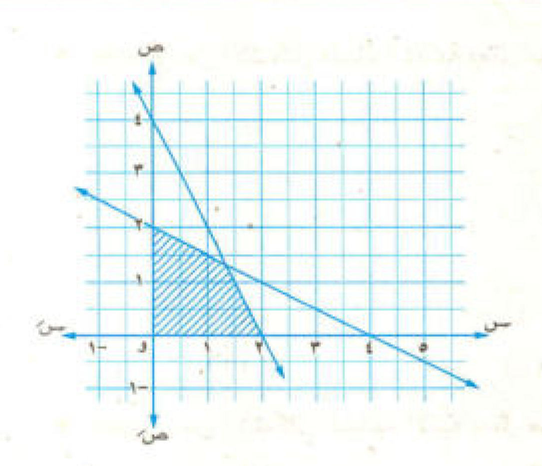
(ب) س ≤ ٣ ، ص ≤ ٢

(جـ) س + ١ > ٤ ، ص + ١ > ٣

(د) س + ١ ≤ ٤ ، ٢ ص ≥ ٤

(٣٢) الجزء المظلل فى الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينات ....



(أ) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٢ ص ≥ ٤

، ٢ س + ص ≥ ٤

(ب) س + ٢ ص ≥ ٤ ، ٢ س + ص ≥ ٤

(جـ) س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ٢ ص < ٤

، ٢ س + ص < ٤

(د) ٤ س + ٢ ص ≥ ٠ ، ٢ س + ٤ ص ≥ ٠

(٣٣) المنطقة المظللة فى الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المتباينات

س ≤ ص ، س ≥ ٣ ، ....

(أ) ٤ س + ٣ ص ≤ ١٢

(ب) ٤ س + ٣ ص > ١٢

(جـ) ٣ س + ٤ ص ≤ ١٢

(د) ٣ س + ٤ ص + ١٢ ≤ ٠

(٣٤) الجزء المظلل فى الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينة

أ س + ب ص ≥ حـ حيث ....

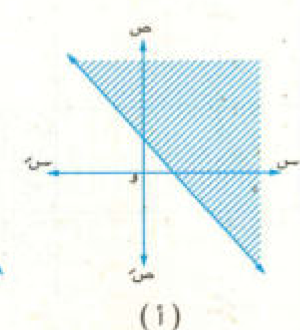
(أ) أ > ٠ ، ب > ٠ ، حـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، ب < ٠ ، حـ < ٠

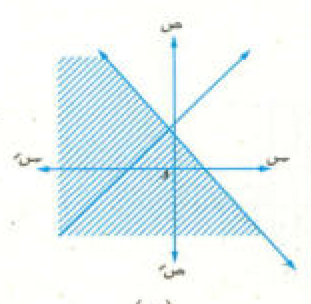
(جـ) أ > ٠ ، ب < ٠ ، حـ > ٠

(د) أ < ٠ ، ب > ٠ ، حـ < ٠

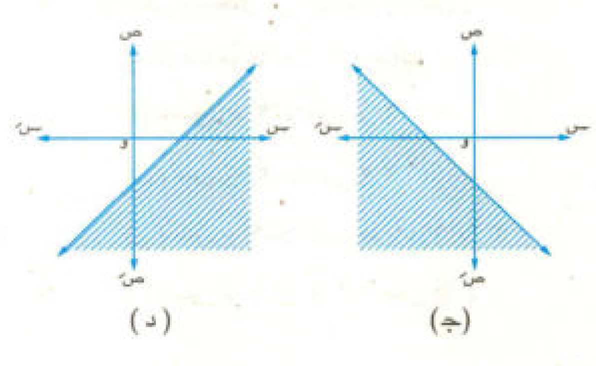
(٣٥) أى التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : أ س + ب ص ≤ حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ع+



(أ)

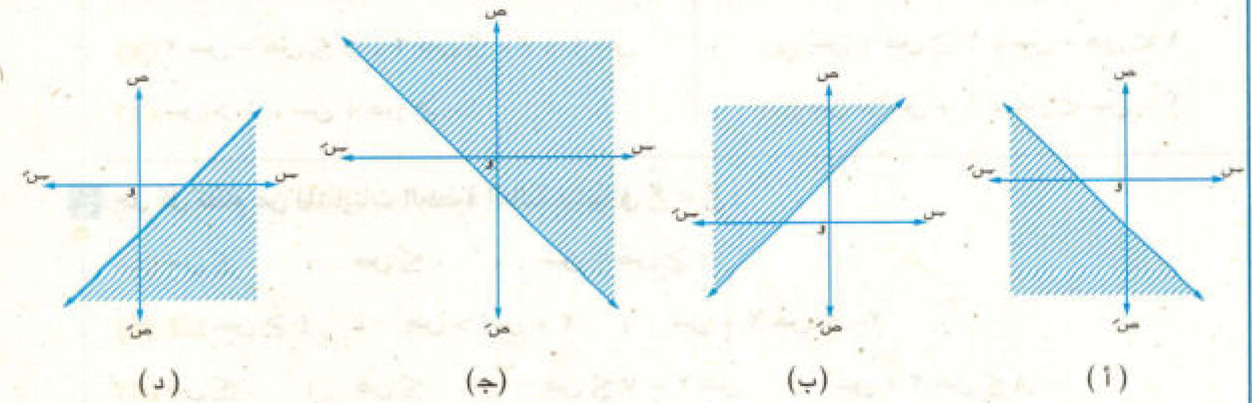


(ب)



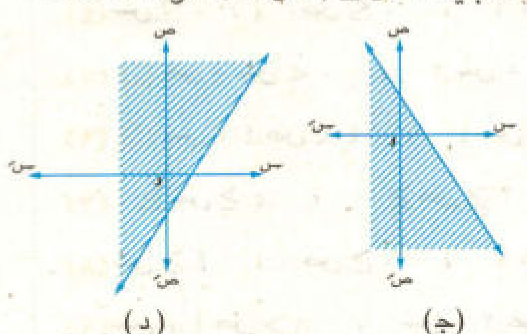
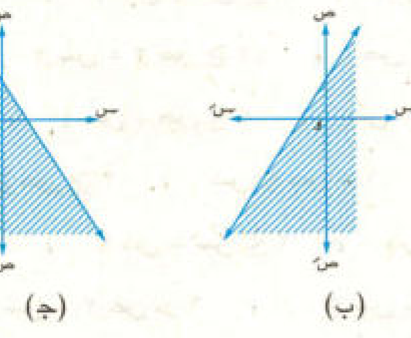
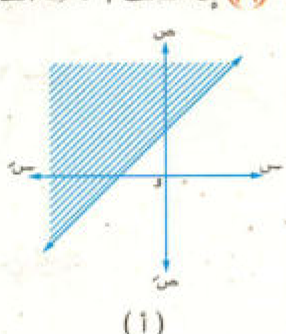
(جـ) (د)

(٣٦) أي التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة: أ س + ب ص ≤ حـ حيث أ ، ب ∈ ح⁺ ، حـ ∈ ح⁻



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣٧) إذا كانت أ ، ب أعداد حقيقية موجبة فإن أنسب تمثيل للمتباينة : ص ≤ أ س + ب هو ....

(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المتباينات التالية ممثلًا إياها على خط الأعداد :

(١) ٢ س − ٣ ≥ ٥
(٢) ٤ − ٢ س ≥ ٦
(٣) ٣ س − ٩ < ٦٠ س
(٤) ٦ + س < ٣ س + ٢ ≥ ١٤ + س
(٥) ٢ س − ١ < س + ٣ < ٣ س + ٧

---

٢ أوجد مجموعة الحل فى ح × ح لكل من المتباينات التالية بيانيًا :

(١) ٢ س − ص ≥ ٦
(٢) س + ص < ٣
(٣) س ≤ −٢
(٤) ص ≥ ٥
(٥) ص > ٢ س − ٣
(٦) س < ٢ ص − ٤
(٧) ص ≥ ٢ س
(٨) −٢ < س ≥ ٤
(٩) −١ ≥ ص ≥ ٢

---

٣ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى ح × ح :

(١) س ≥ ١ ، ص < ٣
(٢) س − ٢ > ٠ ، ص < ١
(٣) س ≥ ٠ ، س + ٢ ص < ٤
(٤) −١ ≥ س < ٢ ، ٠ ≥ ص < ٣

(٥) ص ≤ ٢ س + ٦ ، ص + ٢ س < -١
(٦) ص > س ، س - ص > ١
(٧) ٢ س - ص ≤ ٥ ، ٢ ص ≤ ٢٠ + ٤ س
(٨) س + ص ≥ ٣ ، س - ص > ١
(٩) س > ١ ، س + ص ≥ -١
(١٠) ص < س + ١ ، ص > س - ١

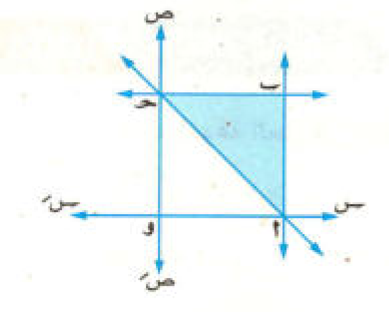
٤ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى ح × ح :

(١) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٥
(٢) س ≥ ٤ ، ص < س + ٢ ، س + ٢ ص ≤ -٢
(٣) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ص ≤ ٧ - ٢ س ، س + ٢ ص ≤ ٨
(٤) س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص ≥ ٦ ، س + ص ≥ ٤
(٥) ص - س > ٠ ، ٢ س + ٢ ص ≥ ١٢ ، ص < ٦ + ٢ س
(٦) س + ٤ ص > ٤ ، ٤ س + ص ≤ ٢ ، س - ص > ١
(٧) ٠ ≥ س ≥ ٥ ، ٠ ≥ ص ≥ ٣ ، س ≤ ص - ١
(٨) س ≥ ٤ ، ص ≥ ٦ ، ٢ ص - س ≤ ٢ ، ص + ٢ س ≤ ٦
(٩) س + ٤ ص < ٨ ، س - ٢ ص < ٦ ، ٠ ≥ س > ٤

٥ فى الشكل المقابل :

أ و حـ ب مربع مساحة سطحه ١٦ وحدة مربعة.

اكتب المتباينات التى تحقق مجموعة حل المنطقة المظللة بالشكل المقابل.



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النقطة (أ ، ب) لا تنتمى لمجموعة حل المتباينة : ٢ س + ص > ٣ فإن ....

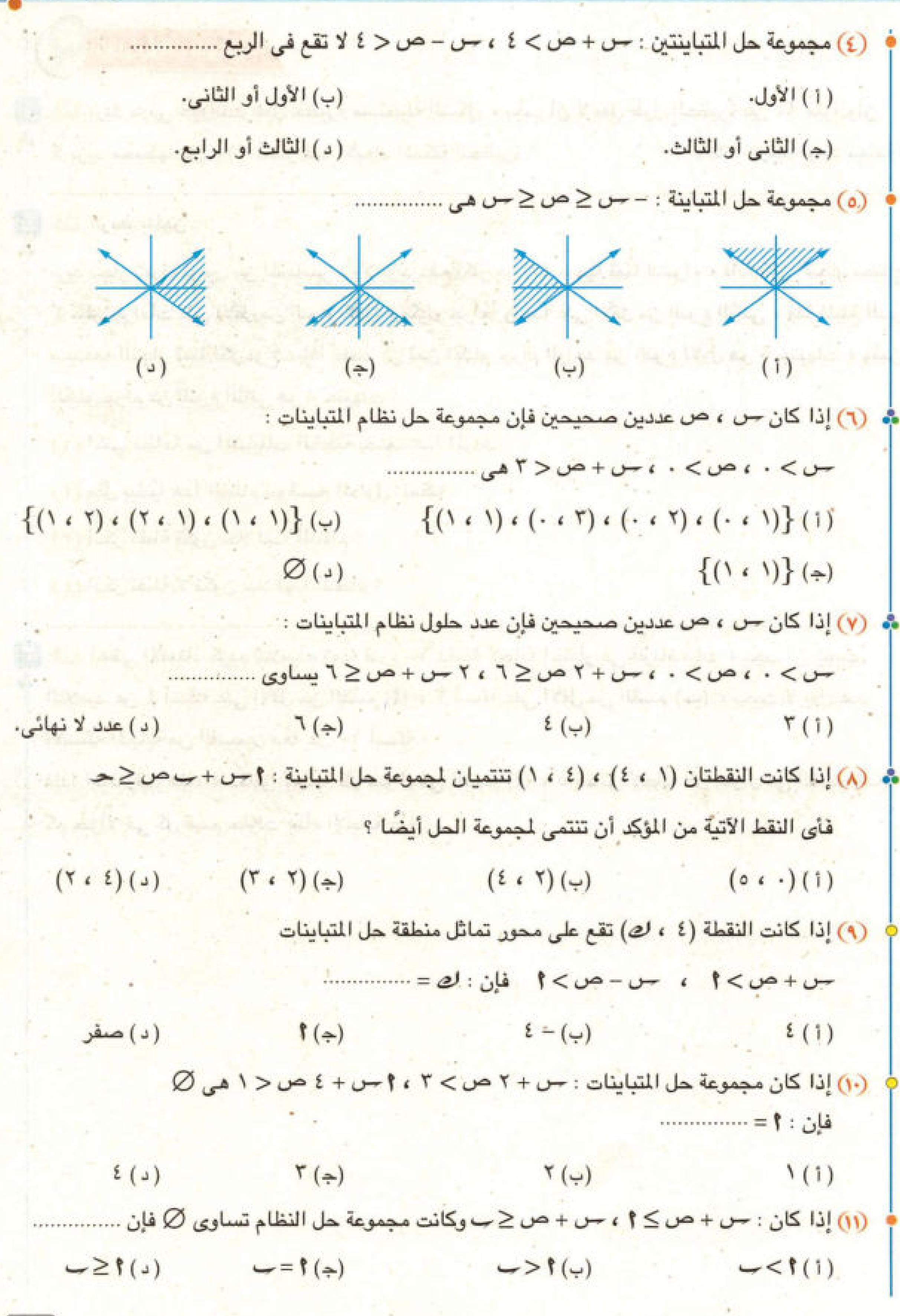
(أ) ٢ أ + ب > ٣ (ب) ٢ أ + ب < ٣ (جـ) ٢ أ + ب ≥ ٣ (د) ٢ أ - ب > ٣

(٢) أى المتباينات الآتية لا تقع مجموعة حلها فى الربع الثانى أو الثالث ؟

(أ) س > ٠ (ب) س < ٠ (جـ) ص > ٠ (د) ص < ٠

(٣) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : أ س + ص > ٢ لا تقع فى الربع الثالث أو الرابع فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) أ = ٠ (د) أ > ٢



(٤) مجموعة حل المتباينتين : س + ص > ٤ ، س − ص < ٤ لا تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الأول أو الثانى.

(جـ) الثانى أو الثالث. (د) الثالث أو الرابع.

(٥) مجموعة حل المتباينة : − س ≤ ص ≤ س هى ....

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٦) إذا كان س ، ص عددين صحيحين فإن مجموعة حل نظام المتباينات :

س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ص < ٣ هى ....

(أ) {(١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (١ ، ١)} (ب) {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

(جـ) {(١ ، ١)} (د) ∅

(٧) إذا كان س ، ص عددين صحيحين فإن عدد حلول نظام المتباينات :

س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٦ ، ٢ س + ص ≤ ٦ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى.

(٨) إذا كانت النقطتان (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : أ س + ب ص ≥ حـ

فأى النقط الآتية من المؤكد أن تنتمى لمجموعة الحل أيضًا ؟

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٢ ، ٤) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٤ ، ٢)

(٩) إذا كانت النقطة (٤ ، ك) تقع على محور تماثل منطقة حل المتباينات

س + ص > أ ، س − ص > أ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) − ٤ (جـ) أ (د) صفر

(١٠) إذا كان مجموعة حل المتباينات : س + ٢ ص > ٣ ، أ س + ٤ ص < ١ هى ∅

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) إذا كان : س + ص ≤ أ ، س + ص ≥ ب وكانت مجموعة حل النظام تساوى ∅ فإن ....

(أ) أ > ب (ب) أ > ب (جـ) أ = ب (د) أ ≥ ب

تطبيقات حياتية

١ يريد مربى حيوانات عمل حظيرة مستطيلة الشكل ، يجب أن لا يقل طول الحظيرة عن ٨٠ مترًا وأن لا يزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار فما الأبعاد الممكنة للحظيرة ؟ (اكتب أربعة أبعاد ممكنة)

---

٢ الربط بالمهن :

يريد نجار شراء نوعين من المسامير ، ولا يريد دفع أكثر من ٤٨ جنيهًا ثمنًا للشراء ، فإذا كان النجار يحتاج ٣ كيلو جرامات على الأقل من النوع الأول ، وكيلو جرامًا واحدًا على الأقل من النوع الثانى ، فما المبلغ الذى سيدفعه النجار ثمنًا لكل نوع ، إذا علمت أن ثمن الكيلو جرام الواحد من النوع الأول هو ٦ جنيهات ، وثمن الكيلو جرام من النوع الثانى هو ٨ جنيهات ؟

(١) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يصف هذا الموقف.

(٢) مثل بيانيًا هذا النظام لتوضيح الحلول الممكنة.

(٣) اذكر نقطة تكون حلًا لهذا النظام ؟

(٤) اذكر نقطة لا تكون حلًا لهذا النظام ؟

---

٣ أعطى الأستاذ كريم لتلاميذه زمنًا قدره ٦٠ دقيقة لإجابة اختبار فى الرياضيات ، يجب أن يجيب التلاميذ عن ٤ أسئلة على الأقل من القسم (أ) ، ٣ أسئلة على الأقل من القسم (ب) ، بحيث لا يقل عدد الأسئلة المجابة من القسمين معًا عن ١٠ أسئلة.

فإذا استغرقت هناء ٤ دقائق لإجابة كل سؤال فى القسم (أ) ، ٥ دقائق لإجابة كل سؤال فى القسم (ب) . كم سؤالًا فى كل قسم حاولت هناء الإجابة عنه ؟



الدرس

2

البرمجة الخطية والحل الأمثل

* **البرمجة الخطية :** هى إحدى الطرق التى تستخدم للحصول على أفضل الحلول لتحقيق هدف معين فى ضوء القيود والإمكانيات المتاحة والوصول إلى الحل الأمثل.
بحيث يكون الهدف الذى نسعى لتحقيقه على صورة دالة خطية تسمى **«دالة الهدف»**
وتكون القيود والإمكانيات المتاحة على صورة مجموعة من المتباينات الخطية.

* **تعتمد طريقة البرمجة الخطية على :**

١ تمثيل نظام المتباينات الذى يعبر عن القيود بحيث نحصل على منطقة مضلعة تمثل **«مجموعة الحل»** وغالبًا ما تشتمل القيود على المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ وهذا يعنى أن منطقة الحل تقع فى الربع الأول.

٢ **تعيين دالة الهدف :** ر = ل س + م ص حيث ل ، م ثابتان فنرسم المستقيم ل س + م ص = ٠ الذى يمر بنقطة الأصل ثم نجعل هذا المستقيم يتحرك موازيًا لنفسه لأعلى حتى يمر برءوس المضلع الممثل لمجموعة حل المتباينات وحيث إن جميع هذه المستقيمات المتوازية تكون متساوية فى الميل ومختلفة فقط فى قيمة الحد المطلق (ر) وكل نقطة (س ، ص) تنتمى إلى مجموعة الحل وتنتمى لنفس المستقيم تعطى قيمة وحيدة للعدد (ر) وبالتالى نستطيع أن نحدد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لدالة الهدف .

فمثلًا إذا كانت مجموعة الحل الممثلة لمجموعة المتباينات التى تمثل القيود هى المنطقة المظللة فى الشكل المقابل والمطلوب هو إيجاد أكبر وأقل قيمة للمقدار : ر = ٣ س + ٢ ص
فإننا نعوض بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء (رؤوس المضلع) فى دالة الهدف

لاحظ أن

قيمة دالة الهدف عند أى نقطة تقع على ضلع من أضلاع المنطقة المظللة تكون محصورة بين قيمتيهما عند رأسى المضلع الواصل بينهما هذا الضلع

$\therefore$ [ر]$_{أ}$ = ٣ × ١ + ٢ × ٤ = ١١ ، [ر]$_{ب}$ = ٣ × ٤ + ٢ × ١ = ١٤

، [ر]$_{حـ}$ = ٣ × ٥ + ٢ × ٢ = ١٩ ، [ر]$_{ء}$ = ٣ × ٦ + ٢ × ٥ = ٢٨

وبالتالى تكون أكبر قيمة هى ٢٨ وذلك عند النقطة ء (٦ ، ٥) وأقل قيمة هى ١١ وذلك عند النقطة أ (١ ، ٤)

مثـــال ١

عين مجموعة حل المتباينات الآتية معًا بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٨ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س ، ص) التى تجعل (ر) أكبر ما يمكن حيث : ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

الحـــل

أولاً : نعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات :

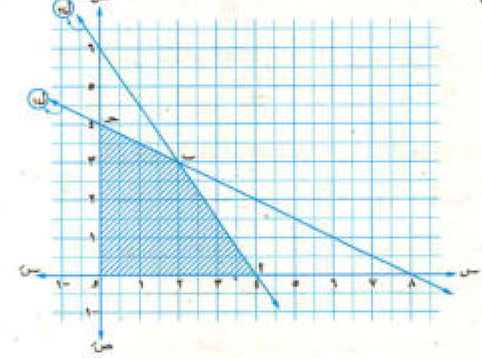
١ المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$: س + ٢ ص = ٨ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$: ٣ س + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)

$\therefore$ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ و



لإيجاد نقطة ب جبريًا

نحل المعادلتين الممثلتين بالمستقيمين ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ حيث :

ل$_{١}$: س + ٢ ص = ٨ ، ل$_{٢}$: ٣ س + ٢ ص = ١٢ آنيًا

فنجد أن : ب = (٢ ، ٣)

ثانيًا : نحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هى : أ (٤ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

ثالثًا : نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

$\because$ دالة الهدف ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

$\therefore$ [ر]$_{أ}$ = ٥٠ × ٤ + ٧٥ × ٠ = ٢٠٠ ، [ر]$_{ب}$ = ٥٠ × ٢ + ٧٥ × ٣ = ٣٢٥

، [ر]$_{حـ}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٤ = ٣٠٠ ، [ر]$_{و}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٠ = ٠

$\therefore$ أكبر قيمة لدالة الهدف هى ٣٢٥ وذلك عند النقطة ب (٢ ، ٣)

تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

المشكلات الحياتية المرتبطة بالبرمجة الخطية يمكن التعامل معها بالخطوات التالية :

١ تحليل الموقف أو المشكلة وذلك بتحديد المتغيرات والقيود والمعلومات المتاحة وتنظيمها فى جدول.

٢ ترجمة القيود فى صورة نظام من المتباينات الخطية.

٣ كتابة دالة الهدف.

٤ تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل.

٥ تحديد رؤوس منطقة الحل.

٦ إيجاد دالة الهدف عند كل رأس من الرؤوس السابقة لتحديد الرأس الذى يتحقق عنده الهدف المطلوب.

البرمجة الخطية
قيــود
منطقــة حــل
رؤوس المنطقة المضلعة
دالــة الهـدف

مثـــال ٢

مخبز ينتج نوعين من الكعك ، يلزم للكعكة من النوع الأول ٢٠٠ جرام من الدقيق ، ٢٥ جرامًا من الزبد ، ويلزم للكعكة من النوع الثانى ١٠٠ جرام من الدقيق ، ٥٠ جرامًا من الزبد ، فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة هى ٤ كجم فقط وكمية الزبد المتاحة هى ١$\frac{1}{4}$ كجم فقط فأوجد أكبر عدد ممكن من الكعك يمكن عمله.

الحــل

* **نفرض أن :** عدد الكعك من النوع الأول = س كعكة ، عدد الكعك من النوع الثانى = ص كعكة
* **ننظم المعلومات المتاحة فى المشكلة فى جدول :**

	النوع الأول	النوع الثانى	الكمية المتاحة
دقيق	٢٠٠	١٠٠	٤٠٠٠
زبد	٢٥	٥٠	١٢٥٠

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ ٢٠٠ س + ١٠٠ ص ≤ ٤٠٠٠ **أى أن** ٢ س + ص ≤ ٤٠

٣ ٢٥ س + ٥٠ ص ≤ ١٢٥٠ **أى أن** س + ٢ ص ≤ ٥٠

* **نكتب دالة الهدف :** ر = س + ص حيث ر أكبر ما يمكن.
* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**

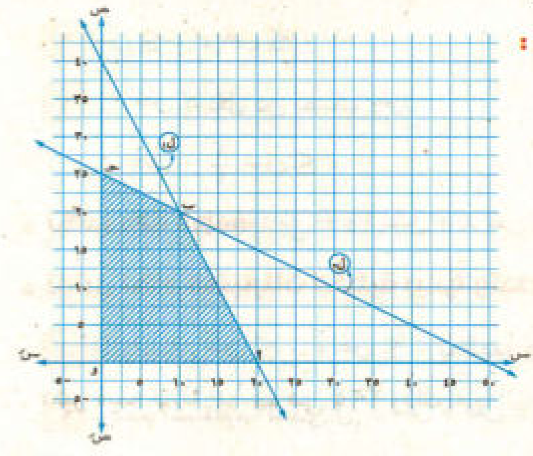
١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى ل١ :

٢ س + ص = ٤٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٤٠) ، (٢٠ ، ٠)



٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٣$: س + ٢ ص = ٥٠ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٥) ، (٥٠ ، ٠)

∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ و

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى : أ (٢٠ ، ٠) ، ب (١٠ ، ٢٠) ، حـ (٠ ، ٢٥) ، و (٠ ، ٠)

* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = س + ص ∴ $[ر]_و$ = ٠ + ٠ = صفر ، $[ر]_أ$ = ٢٠ + ٠ = ٢٠

، $[ر]_ب$ = ١٠ + ٢٠ = ٣٠ ، $[ر]_حـ$ = ٠ + ٢٥ = ٢٥

∴ أكبر عدد من الكعك يتم صنعه هو ٣٠ كعكة منها ١٠ من النوع الأول ، ٢٠ من النوع الثانى.

مثال ٣

مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ويحقق ربحًا فى كل وحدة من النوع الأول ١٥ جنيهًا وربحًا لكل وحدة من النوع الثانى ٨ جنيهات ، وكان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول.

أوجد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من كل نوع لكى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

الحل

* **نفرض أن :** عدد وحدات النوع الأول = س ، عدد وحدات النوع الثانى = ص

* **ننظم المعلومات المتاحة فى المشكلة فى جدول :**

	النوع الأول	النوع الثانى	الحد الأقصى
الوحدة المنتجة	س	ص	١٢٠
الربح	١٥	٨	–

* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ س + ص ≤ ١٢٠

٣ ∵ ص لا تقل عن نصف س ∴ ص ≥ $\frac{١}{٢}$ س

∴ ص − $\frac{١}{٢}$ س ≥ ٠ ∴ ٢ ص − س ≥ ٠

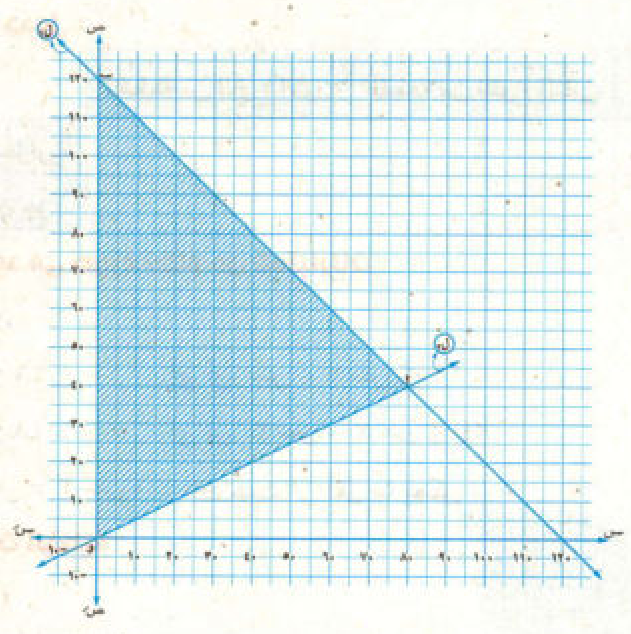
* **نكتب دالة الهدف :** ر = ١٥ س + ٨ ص حيث ر أكبر ما يمكن.

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و$\overleftrightarrow{س}$ ∪ و$\overleftrightarrow{ص}$ ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: س + ص = ١٢٠ وهو يمر بـ (٠ ، ١٢٠) ، (١٢٠ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٣$: ٢ ص − س = ٠ وهو يمر بـ (٠ ، ٠) ، (٢٠ ، ١٠)



∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهى المنطقة المثلثة و أ ب

*** نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى : و (٠ ، ٠) ، أ (٨٠ ، ٤٠) ، ب (٠ ، ١٢٠)

*** نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ١٥ س + ٨ ص ∴ $[ر]_و$ = ٠ + ٠ = ٠

، $[ر]_أ$ = ١٥ × ٨٠ + ٨ × ٤٠ = ١٥٢٠ ، $[ر]_ب$ = ١٥ × ٠ + ٨ × ١٢٠ = ٩٦٠

∴ أكبر ربح ممكن هو ١٥٢٠ جنيهًا ويتحقق ذلك عند إنتاج ٨٠ وحدة من النوع الأول

، ٤٠ وحدة من النوع الثانى.

مثال ٤

وجبة غذائية يراد تكوينها من نوعين من الأطعمة فإذا كانت القطعة من النوع الأول تحتوى ٣ سعرات حرارية ، ٦ وحدات ڤيتامين جـ ، والقطعة من النوع الثانى تحتوى ٦ سعرات حرارية ، ٤ وحدات فيتامين جـ ، وكان الحد الأدنى من السعرات الحرارية الواجب توافره بالوجبة هو ٣٦ سعر ، والحد الأدنى من وحدات ڤيتامين جـ هو ٤٨ وحدة ، وكان سعر القطعة من النوع الأول ٣ جنيهات ومن النوع الثانى ٤ جنيهات. فما عدد القطع التى يمكن أن تتضمنها الوجبة لتحقق الحد الأدنى بأقل تكلفة ؟

الحـل

* **نفرض أن :** عدد القطع من النوع الأول بالوجبة هو س ، عدد القطع من النوع الثانى بالوجبة هو ص
* **ننظم المعلومات فى جدول :**

	القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثانى	الحد الأدنى
سعرات حرارية	٣	٦	٣٦
ڤيتامين جـ	٦	٤	٤٨

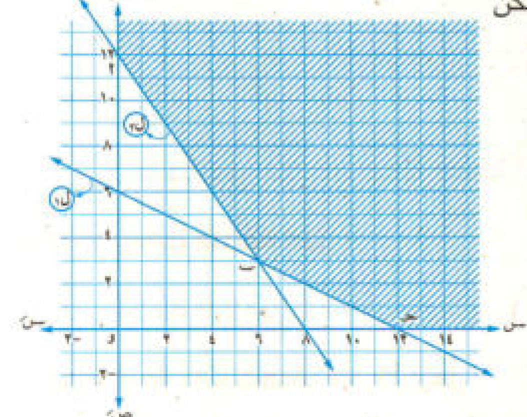
* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٢ ٣ س + ٦ ص ≥ ٣٦ **أى أن** س + ٢ ص ≥ ١٢

٣ ٦ س + ٤ ص ≥ ٤٨ **أى أن** ٣ س + ٢ ص ≥ ٢٤

* **نكتب دالة الهدف :** ر = ٣ س + ٤ ص حيث ر أقل ما يمكن



* **تمثيل نظام المتباينات الخطية وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

س + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (١٢ ، ٠)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٣ س + ٢ ص = ٢٤ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٢) ، (٨ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل والتى تحدها النقط أ ، ب ، حـ

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :** رؤوس منطقة الحل هى : أ (٠ ، ١٢) ، ب (٦ ، ٣) ، حـ (١٢ ، ٠)
* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ٣ س + ٤ ص ∴ $[ر]_أ$ = ٣ × ٠ + ٤ × ١٢ = ٤٨

، $[ر]_ب$ = ٣ × ٦ + ٤ × ٣ = ٣٠ ، $[ر]_حـ$ = ٣ × ١٢ + ٤ × ٠ = ٣٦

∴ أقل تكلفة للوجبة هى ٣٠ جنيهًا وذلك عندما تتكون من ٦ قطع من النوع الأول و٣ قطع من النوع الثانى.

مثـــال ٥

تهدف شركة سياحة لاستئجار أسطول من الطائرات يستطيع نقل ٢٨٠٠ راكب ، ١٢٨ طن أمتعة على الأقل وكان المتاح طرازان من الطائرات أ ، ب وكان عدد الطائرات المتاحة من الطراز أ هو ١٣ طائرة ومن الطراز ب هو ١٢ طائرة وكانت الحمولة كاملة لطائرة الطراز أ هى ٢٠٠ راكب ، ٨ طن أمتعه وللطراز ب هى ١٠٠ راكب ، ٦ طن أمتعه وكان إيجار الطائرة من الطراز أ هو ٢٤٠ ألف جنيه ، من الطراز ب هو ١٠٠ ألف جنيه. فكم طائرة من كل طراز يمكن استئجارها لتحقيق الهدف بأقل تكلفة ؟

الحــل

* **نفرض أن :** عدد طائرات الطراز أ هو س ، عدد طائرات الطراز ب هو ص
* **تنظم المعلومات المتاحة بالمشكلة فى جدول :**

	طراز (أ)	طراز (ب)	الحد الأدنى
عدد الركاب	٢٠٠	١٠٠	٢٨٠٠
الأمتعة بالطن	٨	٦	١٢٨

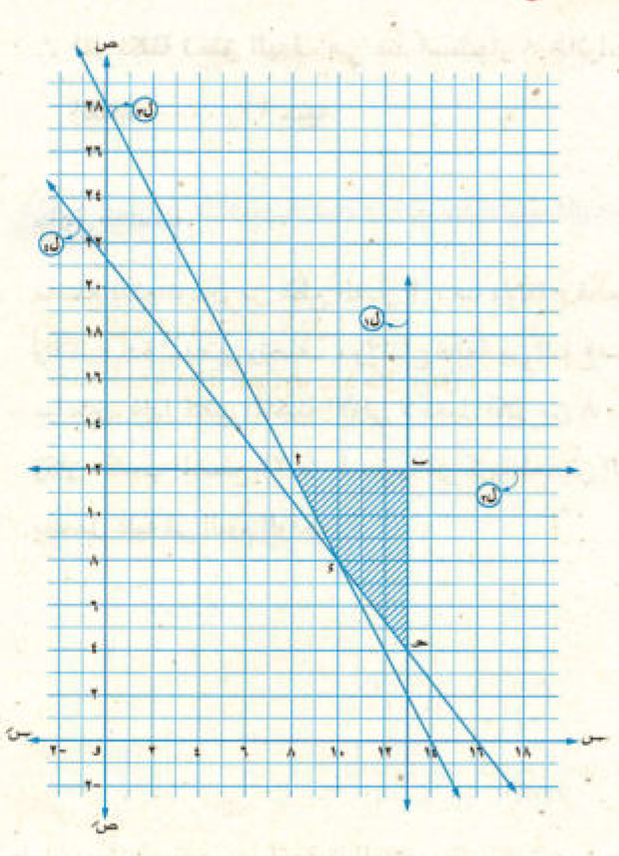
* **نترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

١ س ≥ ١٣ ، ص ≥ ١٢

٢ ٢٠٠ س + ١٠٠ ص ≥ ٢٨٠٠ **أى أن** ٢ س + ص ≥ ٢٨

٣ ٨ س + ٦ ص ≥ ١٢٨ **أى أن** ٤ س + ٣ ص ≥ ٦٤

* **نكتب دالة الهدف :** ر = ٢٤٠ س + ١٠٠ ص حيث ر أقل ما يمكن
* **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا وتحديد منطقة الحل :**



١ نرسم المستقيم الحدى $ل_1$:

س = ١٣ يوازى محور الصادات

ويقطع محور السينات

فى النقطة (١٣ ، ٠)

٢ نرسم المستقيم الحدى $ل_2$:

ص = ١٢ يوازى

محور السينات ويقطع

محور الصادات

فى النقطة (٠ ، ١٢)

٣ نرسم المستقيم الحدى $ل_3$:

٢ س + ص = ٢٨

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٢٨) ، (١٤ ، ٠)

٤ نرسم المستقيم الحدى ل٤ : ٤ س + ٣ ص = ٦٤ وهو يمر بالنقطتين (١ ، ٢٠) ، (١٦ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهى المنطقة المضلعة أ ب حـ ء

* **نحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هى :

أ (٨ ، ١٢) ، ب (١٣ ، ١٢) ، حـ (١٣ ، ٤) ، ء (١٠ ، ٨)

* **نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∵ دالة الهدف ر = ٢٤٠ س + ١٠٠ ص

∴ $[ر]_{أ}$ = ٢٤٠ × ٨ + ١٠٠ × ١٢ = ٣١٢٠

، $[ر]_{ب}$ = ٢٤٠ × ١٣ + ١٠٠ × ١٢ = ٤٣٢٠

، $[ر]_{حـ}$ = ٢٤٠ × ١٣ + ١٠٠ × ٤ = ٣٥٢٠

، $[ر]_{ء}$ = ٢٤٠ × ١٠ + ١٠٠ × ٨ = ٣٢٠٠

∴ أقل تكلفة تحقق الهدف هى عند استئجار ٨ طائرات من الطراز أ ، ١٢ طائرة من الطراز ب وتكون التكلفة ٣١٢٠٠٠٠ جنيه.

حاول بنفسك

مصنع ينتج نوعين من قطع الغيار أ ، ب ولإنتاج قطعة من النوع أ يلزم تشغيل ماكينتين الأولى لمدة ساعة والثانية لمدة ساعتين ونصف ، ولإنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولى لمدة ٤ ساعات والثانية لمدة ساعتين. فإذا كانت الماكينة الأولى لا تعمل أكثر من ٨ ساعات يوميًا والثانية لا تعمل أكثر من ٢١ ساعة يوميًا وكان مكسب المصنع ٢٤ ، ٤٠ جنيهًا فى كل قطعة من النوعين أ ، ب على الترتيب فأوجد أكبر مكسب يمكن أن يحصل عليه فى اليوم الواحد.

اختبر نفسك

تمـارين 7 على البرمجة الخطية والحل الأمثل

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة التى تكون عندها للدالة ر = ٤٠ س + ٢٠ ص قيمة عظمى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، −٤) (جـ) (١٥ ، ١٠) (د) (٢٥ ، ٠)

(٢) النقطة التى تكون عندها للدالة م = ٣٥ س + ١٠ ص قيمة صغرى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ١٠) (جـ) (٠ ، ٤٠) (د) (٢٠ ، ١٠)

(٣) إذا كان ضعف العدد س لا يقل عن ثلاثة أمثال العدد ص فإن ....

(أ) ٢ س > ٣ ص (ب) ٢ س ≥ ٣ ص

(جـ) ٢ س < ٣ ص (د) ٢ س ≤ ٣ ص

(٤) أى التعبيرات الآتية يمثل المتباينة س + ص ≥ ١٥ ؟

(أ) عددان مجموعهما أقل من ١٥ (ب) عددان مجموعهما لا يقل عن ١٥

(جـ) عددان مجموعهما يزيد عن ١٥ (د) عددان مجموعهما لا يزيد عن ١٥

(٥) أى التعبيرات الرمزية يمثل الجملة الآتية :

عددان مجموع أحدهما وضعف الآخر لا يزيد عن ٢٠ ؟

(أ) س + ٢ ص > ٢٠ (ب) س + ٢ ص ≤ ٢٠

(جـ) س + ٢ ص < ٢٠ (د) س + ٢ ص ≥ ٢٠

(٦) أى التعبيرات اللفظية يمثل المتباينة : ص ≤ ٢ س ؟

(أ) عددان أحدهما أكبر من ضعف الآخر. (ب) عددان أحدهما لا يزيد عن ضعف الآخر.

(جـ) عددان أحدهما يقل عن ضعف الآخر. (د) عددان أحدهما لا يقل عن ضعف الآخر.

(٧) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينات : س + ص ≤ ٥ ، س ≤ ١ ، ص ≤ ٢

وتجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ص أقل ما يمكن من النقط التالية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٤)

(٨) القيمة العظمى للدالة ر = ٥ س + ٢ ص تحت الشروط س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

، س + ص ≥ ٧ ، س + ٢ ص ≥ ١٠ هى ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٦ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(٩) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينتين : ٠ ≥ س ≥ ٥ ، ٠ ≥ ص ≥ ٢ وتجعل دالة الهدف

ر = ٢ س + ٣ ص أكبر ما يمكن هى ....

(أ) (٤ ، ٥) (ب) (٦ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، ٢)

(١٠) أقل قيمة للمقدار ٣ س − ٢ ص تحت الشروط −٣ ≤ س ≤ ٧ ، −٦ ≤ ص ≤ ٥
تساوى ....

(أ) ٣ (ب) −١٩ (جـ) −٢٨ (د) ١١

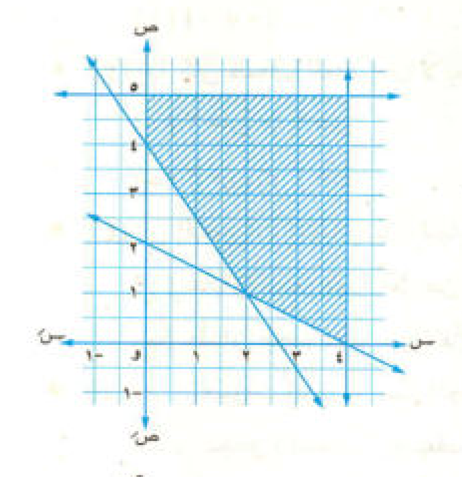
(١١) إذا كان (أ ، ب) ينتمي لمجموعة حل المتباينة س + ٢ ص ≤ ٥ حيث أ ، ب عددان صحيحان
فإن أقل قيمة للمقدار ٢ أ + ٤ ب = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١٠ (د) ٦

(١٢) إذا كانت دالة الهدف (م) تأخذ القيم ٦١ ، ٥٧ عند النقط (٤ ، ٧) ، (٥ ، ٦) على الترتيب
فإن دالة الهدف (م) يمكن أن تساوى ....

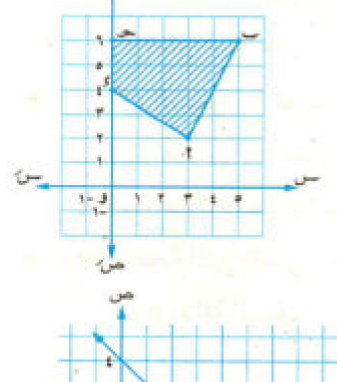
(أ) ٢ س + ٥ ص (ب) ٧ س + ٣ ص (جـ) ٣ س + ٧ ص (د) ٥ س + ٢ ص

(١٣) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل
لنظام من المتباينات فإن دالة
الهدف م = س + ص تكون
أصغر ما يمكن عند
النقطة ....



(أ) (٠ ، ٠)
(ب) (١ ، ٢)
(جـ) (٢ ، ١)
(د) (٤ ، ٥)

(١٤) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام
من المتباينات فإن القيمة الصغرى لدالة
الهدف م = ٣ س + ٢ ص هى ....

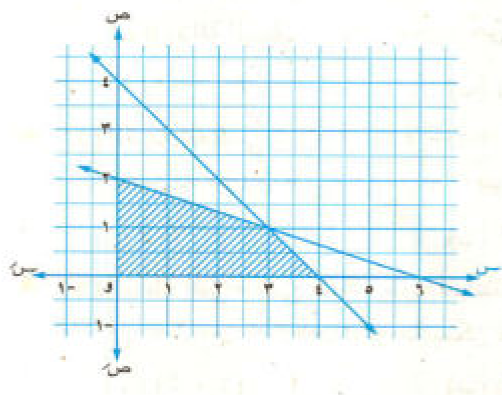


(أ) ٦ (ب) ٨
(جـ) ١٢ (د) ١٣

(١٥) فى الشكل المقابل :
المنطقة المظللة تمثل مجموعة حل المتباينات
س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ٣ ص ≥ ٦
، س + ص ≥ ٤ فإن القيمة العظمى
لدالة الهدف م = ٢ س + ص

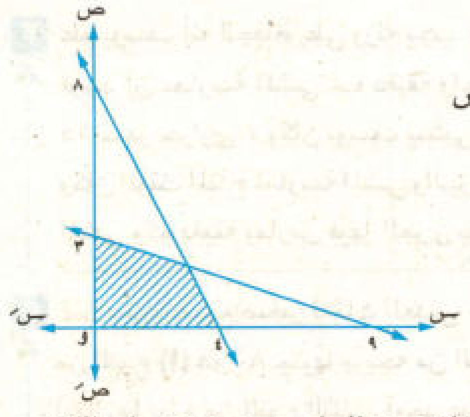


تساوى ....



(أ) ٧ (ب) ٨
(جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كانت المنطقة المظللة هى حل لإحدى مسائل البرمجة الخطية وكانت دالة الهدف هى ر = ٥ س + ٨ ص فإن القيمة العظمى لدالة الهدف تساوى ....



(أ) ٢٤
(ب) ٣١
(جـ) ٤٥
(د) ٦٤

(١٧) مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ، س ، ص على الترتيب فإذا كان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول أى من أنظمة المتباينات الآتية تمثل البيانات والقيود السابقة ؟

(أ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٢٠ ، ٢ ص ≤ س
(ب) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≥ ١٢٠ ، ص ≤ ٢ س
(جـ) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٢٠ ، ٢ ص ≥ س
(د) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٢٠ ، ص ≥ ٢ س

(١٨) فى إحدى مسائل البرمجة الخطية كانت دالة الهدف ر = أ س + ب ص لها قيمة عظمى عند رأسين من رؤوس المنطقة المظللة التى تمثل الحل فإن عدد النقط التى تجعل دالة الهدف قيمة عظمى يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) عدد لانهائى.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلًا من أنظمة المتباينات التالية ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف فى كل حالة :

(١) س + ص ≤ ٥ ، ص ≥ ١ ، س ≥ ٢
، دالة الهدف ر = ٢ س + ٣ ص أصغر ما يمكن. «(٢ ، ١)»

(٢) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص + ٢ س ≤ ١٠ ، س + ٤ ص ≤ ١٢
، دالة الهدف ر = ٢ ص + ٥ س أكبر ما يمكن. «(٥ ، ٠)»

(٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ ص + س ≥ ١٥ ، ٤ س + ٣ ص ≥ ٢٤
، دالة الهدف ر = ٣ ص + ٢ س أقل ما يمكن. «(٣ ، ٤)»

(٤) س − ص ≤ ٣ ، ٣ س + ٢ ص ≥ −٦ ، س ≥ −٢ ، ص ≤ ٥
، دالة الهدف ر = ٢ س − ٣ ص أكبر ما يمكن. «(٠ ، −٣)»

٢ أوجد أكبر وأقل قيمة لدالة الهدف : ل = س + ٣ ص − ٥ حيث : (س ، ص) تنتمى لمنطقة حل نظام المتباينات : −٣ ≤ س ≤ ٣ ، −٤ ≤ ص ≤ ٤ ، ٤ س + ٣ ص ≤ ١٢ ، ٤ س + ٣ ص ≥ −١٢
«٧ ، −١٧»

٣ علم يوسف أنه للحفاظ على وزنه يجب عليه حرق السعرات الحرارية الزائدة عن طريق ممارسة المشى والجرى فوجد أن ممارسة المشى لمدة دقيقة واحدة تحرق ٦ سعرات حرارية وممارسة الجرى لمدة دقيقة واحدة تحرق ١٥ سعر حرارى ، وكان يوسف يمشى ما بين ١٠ ، ٢٠ دقيقة يوميًا ويجرى ما بين ٣٠ ، ٤٥ دقيقة يوميًا ، وكان الوقت المتاح لممارسة المشى والجرى يوميًا لايزيد عن ساعة واحدة فكم دقيقة يجب أن يمارس فيها يوسف المشى وكم دقيقة يمارس فيها الجرى يوميًا ليحرق أكبر قدر ممكن من السعرات الحرارية. «١٥ ، ٤٥ دقيقة»

---

٤ ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولابًا أسبوعيًا على الأكثر من نوعين مختلفين أ ، ب ، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهًا وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه ، وكان ما يباع من النوع الأول لا يقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثانى. أوجد عدد الدواليب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن. «١٥ ، ٥»

---

٥ يرغب مزارع فى تربية دجاج وبط فإذا كان المكان الذى سيربى فيه هذه الطيور لا يتسع إلا لثلاثمائة فقط من الطيور وهو يرى ألا يقل عدد الدجاج عن ضعف عدد البط فإذا كان ربحه فى كل دجاجة جنيهًا واحدًا وفى كل بطة جنيهين.

أوجد عدد ما يربيه المزارع من كل نوع حتى يحصل على أكبر ربح ممكن. «٢٠٠ ، ١٠٠»

---

٦ يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ ، ب ، ولا تقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة ، كما أنه لا يستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ) ، ولا يستخدم أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب) ، فإذا علمت أن ثمن السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات ، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات ، كم سمكة من كل من النوعين أ ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء ؟ «١٥ ، ٣٥»

---

٧ ينتج أحد مصانع الآلات الموسيقية نوعين من آلات النفخ ، يحتاج تصنيع النوع الأول ٢٥ وحدة من النحاس ، ٤ وحدات من النيكل ، ويحتاج تصنيع النوع الثانى ١٥ وحدة من النحاس ، ٨ وحدات من النيكل ، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع فى أحد الأيام ٩٥ وحدة من النحاس ، ٣٢ وحدة من النيكل ، وكان ربح المصنع فى الآلة من النوع الأول هو ٦٠ جنيهًا وربحه فى الآلة من النوع الثانى ٤٨ جنيهًا ، فما عدد الآلات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٢ ، ٣»

---

٨ وجد مزارع أنه يمكن تحسين نوعية مزروعاته إذا استخدم على الأقل ١٦ وحدة من النيترات ، ٩ وحدات من الفوسفات فى عملية التسميد للقيراط الواحد. يوجد فى الأسواق نوعان من السماد أ ، ب موضحة محتوياتها وتكلفة كل منها فى الجدول التالى :

السماد	عدد الوحدات لكل كيلوجرام		التكلفة لكل كيلوجرام
	النترات	الفوسفات	
أ	٤	١	١٧٠ قرشًا
ب	٢	٣	١٥٠ قرشًا

أوجد أقل تكلفة من مزيج السمادين أ ، ب تمكنان المزارع من توفير العدد الكافى من وحدات النيترات لتحسين نوعية مزروعاته. «٣ ، ٢»

٩ افترض أنك تُصنع وتبيع مرطبًا للجلد ، وإذا كان تصنيع عبوة المرطب العادى يستلزم ٢ سم^3 من الزيت ، ١ سم^3 من زبدة الكاكاو ، وكان تصنيع عبوة المرطب من النوع الممتاز يستلزم ١ سم^3 من الزيت ، ٢ سم^3 من زبدة الكاكاو ، سوف يكون ربحك هو ١٠ جنيهات لكل عبوة من النوع العادى ، ٨ جنيهات لكل عبوة من النوع الممتاز. فإذا كان لديك ٢٤ سم^3 من الزيت ، ١٨ سم^3 من زبدة الكاكاو ، فما عدد العبوات التى يمكن تصنيعها من كل نوع ، حتى تحصل على أكبر ربح ممكن ، وما هذا الربح ؟ «١٠ ، ٤»

١٠ سلعتان غذائيتان الأولى بها ٥ وحدات فيتامين وتعطى ٣ سعر حرارى والثانية بها وحدتان فيتامين وتعطى ٦ سعر حرارى ، فإذا كان المطلوب ٢٥ وحدة فيتامين على الأقل ، ٣٩ سعر حرارى على الأقل وكان ثمن الوحدة من السلعة الأولى ٦ جنيهات وثمن الوحدة من السلعة الثانية ٨ جنيهات. فما هى الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟ «٣ ، ٥»

١١ ينتج مصنع نوعين من المكاتب الصاج وكل نوع يقوم بتجميعه أحد العمال ثم يقوم عامل آخر بالدهان ، يستغرق العامل الأول ساعتين لتجميع الوحدة من النوع الأول ، و ٣ ساعات لتجميع الوحدة من النوع الثانى ، بينما يستغرق العامل الثانى ساعة ونصف الساعة لدهان الوحدة من النوع الأول وساعتين لدهان الوحدة من النوع الثانى ، فإذا كان العامل الأول يعمل ٦ ساعات يوميًا على الأقل ، بينما يعمل العامل الثانى ٦ ساعات يوميًا على الأكثر ، وكان ربح المصنع هو ٥٠ جنيهًا فى كل وحدة من كل من النوعين ، فما عدد الوحدات التى يجب أن ينتجها المصنع يوميًا من كلا النوعين ليحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٤ من النوع الأول»

١٢ مصنع ينتج نوعين من الصابون أ ، ب فإذا كان إنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج أ يحتاج إلى ٣٠ كجم من المواد الخام ، ١٨ ساعة من التشغيل على الماكينات ، وإنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب يحتاج إلى ٢٠ كجم من نفس المواد الخام ، ٢٤ ساعة من التشغيل على الماكينات. أوجد أكبر قيمة للمنتجات التى تنتج من ٧٥ كجم من المواد الخام ، ٧٢ ساعة من التشغيل على الماكينات. «٣٢٥ جنيهًا»

١٣ ترزيان ينتجان نموذجين من البلوزات (أ) ، (ب) فيقوم الترزى الأول بتفصيل القماش بينما يقوم الثانى بخياطته ، فإذا كان الترزى الأول يستغرق ساعة فى تفصيل النموذج (أ) وساعتين فى تفصيل النموذج (ب) ، وكان الترزى الثانى يستغرق ٣ ساعات لخياطة النموذج (أ) وساعة واحدة لخياطة النموذج (ب) ، وكان الترزى الأول يعمل فى اليوم ٨ ساعات على الأكثر بينما يعمل الثانى ٩ ساعات فى اليوم على الأكثر وكان مكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (أ) هو ١٠ جنيهات ومكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (ب) هو ١٥ جنيهًا. فأوجد عدد البلوزات من كل نموذج التى يمكنهما إنتاجه فى اليوم ليحصلا على أكبر ربح ممكن. «٢ ، ٣»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ يوسف وسامى يعملان على إحدى الماكينات لإنتاج منتج معين. فإذا كان يوسف ينتج وحدة المنتج فى الساعة بينما سامى ينتج وحدتين من هذا المنتج فى الساعة ولكنه يمكنه العمل ساعتين على الأكثر فى اليوم زيادة عن ساعات عمل يوسف. وإذا علمنا أن الماكينة يجب أن تعمل ٦ ساعات على الأقل يوميًا لتغطية نفقاتها وأنه يجب إنتاج ٨ وحدات من المنتج على الأقل يوميًا فأوجد أقل أجور يومية تدفع ليوسف وسامى إذا علم أن يوسف يحصل على ٥ جنيهات أجر فى الساعة وسامى يحصل على ٨ جنيهات أجر فى الساعة. «٢٠ ، ١٦»

٢ يراد وضع نوعين من الكتب (أ) ، (ب) على رف مكتبة طوله ٩٦ سم وحمولته القصوى ٢٠ كجم فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم وسمك الكتاب من النوع (أ) ٦ سم ومن النوع (ب) ٤ سم فأوجد عدد الكتب من كل نوع التى توضع على الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن «فسر وجود عدة حلول».

الوحدة الثالثة

حساب المثلثات

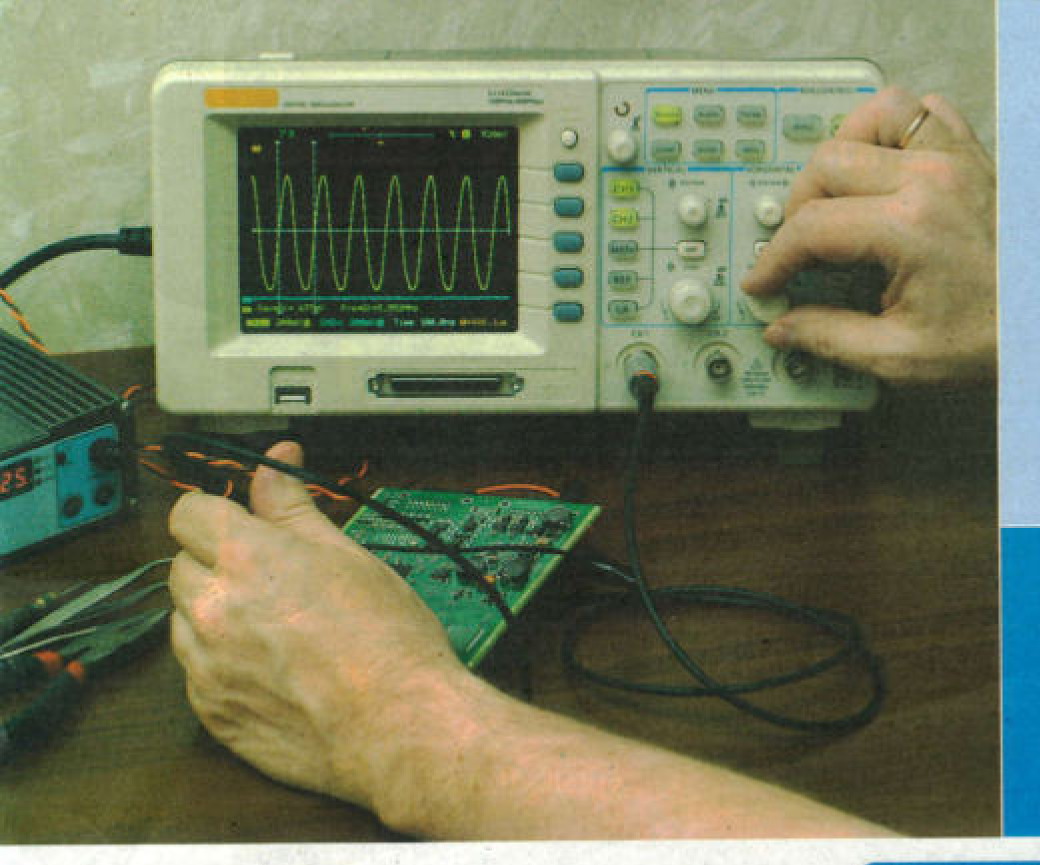


دروس الوحدة

نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية.
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية.
- يحدد ما إذا كانت المتساوية متطابقة أم معادلة مثلثية.
- يحل المعادلات المثلثية البسيطة فى الصورة العامة فى الفترة [٠ ، ٢ π[
- يتعرف على الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحل تطبيقات تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض.
- يتعرف على القطاع الدائرى ويوجد مساحته.
- يتعرف على القطعة الدائرية ويوجد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى.



الدرس

1

المتطابقات المثلثية

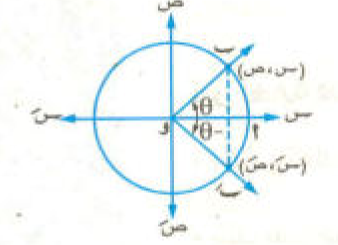
المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطـــابقة

هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذى يُعرف به كل طرف من طرفى المتساوية.

فمثلًا المتساوية : حتا (− θ) = حتا θ تسمى متطابقة لأنها صحيحة لجميع قيم المتغير θ الحقيقية.

وذلك لأن : فى الشكل المقابل :



من دراستنا السابقة للعلاقة بين الزاويتين المنتسبتين θ ، (− θ)

وجدنا أن : النقطة بَ (سَ ، صَ) صورة النقطة ب (س ، ص)

بالانعكاس فى محور السينات

اى ان سَ = س

∵ حتا (− θ) = سَ ، حتا θ = س ∴ حتا (− θ) = حتا θ لكل قيم θ الحقيقية

مـلاحظـة

العلاقات المثلثية بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة التي درسناها سابقًا هى متطابقات لأنها تتحقق لجميع قيم المتغير الحقيقية.

مثل جا $(\pi - \theta)$ = جا θ ، جتا $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ = − جا θ ، ....

المعـــادلة

هى متساوية صحيحة لبعض قيم المتغير الحقيقية التى تحققها وغير صحيحة للبعض الآخر الذى لا يحققها.

فمثلًا المتساوية : حتا θ = جا θ تسمى معادلة لأنها صحيحة لبعض وليس كل قيم المتغير θ الحقيقية.

وذلك لأن : في الشكل المقابل :

من دراستنا السابقة وجدنا أن : جتا θ = س ، جا θ = ص

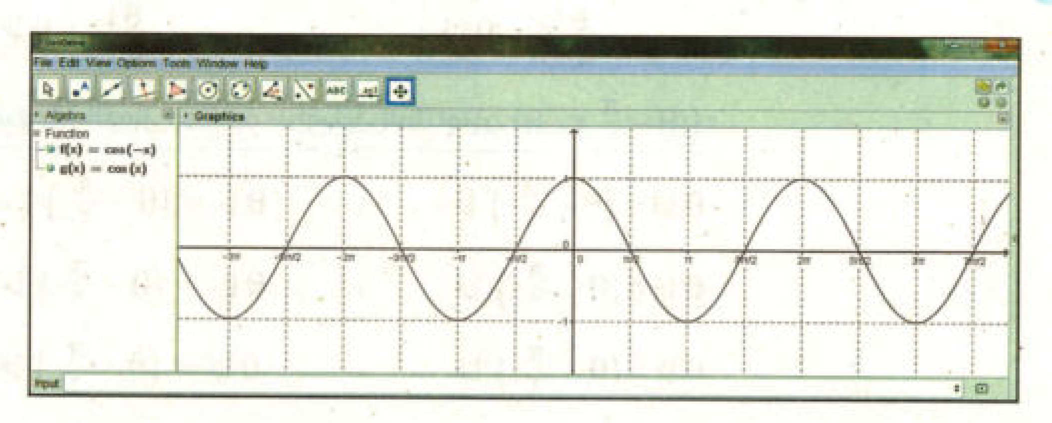
∴ جتا θ = جا θ عندما س = ص فقط

وهذا لا يحدث إلا عندما θ = ٤٥° أو ٢٢٥° أو أي من الزوايا المكافئة لهما.

ملاحظة

يمكن تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل متطابقة أو معادلة عن طريق التمثيل البياني للدالتين المحددتين لطرفيها، فإذا كانت الدالتان متقاطعتين في كل النقط (منطبقتين) كانت العلاقة تمثل متطابقة، وإذا كانتا متقاطعتين في بعض النقط فقط كانت تمثل معادلة.

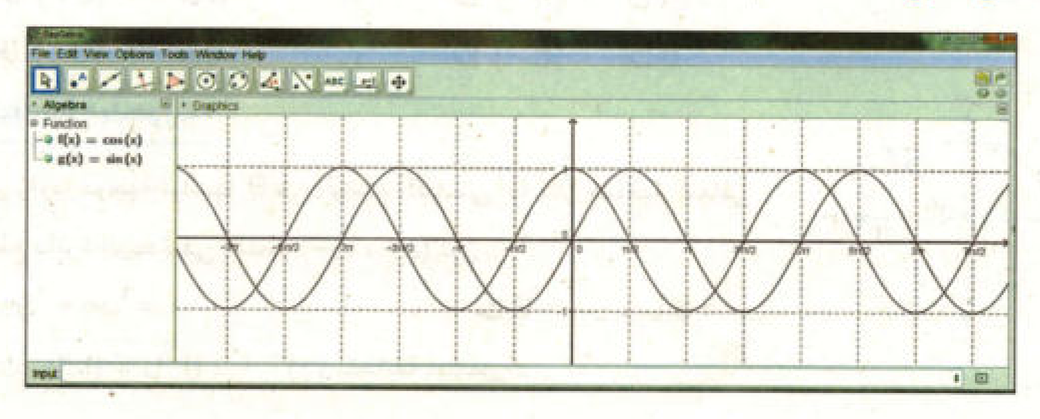
فمثلًا • **في الشكل التالي :**



الدالتان د١ : د١ (θ) = جتا (− θ) ، د٢ : د٢ (θ) = جتا θ متقاطعتان في جميع النقط أي منطبقتان.

ولذلك : المتساوية جتا (− θ) = جتا θ تسمى متطابقة.

• **في الشكل التالي :**



الدالتان د١ : د١ (θ) = جتا θ ، د٢ : د٢ (θ) = جا θ متقاطعتان في بعض النقط

ولذلك : المتساوية جتا θ = جا θ تسمى معادلة.

المتطابقات المثلثية الأساسية

* درسنا فيما سبق المتطابقات المثلثية الآتية :

١ متطابقة الدوال المثلثية ومقلوباتها :

- $\text{جتا}\,\theta = \frac{1}{\text{قا}\,\theta}$ ، $\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$
- $\text{جا}\,\theta = \frac{1}{\text{قتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta}$
- $\text{ظا}\,\theta = \frac{1}{\text{ظتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{1}{\text{ظا}\,\theta}$

٢ التعبير عن ظا θ ، ظتا θ بدلالة جا θ ، جتا θ :

- $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$
- $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

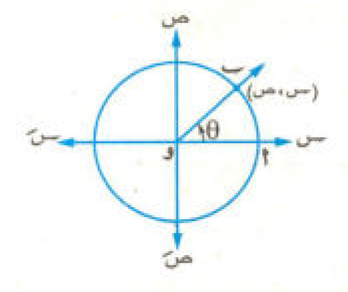
٣ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين $\left(\theta \text{ ، } \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$:

- $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جا}\,\theta$ ، $\text{قا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{قتا}\,\theta$
- $\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{جتا}\,\theta$ ، $\text{قتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{قا}\,\theta$
- $\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{ظتا}\,\theta$ ، $\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{ظا}\,\theta$

٤ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين $\left(\theta \text{ ، } (-\theta)\right)$:

- $\text{جتا}\,(-\theta) = \text{جتا}\,\theta$ ، $\text{قا}\,(-\theta) = \text{قا}\,\theta$
- $\text{جا}\,(-\theta) = -\text{جا}\,\theta$ ، $\text{قتا}\,(-\theta) = -\text{قتا}\,\theta$
- $\text{ظا}\,(-\theta) = -\text{ظا}\,\theta$ ، $\text{ظتا}\,(-\theta) = -\text{ظتا}\,\theta$

٥ متطابقة فيثاغورث :



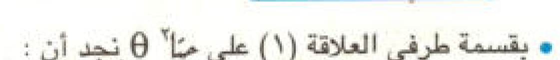
لأى زاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى إذا كان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص) فإن :

- $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$



، ∵ $\text{جتا}\,\theta = \text{س}$ ، $\text{جا}\,\theta = \text{ص}$

∴ $\boxed{\text{جتا}^2\,\theta + \text{جا}^2\,\theta = 1}$ (١) متطابقة فيثاغورث



- بقسمة طرفى العلاقة (١) على $\text{جتا}^2\,\theta$ نجد أن :

$$\frac{\text{جتا}^2\,\theta}{\text{جتا}^2\,\theta} + \frac{\text{جا}^2\,\theta}{\text{جتا}^2\,\theta} = \frac{1}{\text{جتا}^2\,\theta}$$

∴ $\boxed{1 + \text{ظا}^2\,\theta = \text{قا}^2\,\theta}$

• بقسمة طرفى العلاقة (١) على $جا^2 θ$ نجد أن :

$$\frac{جتا^2 θ}{جا^2 θ} + \frac{جا^2 θ}{جا^2 θ} = \frac{١}{جا^2 θ} \quad ∴ \boxed{ظتا^2 θ + ١ = قتا^2 θ}$$

ملاحظات

١ من العلاقة : $جا^2 θ + جتا^2 θ = ١$ **نستنتج أن :** $جا^2 θ = ١ - جتا^2 θ$ ، $جتا^2 θ = ١ - جا^2 θ$

٢ من العلاقة : $١ + ظا^2 θ = قا^2 θ$ **نستنتج أن :** $ظا^2 θ = قا^2 θ - ١$ ، $قا^2 θ - ظا^2 θ = ١$

٣ من العلاقة : $ظتا^2 θ + ١ = قتا^2 θ$ **نستنتج أن :** $ظتا^2 θ = قتا^2 θ - ١$ ، $قتا^2 θ - ظتا^2 θ = ١$

تحقق من فهمك

اختر الإجابة الصحيحة : $جا^2 θ + جتا^2 θ \neq$ ....

(أ) $ظا θ ظتا θ$ (ب) $جا^2 ٢θ + جتا^2 ٢θ$ (جـ) $ظتا^2 θ - قتا^2 θ$ (د) $قا^2 θ - ظا^2 θ$

تبسيط المقادير المثلثية

المقصود بتبسيط المقدار المثلثى هو استخدام المتطابقات المثلثية لوضع المقدار فى أبسط صورة له.

مثال ١

اكتب كلًا من المقادير الآتية فى أبسط صورة :

١ $\frac{١}{جتا^2 θ} - \frac{جا^2 θ}{جتا^2 θ}$

٢ $جا\left(\frac{π}{٢} - θ\right) قتا θ$

٣ $(جا θ + جتا θ)^2 - ٢ جا θ جتا θ$

٤ $\frac{١ + ظا^2\left(\frac{٣π}{٢} - θ\right)}{١ + ظا^2\left(\frac{٣π}{٢} + θ\right)}$

الحل

١ $\frac{١}{جتا^2 θ} - \frac{جا^2 θ}{جتا^2 θ} = قا^2 θ - ظا^2 θ = ١$

٢ $جا\left(\frac{π}{٢} - θ\right) قتا θ = جتا θ قتا θ = \frac{جتا θ}{جا θ} = ظتا θ$

٣ $(جا θ + جتا θ)^2 - ٢ جا θ جتا θ$

$= جا^2 θ + \cancel{٢ جا θ جتا θ} + جتا^2 θ - \cancel{٢ جا θ جتا θ}$

$= جا^2 θ + جتا^2 θ = ١$

لاحظ أن

$\frac{١}{جتا^2 θ} = \left(\frac{١}{جتا θ}\right)^2 = قا^2 θ$

$\frac{جا^2 θ}{جتا^2 θ} = \left(\frac{جا θ}{جتا θ}\right)^2 = ظا^2 θ$

تذكر أن

$(أ + ب)^2 = أ^2 + ٢ أ ب + ب^2$

٤ $\frac{1 + \text{ظتا}^2 (\frac{3\pi}{2} - \theta)}{1 + \text{ظا}^2 (\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{1 + \text{ظا}^2 \theta}{1 + \text{ظتا}^2 \theta}$

$= \frac{\text{قا}^2 \theta}{\text{قتا}^2 \theta}$

$= \frac{\text{حا}^2 \theta}{\text{حتا}^2 \theta} = \text{ظا}^2 \theta$

لاحظ أن

$\frac{\text{قا}^2 \theta}{\text{قتا}^2 \theta} = \frac{1}{\text{حتا}^2 \theta} \div \frac{1}{\text{حا}^2 \theta} = \frac{1}{\text{حتا}^2 \theta} \times \text{حا}^2 \theta$

$= \frac{\text{حا}^2 \theta}{\text{حتا}^2 \theta} = \text{ظا}^2 \theta$

حاول بنفسك

ضع فى أبسط صورة كلًا من المقادير الآتية :

١ $\frac{1}{\text{حا}^2 \theta} - \frac{1}{\text{ظا}^2 \theta}$ ٢ $\text{حا} (\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ قا} (2\pi - \theta)$ ٣ $\frac{1 - \text{حا}^2 \theta}{\text{حتا}^2 \theta - 1}$

المتطابقات المثلثية

* **لإثبات صحة المتطابقة المثلثية نتبع إحدى الطريقتين :**

١ نبدأ بأحد طرفى المتطابقة ونستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لوضعه على نفس صورة الطرف الآخر.

٢ نضع كلًا من طرفى المتطابقة المثلثية فى أبسط صورة لإثبات أن الطرفين لهما نفس الناتج عند وضعهما فى أبسط صورة.

مثال ٢

أثبت صحة المتطابقة : $\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta = 2 \text{ حا}^2 \theta - 1$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta = \text{حا}^2 \theta - (1 - \text{حا}^2 \theta)$

$= \text{حا}^2 \theta - 1 + \text{حا}^2 \theta = 2 \text{ حا}^2 \theta - 1 =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أن

$\text{حتا}^2 \theta = 1 - \text{حا}^2 \theta$

مثال ٣

أثبت صحة المتطابقة : $\text{حا}^4 \theta - \text{حتا}^4 \theta = 1 - 2 \text{ حتا}^2 \theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{حا}^4 \theta - \text{حتا}^4 \theta$

$= (\text{حا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta) (\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta)$

$= 1 \times (\text{حا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta)$

$= 1 - \text{حتا}^2 \theta - \text{حتا}^2 \theta = 1 - 2 \text{ حتا}^2 \theta =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أن

- $\text{حا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta = 1$
- $\text{حا}^2 \theta = 1 - \text{حتا}^2 \theta$

مثال ٤

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{جا}^2\theta}{1-\text{جتا}\,\theta} = 1+\text{جتا}\,\theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا}^2\theta}{1-\text{جتا}\,\theta} = \frac{1-\text{جتا}^2\theta}{1-\text{جتا}\,\theta} = \frac{(1+\text{جتا}\,\theta)(1-\text{جتا}\,\theta)}{1-\text{جتا}\,\theta} = 1+\text{جتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر.

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقتين الآتيتين :

١ $\frac{\text{جتا}^2\theta}{1+\text{جا}\,\theta} = 1-\text{جا}\,\theta$

٢ $(\text{جا}\,\theta+\text{جتا}\,\theta)^2 + (\text{جا}\,\theta-\text{جتا}\,\theta)^2 = 2$

مثال ٥

أثبت صحة المتطابقة : $\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = \text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta$

$= \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

$= \frac{\text{جا}^2\theta+\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{1}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}$

$= \text{قا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر.

لاحظ أنه

- لسهولة الإثبات نكتب المقدار بدلالة جا θ ، جتا θ فقط وذلك باستخدام العلاقات الآتية :
- $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$
- $\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta}$

مثال ٦

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{1-\text{ظا}^2\theta}{1+\text{ظا}^2\theta} = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{1-\text{ظا}^2\theta}{1+\text{ظا}^2\theta} = \frac{1-\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}}{\text{قا}^2\theta} = \frac{1-\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}}{\frac{1}{\text{جتا}^2\theta}} = \left(1-\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}\right)\times \text{جتا}^2\theta = \text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta$

$= \text{جتا}^2\theta - (1-\text{جتا}^2\theta) = \text{جتا}^2\theta - 1 + \text{جتا}^2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1 =$ الطرف الأيمن.

مثال ٧

أثبت صحة المتطابقة : $قا^٢ θ - طا^٢ θ جا^٢ θ = جتا^٢ θ + ٢ جا^٢ θ$

الحل

الطرف الأيمن $= قا^٢ θ - طا^٢ θ جا^٢ θ = \frac{١}{جتا^٢ θ} - \frac{جا^٢ θ}{جتا^٢ θ} \times جا^٢ θ$

$= \frac{١}{جتا^٢ θ} - \frac{جا^٤ θ}{جتا^٢ θ} = \frac{١ - جا^٤ θ}{جتا^٢ θ} = \frac{(١ + جا^٢ θ)(١ - جا^٢ θ)}{١ - جا^٢ θ}$

$= ١ + جا^٢ θ$ (١)

الطرف الأيسر $= جتا^٢ θ + ٢ جا^٢ θ = ١ - جا^٢ θ + ٢ جا^٢ θ$

$= ١ + جا^٢ θ$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان.

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{١ - ظتا^٢ θ}{١ + ظتا^٢ θ} = ٢ جا^٢ θ - ١$

مثال ٨

إذا كان : $جا θ + جا (٢٧٠° - θ) = \frac{١}{٢}$ **أوجد قيمة :** $جا θ جتا θ$ حيث $θ \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

الحل

$\because جا θ + جا (٢٧٠° - θ) = \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore جا θ - جتا θ = \frac{١}{٢}$ وبتربيع الطرفين.

$\therefore جا^٢ θ - ٢ جا θ جتا θ + جتا^٢ θ = \frac{١}{٤}$ $\quad \therefore ١ - ٢ جا θ جتا θ = \frac{١}{٤}$

$\therefore -٢ جا θ جتا θ = \frac{-٣}{٤}$ $\quad \therefore جا θ جتا θ = \frac{٣}{٨}$

تمارين 8 على المتطابقات المثلثية



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من العلاقات الآتية تمثل متطابقة ؟

(أ) جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) جا θ = جتا θ

(جـ) جا (π − θ) = جا θ (د) جا (٢π − θ) = $-\frac{1}{2}$

(٢) أى من العلاقات الآتية تمثل معادلة ؟

(أ) ظا $\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ = − ظتا θ (ب) جتا $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ = − جا θ

(جـ) جتا (− θ) = جتا θ (د) ظتا θ = − ظا ٣٠°

(٣) ظا θ قتا θ = ...

(أ) ١ (ب) جتا θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٤) $\frac{\text{ظا }\theta\text{ ظتا }\theta}{\text{قا }\theta}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) جا θ (ب) جتا θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٥) ١ − $\frac{1}{\text{قا}^2 \text{ ٣٧°}}$ = ...

(أ) ظا² ٣٧° (ب) ظتا² ٣٧° (جـ) جتا² ٣٧° (د) جا² ٣٧°

(٦) ٥ جتا² ٣٠° + ٥ جا² ٣٠° = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٢٥ (د) ١٠

(٧) $\frac{3}{\text{جا }\theta} \times \frac{-2}{\text{قتا }\theta}$ = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{-1}{6}$

(٨) جا² (١٨٠° − θ) + جا² (٢٧٠° − θ) = ...

(أ) ٢ جا² θ (ب) جتا² θ (جـ) ١ (د) −١

(٩) (١ + ظتا θ)² − ٢ ظتا θ = ...

(أ) قا² θ (ب) جتا² θ (جـ) قتا² θ (د) − قتا² θ

(١٠) (١ + ظتا² θ) × جا² θ = ...

(أ) − جا² θ (ب) ظا² θ (جـ) − جتا² θ (د) ١

(١١) جا θ جتا θ ظا θ في أبسط صورة يساوي ....

(أ) جا^2 θ　(ب) جتا^2 θ　(جـ) ظا^2 θ　(د) ١ - جا^2 θ

(١٢) $\frac{1 - \text{جا}^2\,\theta}{1 - \text{جتا}^2\,\theta}$ في أبسط صورة يساوي ....

(أ) -١　(ب) ١　(جـ) ظا^2 θ　(د) ظتا^2 θ

(١٣) $\frac{\text{قا}^2\,\theta - \text{ظا}^2\,\theta}{\text{جا}^2\,\theta + \text{جتا}^2\,\theta}$ في أبسط صورة يساوي ....

(أ) ١　(ب) ظا^2 θ　(جـ) -١　(د) قا^2 θ

(١٤) المقدار : $\frac{1 - \text{جتا}^2\,\beta}{\text{جا}^2\,\beta - 1}$ في أبسط صورة يساوي ....

(أ) - ظا^2 β　(ب) - ظتا^2 β　(جـ) ظا^2 β　(د) ظتا^2 β

(١٥) المقدار : $\frac{1 + \text{ظا}^2\,\theta}{1 + \text{ظتا}^2\,\theta}$ في أبسط صورة يساوي ....

(أ) ظا^2 θ　(ب) ظتا^2 θ　(جـ) ١　(د) جتا^2 θ

(١٦) جا^2 θ + جتا^2 θ + ظا^2 θ = ...

(أ) ١　(ب) ظتا^2 θ　(جـ) قتا^2 θ　(د) قا^2 θ

(١٧) (ظا^2 ٥٠° - قا^2 ٥٠°)^٥ = ...

(أ) ١　(ب) -١　(جـ) ٥　(د) -٥

(١٨) ٢ جا^2 θ + جتا^2 θ + $\frac{1}{\text{قا}^2\,\theta}$ = ...

(أ) ٢　(ب) ١　(جـ) ظا^2 θ　(د) قا^2 θ

(١٩) جا θ قتا θ + ٢ جتا θ قا θ + ٣ ظا θ ظتا θ = ...

(أ) ١　(ب) ٣　(جـ) ٥　(د) ٦

(٢٠) (١ - جتا θ) (١ + جتا θ) (١ + ظتا^2 θ) = ...

(أ) -١　(ب) ١　(جـ) جا θ　(د) ظا θ

(٢١) $\frac{\text{جا س جتا س ظا س} + \text{جا س جتا س ظتا س}}{\text{جا س قا س}}$ = ...

(أ) ظتا س　(ب) ظا س　(جـ) جتا س　(د) قتا س

(٢٢) $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta}$ = ...

(أ) ظا θ　(ب) جا θ + جتا θ　(جـ) قا θ قتا θ　(د) ١

(٢٣) $\frac{\text{جا}\,\theta\ \text{ظا}\,\theta}{(1 + \text{جتا}\,\theta)(1 - \text{جتا}\,\theta)}$ = ...

(أ) جا θ　(ب) جا^2 θ　(جـ) قا θ　(د) قتا θ

(٢٤) $\frac{٦ \text{ جتا}^٢ \theta - \text{جا}^٢ \theta + ١}{٧ \text{ جتا } \theta}$ = ...

(أ) جا θ (ب) جتا θ (جـ) − جا θ (د) − جتا θ

(٢٥) $\frac{(\text{قا س} + \text{طا س})(١ - \text{جا س})}{\text{جتا س}}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا س (د) قا س

(٢٦) $\frac{\text{جتا}^٢ \text{ س}}{١ - \text{جا س}} + \frac{\text{جتا}^٢ \text{ س}}{١ + \text{جا س}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ جا س

(جـ) ٢ جتا س (د) جا س + جتا س

(٢٧) $\frac{\text{جتا س} + ١}{\text{قا س}} - \text{جتا}^٢ \text{ س}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جا س (جـ) جتا^٢ س (د) جا^٢ س

(٢٨) $\frac{١ - \text{طا س}}{١ - \text{طتا س}}$ = ...

(أ) − طا س (ب) طا س (جـ) − طتا س (د) طتا س

(٢٩) $(\text{قا } \theta - \text{جتا } \theta)^٢ + (\text{قتا } \theta - \text{جا } \theta)^٢ - (\text{طتا } \theta - \text{طا } \theta)^٢$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٠) إذا كان : $\text{طا}^٢ \theta = ١٥$ فإن : $\text{قا}^٢ \theta$ = ...

(أ) ٢٢٥ (ب) ٢٢٦ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(٣١) إذا كان : $\text{طتا } \theta = \frac{١}{٣}$ فإن : $\text{قتا}^٢ \theta$ = ...

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١٠}{٩}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٢) إذا كانت : $\text{طا } \theta \text{ جتا } \theta = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ فإن : قا θ = ...

(أ) ± ٣ (ب) ± $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ (د) ± ١

(٣٣) إذا كان : جا θ + قتا θ = ٥ فإن : $\text{جا}^٢ \theta + \text{قتا}^٢ \theta$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٥

(٣٤) إذا كان : جا θ − جتا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : جا θ جتا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٤١}{٥٠}$ (د) $\frac{٩}{٥٠}$

(٣٥) إذا كان : قتا θ − طتا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن : قتا θ + طتا θ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٣٦) $\frac{\text{جا}^4 \theta - \text{جتا}^4 \theta}{\text{جا}^2 \theta - \text{جتا}^2 \theta} =$ ....

(أ) ظا θ قتا θ (ب) جا² θ − جتا² θ

(جـ) قتا² θ − ظتا² θ (د) ظا² θ − قا² θ

(٣٧) إذا كان : جا^أ θ × قتا^٦ θ = جا θ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٣٨) $\frac{\text{جا}^3 \theta + \text{جتا}^3 \theta}{1 - \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta} =$ ....

(أ) جتا θ − جا θ (ب) جتا θ + جا θ (جـ) ٢ قتا² θ (د) ٢ جا² θ

(٣٩) $\frac{1 - \text{جتا س}}{\text{جا س}} + \frac{\text{جا س}}{1 - \text{جتا س}} =$ ....

(أ) ٢ قا س (ب) ٢ قتا س (جـ) ٢ ظا س (د) ٢ جا س

(٤٠) (١ + جا² θ)² + ٢ (١ + جا² θ) (١ + جتا² θ) + (١ + جتا² θ)² = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤١) إذا كان : ٣ جتا² ٣٦° + ٣ جتا ٥٤° جا ٣٦° = ٧ − ٢ أ فإن : أ² + ١ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣ جتا² ٣٦°

(٤٢) (جا θ − جتا θ)⁴ − (جا θ + جتا θ)⁴ = ...

(أ) $\frac{8}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta}$ (ب) $\frac{-8}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta}$

(جـ) −٤ جا θ جتا θ (د) −١٦ قا θ قتا θ

(٤٣) إذا كانت θ قياس زاوية حادة فإن : $\sqrt{\frac{1 - \text{جا}\,\theta}{1 + \text{جا}\,\theta}} - \sqrt{\frac{1 + \text{جا}\,\theta}{1 - \text{جا}\,\theta}} =$ ....

(أ) − ظا θ (ب) −٢ ظا θ (جـ) ظا θ (د) ظتا θ

(٤٤) إذا كان : قا² θ + ظا² θ = ك فإن : قا⁴ θ − ظا⁴ θ = ...

(أ) ك (ب) ٢ + ك (جـ) ٢ − ك (د) ك²

(٤٥) إذا كان : $\frac{\text{قا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta} = \text{ظا}^{ن} \theta$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٦) إذا كان أ ب جـ ء رباعي دائري فإن : جتا أ + جتا ب + جتا جـ + جتا ء = ...

(أ) جتا ٣٦٠° (ب) جتا ١٨٠° (جـ) جتا ٩٠° (د) ٤ جتا أ

(٤٧) إذا كانت : أ = ٢ $جا^٢$ θ + ٥ $جتا^٢$ θ فإن : أ ∈ ....

(أ) [٠ ، ٣]　(ب) [١ ، ٥]　(جـ) [٠ ، ٥]　(د) [٢ ، ٥]

(٤٨) إذا كان : أ = ٢ جا س + جتا س ، ب = ٢ جتا س − جا س فإن : $أ^٢$ + $ب^٢$ = ...

(أ) ٤　(ب) ٥

(جـ) ٨ جا س جتا س　(د) ٤ $جا^٢$ س + ٥ $جتا^٢$ س

(٤٩) إذا كان θ ، α قياسى زاويتين حادتين وكان θ + α = ٩٠° فإن : $جا^٢$ θ + $جا^٢$ α = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢ $جا^٢$ θ　(د) ٢ $جتا^٢$ θ

(٥٠) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $جا^٢$ أ + $جتا^٢$ ب = ١ فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع.　(ب) متساوى الساقين.　(جـ) مختلف الأضلاع.　(د) قائم الزاوية.

(٥١) إذا كان : ظا θ = ٤ فإن : $\frac{جا^٢ θ + جتا^٢ θ}{جا^٢ θ - جتا^٢ θ}$ = ...

(أ) $\frac{١٧}{١٥}$　(ب) ١　(جـ) $\frac{-٧}{١٥}$　(د) −١

(٥٢) $\frac{جتا^٢ θ - جا θ - ١}{١ + جا θ}$ = ...

(أ) −١　(ب) جتا θ　(جـ) − جا θ　(د) جا θ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب فى أبسط صورة كلًا من المقادير الآتية «حيث θ قياس زاوية معرف عندها جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها» :

(١) $\frac{١}{جا^٢ θ} - \frac{١}{ظا^٢ θ}$

(٢) جتا $(\frac{π}{٢} - θ)$ قا $(\frac{π}{٢} - θ)$

(٣) جا (π − θ) قتا (π − θ)

(٤) $\frac{جا (\frac{π}{٢} - θ)}{جتا (٢π - θ)}$

(٥) $(جا θ + جتا θ)^٢$ − ٢ جا θ جتا θ

(٦) جا $(\frac{π}{٢} + θ)$ قا (− θ)

(٧) $جتا^٢$ θ قا θ قتا θ

(٨) جا θ قتا θ − $جتا^٢$ θ

(٩) جا $(\frac{π}{٢} - θ)$ جتا θ − جتا $(\frac{π}{٢} + θ)$ جا (π − θ)

(١٠) جا $(\frac{π}{٢} - θ)$ ظا $(\frac{π}{٢} - θ)$ قتا (π − θ)

(١١) جا θ جتا θ (ظا θ + ظتا θ)

(١٢) $\frac{١ + ظتا^٢ (\frac{٣π}{٢} - θ)}{١ + ظا^٢ (\frac{π}{٢} - θ)}$

(١٣) $\frac{جا θ جتا θ}{ظا θ} + \frac{ظا θ}{قا θ قتا θ}$

٢ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(١) 📖 ظا θ + ظتا θ = قا θ قتا θ

(٢) قتا θ − جا θ = جتا θ ظتا θ

(٣) ٢ جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ + جا^{٢} θ

(٤) 📖 جا^{٢} α + ظا^{٢} α جا^{٢} α = ظا^{٢} α

(٥) 📖 جا $(٩٠° - \mu)$ جتا μ = ١ − جا^{٢} μ

(٦) 📖 ظتا^{٢} μ − جتا^{٢} μ = ظتا^{٢} μ جتا^{٢} μ

(٧) قا^{٢} β + قتا^{٢} β = قا^{٢} β قتا^{٢} β

(٨) قا θ − جا θ ظا θ = جتا θ

(٩) ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ − (قا^{٢} θ + قتا^{٢} θ) = −٢

(١٠) ظا^{٢} θ جتا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ جا^{٢} θ = ١

(١١) (جا θ + جتا θ)^{٢} + (جا θ − جتا θ)^{٢} = ٢

(١٢) جا^{٢} θ قتا θ + جتا^{٢} θ قا θ = ١

(١٣) (١ − جا θ) (قا θ + ظا θ) = جتا θ

(١٤) جا θ جا $(٩٠° - \theta)$ ظا θ = ١ − جتا^{٢} θ

(١٥) جتا^{٢} θ ظا^{٢} θ + جتا^{٢} θ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

(١٦) جا^{٤} θ − جتا^{٤} θ + جتا^{٢} θ = جا^{٢} θ

(١٧) جا^{٢} α جا^{٢} β + جا^{٢} α جتا^{٢} β + جتا^{٢} α = ١

---

٣ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(١) 📖 $\dfrac{\text{جتا}\,\theta \times \text{ظا}\,\theta}{\text{قتا}\,\theta} = ١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta$

(٢) 📖 $\dfrac{\text{ظتا}\,\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\,\theta} = \text{جا}\,\theta \times \text{جتا}\,\theta$

(٣) $\dfrac{\text{جتا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta} + \text{ظا}\,\theta = \text{قا}\,\theta$

(٤) 📖 $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جا}\,\theta} = ١ + \text{جا}\,\theta$

(٥) $\dfrac{١ - \text{جا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta} = \text{قتا}^{٢}\,\theta - ١$

(٦) $\dfrac{١ - \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta} = ٢\,\text{جتا}^{٢}\,\theta - ١$

(٧) 📖 $\dfrac{\text{قتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}\,(١ - \text{جا}^{٢}\,\theta) = \text{ظتا}\,\theta$

(٨) 📖 $\dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\,(٩٠° - \theta)} - \text{ظا}^{٢}\,\theta = ١$

(٩) 📖 $\dfrac{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}{\text{قا}^{٤}\,\theta} = ١ - \text{جا}^{٢}\,\theta$

(١٠) 📖 $\dfrac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\alpha} - \dfrac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\beta} = \text{جتا}^{٢}\,\alpha - \text{جتا}^{٢}\,\beta$

(١١) $\dfrac{\text{جتا}^{٤}\,\theta - \text{جتا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}^{٤}\,\theta - \text{جا}^{٢}\,\theta} = \text{قا}^{٢}\,\theta - \text{ظا}^{٢}\,\theta$

(١٢) 📖 $(\text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta)^{٢} = \dfrac{١ - \text{جا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta}$

(١٣) 📖 $\dfrac{١}{١ + \text{ظتا}\,\theta} = \dfrac{\text{ظا}\,\theta}{١ + \text{ظا}\,\theta}$

(١٤) $\dfrac{\text{جا}^{٣}\,\alpha + \text{جتا}^{٣}\,\alpha}{\text{جا}\,\alpha + \text{جتا}\,\alpha} + \dfrac{\text{جا}^{٣}\,\alpha - \text{جتا}^{٣}\,\alpha}{\text{جا}\,\alpha - \text{جتا}\,\alpha} = ٢$

(١٥) 📖 $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\theta - \text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}\,\theta\,\text{جا}^{٢}\,\theta} = \text{قتا}\,\theta - \text{قا}\,\theta$

(١٦) $\dfrac{\text{جا}\,\theta\,\text{جا}\,(٩٠° - \theta)}{\text{ظا}\,\theta} + \dfrac{\text{ظا}\,(١٨٠° + \theta)}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta} = ١$

(١٧) (جا θ + قتا θ)^{٢} + (جتا θ + قا θ)^{٢} = ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ + ٧

(١٨) $\dfrac{١ - (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢}}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta - \text{ظتا}\,\theta} = ٢\,\text{ظا}^{٢}\,\theta$

٤ إذا كان : $\frac{٣ \text{ ظا } \theta - ٢ \text{ جا } \theta}{٣ \text{ ظا } \theta + ٢ \text{ جا } \theta} = \frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة : ظا θ «$-\frac{٣}{١٠}$»

---

٥ إذا كانت : جا θ + جتا θ = $\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة : جا θ جتا θ حيث : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ «$\frac{٥}{٨}$»

---

٦ إذا كان : قا θ − ظا θ = $\frac{١}{٤}$ فاحسب قيمة كل من : قا θ ، ظا θ «$\frac{١٧}{٨}$ ، $\frac{١٥}{٨}$»

---

٧ إذا كان : $\frac{\text{جا}^٢ \theta - \text{جتا}^٢ \theta}{\text{جا } \theta - \text{جتا } \theta} = \frac{٥}{٤}$ فأثبت أن : جا θ جتا θ = $\frac{٩}{٣٢}$

---

٨ إذا كان : ظا θ + ظتا θ = ٥ أوجد القيمة العددية لكل مما يأتى :

(١) ظا$^٢ \theta$ + ظتا$^٢ \theta$ «٢٣»

(٢) ظا$^٣ \theta$ + ظتا$^٣ \theta$ «١١٠»

(٣) ظا θ − ظتا θ «$\pm \sqrt{٢١}$»

(٤) ظا$^٢ \theta$ − ظتا$^٢ \theta$ «$\pm ٥ \sqrt{٢١}$»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : س + ص = ٣٠° فإن : ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) $٢ \sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت : جا $\theta = \frac{أ}{ب}$ ، $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن : $\sqrt{١ + \text{ظا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{\sqrt{ب^٢ - أ^٢}}$ (ب) $\frac{أ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ (جـ) $\frac{ب}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ (د) $\frac{ب}{\sqrt{ب^٢ - أ^٢}}$

(٣) إذا كان : $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فإن : $\sqrt{٤ + ٤ \text{ ظا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) ٢ قا θ (ب) ٢ جتا θ (جـ) −٢ قا θ (د) −٢ جتا θ

(٤) إذا كان : جا θ ، جتا θ هما جذرا المعادلة : ٢ س^٢ + ب س − ١ = ٠ فإن : ب = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −٤

(٥) إذا كان : ٣ جا θ + ٤ جتا θ = ٥ فإن : ٣ جتا θ − ٤ جا θ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

(٦) إذا كانت : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ وكانت ظا θ + ظتا θ = ٨ فإن : جا θ + جتا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٧) إذا كانت : $\theta \in] \cdot , \frac{\pi}{2} [$ فإن : $\sqrt{\text{قا}^2 \theta + \text{قتا}^2 \theta} =$ ....

(أ) $\frac{\text{قا} \theta}{\text{قتا} \theta}$ (ب) $\text{طا} \theta + \text{طتا} \theta$ (جـ) $\text{قا} \theta - \text{طا} \theta$ (د) $\text{قا} \theta + \text{طا} \theta$

(٨) إذا كان : $\text{حا} ^{\text{أ}} + \text{حا}^2 ^{\text{أ}} = ١$ فإن : $\text{حتا}^2 ^{\text{أ}} + \text{حتا}^4 ^{\text{أ}} =$ ....

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) $\text{حا}^2 ^{\text{أ}}$ (د) ٢

(٩) إذا كان : $\text{حا}^2 \theta + \text{حا}^2 ٢\theta + \text{حا}^2 ٣\theta + \cdots + \text{حا}^2 ١٠٠\theta = \text{ن}$

فإن : $\text{حتا}^2 \theta + \text{حتا}^2 ٢\theta + \text{حتا}^2 ٣\theta + \cdots + \text{حتا}^2 ١٠٠\theta =$ ....

(أ) $١ - \text{ن}$ (ب) ١٠٠ن (جـ) $١٠٠ - \text{ن}$ (د) $\text{ن} - ١٠٠$

(١٠) $\text{حا}^2 ١° + \text{حا}^2 ٢° + \text{حا}^2 ٣° + \cdots + \text{حا}^2 ٩٠° =$ ....

(أ) $٤٤\frac{١}{٢}$ (ب) ٤٥ (جـ) $٤٥\frac{١}{٢}$ (د) ٤٦

(١١) $\frac{\text{حتا}^2 ١° + \text{حتا}^2 ٢° + \text{حتا}^2 ٣° + \cdots + \text{حتا}^2 ١٨٠°}{\text{حتا} ١° + \text{حتا} ٢° + \text{حتا} ٣° + \cdots + \text{حتا} ١٨٠°} =$ ....

(أ) -٩٠ (ب) -٨٨ (جـ) ٨٨ (د) ٩٠

---

٢ أثبت أن : $\text{حا}^6 \theta + \text{حتا}^6 \theta = ١ - ٣ \text{حا}^2 \theta \text{ حتا}^2 \theta$

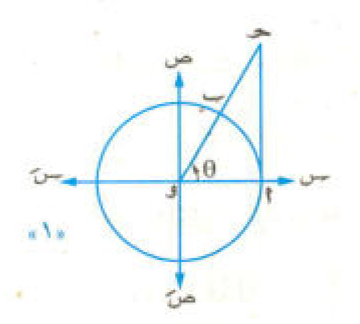
---

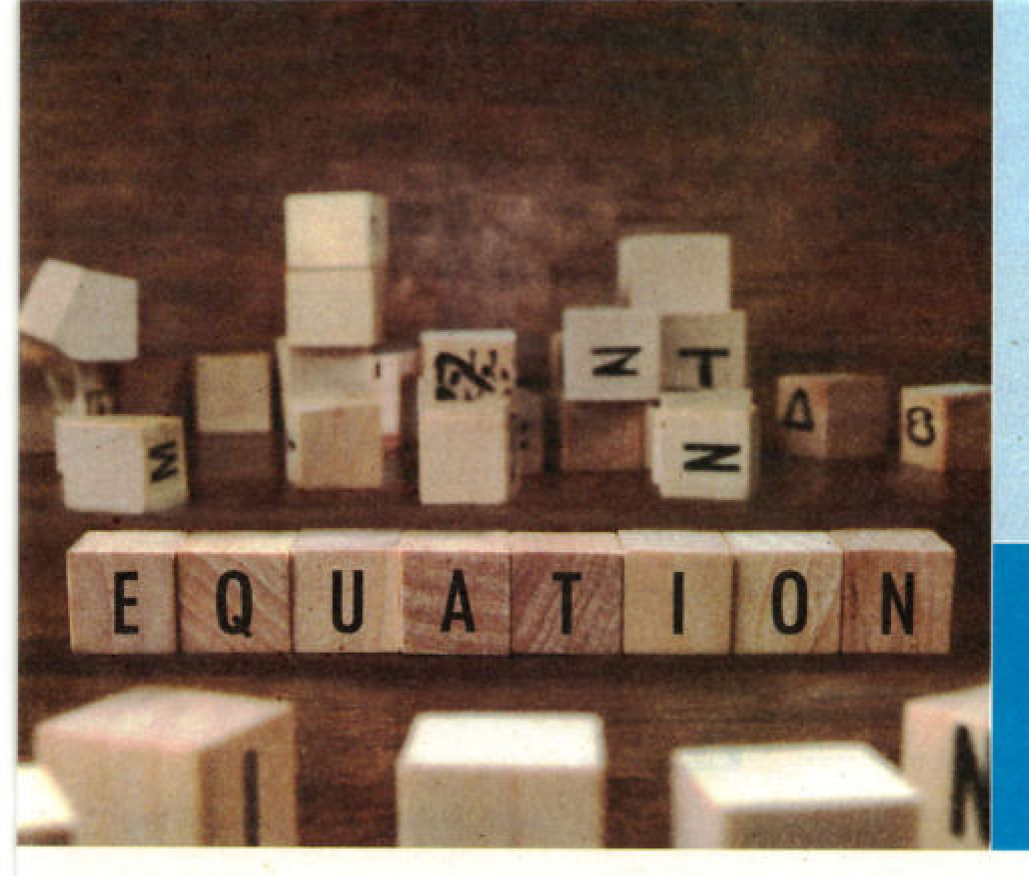
٣ في الشكل المقابل :

دائرة وحدة مركزها و

إذا كان : $\text{ب حـ} = \text{حا} \theta$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسًا للدائرة عند أ

أوجد قيمة : $\text{حتا}^2 \theta + \text{حا} \theta$





الدرس

2

حل المعادلات المثلثية

المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيم المتغير التى تحقق هذه المعادلة وذلك بالاستعانة بالمتطابقات المثلثية.

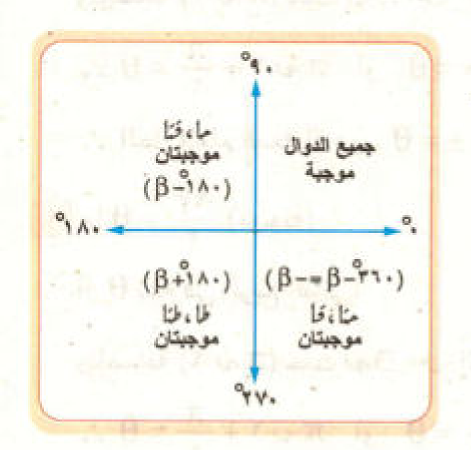
الحل العام للمعادلة المثلثية

لإيجاد الحل العام للمعادلة المثلثية على الصورة :

حتا θ = أ أو حا θ = أ أو ظا θ = أ نتبع الخطوات الآتية :

1 نوجد قياس الزاوية الحادة ولتكن β التى تحقق المعادلة : حتا θ = |أ| أو حا θ = |أ| أو ظا θ = |أ|

2 نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية حسب إشارة أ (انظر الشكل المقابل)



3 نوجد قيم الزاوية θ حيث إن :

- إذا كانت θ تقع فى الربع الأول فإن : θ = β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الثانى فإن : θ = ١٨٠° - β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الثالث فإن : θ = ١٨٠° + β
- إذا كانت θ تقع فى الربع الرابع فإن : θ = ٣٦٠° - β

4 نضيف عددًا من الدورات (٢ ω π) حيث ω ∈ ص إلى قيم θ لنحصل على الحل العام للمعادلة المثلثية.

ملاحظة

* $-1 \leq$ حتا $\theta \leq 1$ ، $-1 \leq$ حا $\theta \leq 1$ لجميع قيم θ الحقيقية

وبالتالى نجد أن المعادلتين : حا $\theta = أ$ ، حتا $\theta = أ$ ليس لهما حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية

إذا كانت : $أ \notin [-1 ، 1]$

فمثلا كل من المعادلات : حا $\theta = 1,3$ ، حتا $\theta = 2,5$ ، حا $\theta = -1,4$

، قتا $\theta = 0,5$ ، قا $\theta = -0,7$ ليس لها حلول حقيقية.

اى انه ليس بالضرورة أن تكون لكل المعادلات المثلثية حلول حقيقية.

مثال 1

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

1 حتا $\theta = \frac{1}{2}$ 2 2 حا $\theta - \sqrt{2} = 0$ 3 $\sqrt{3}$ ظا $\theta - 1 = 0$

الحل

1 حتا $\theta = \frac{1}{2}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 60°$

أو θ تقع فى الربع الرابع. $\therefore \theta = 360° - 60° = 300°$ وهى تكافئ $-60°$

وبإضافة ($2 ن \pi$) حيث $ن \in ص$ إلى قيم θ

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} + 2 ن \pi$ أو $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2 ن \pi$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2 ن \pi$ حيث $ن \in ص$

2 حا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 45°$

أو θ تقع فى الربع الثانى. $\therefore \theta = 180° - 45° = 135°$

وبإضافة ($2 ن \pi$) حيث $ن \in ص$ إلى قيم θ

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + 2 ن \pi$ أو $\theta = \frac{3}{4} \pi + 2 ن \pi$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{4} + 2 ن \pi$ أو $\theta = \frac{3}{4} \pi + 2 ن \pi$ حيث $ن \in ص$

3 ظا $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول. $\therefore \theta = 30°$

أو θ تقع فى الربع الثالث. $\therefore \theta = 180° + 30° = 210°$

وبإضافة ($٢ن\pi$) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ

∴ $\theta = \frac{\pi}{٦} + ٢ن\pi$ أو $\theta = \frac{٧}{٦}\pi + ٢ن\pi$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٦} + ٢ن\pi$ أو $\theta = \frac{٧}{٦}\pi + ٢ن\pi$ حيث ن ∈ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة بصورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٦} + ن\pi$ حيث ن ∈ ص

وذلك بإضافة نπ إلى أصغر قياس موجب.

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كانت β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، ن ∈ ص فإن :

1. الحل العام للمعادلة جا θ = أ هو : $\theta = \beta + ٢\pi ن$ ، $\theta = (\pi - \beta) + ٢\pi ن$

 ويمكن أن يكتب : $\theta = (-١)^{ن} \times \beta + \pi ن$

2. الحل العام للمعادلة جتا θ = أ هو : $\theta = \pm \beta + ٢\pi ن$

3. الحل العام للمعادلة ظا θ = أ هو : $\theta = \beta + \pi ن$

مثال ٢

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

1. جا θ = ٠
2. جتا θ = ٠
3. جا θ = ١
4. جتا θ = -١

الحل

1. جا θ = ٠ ∴ $\theta = ٠°$ أو $\theta = ١٨٠°$

(٩٠° ، (٠، ١) ، ١٨٠° ، (-١، ٠) ، و ، ٠° ، (١، ٠) ، ٢٧٠° ، (٠، -١))

وبإضافة ($٢\pi ن$) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ

∴ الحل العام للمعادلة هو :

$\theta = ٢\pi ن$ أو $\theta = \pi + ٢\pi ن$ حيث ن ∈ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى صورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pi ن$ حيث ن ∈ ص

2. جتا θ = ٠ ∴ $\theta = ٩٠°$ أو $\theta = ٢٧٠°$

وبإضافة ($٢\pi ن$) حيث ن ∈ ص إلى قيم θ

∴ الحل العام هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ أو $\theta = \frac{٣}{٢}\pi + ٢\pi ن$ حيث ن ∈ ص

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى صورة أكثر تبسيطًا كالآتى :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$ حيث ن ∈ ص

٣ جا θ = ١ ∴ θ = ٩٠°

∴ الحل العام هو : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ حيث ن ∈ ص

٤ جتا θ = −١ ∴ θ = ١٨٠°

∴ الحل العام هو : $\theta = \pi + ٢\pi ن$ حيث ن ∈ ص

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج الحل العام للمعادلات المثلثية للزوايا الربعية :

المعادلة	الحل العام
• جا θ = ٠	$\theta = \pi ن$
• جا θ = ١	$\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$
• جا θ = −١	$\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$
• جتا θ = ٠	$\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$
• جتا θ = ١	$\theta = ٢\pi ن$
• جتا θ = −١	$\theta = \pi + ٢\pi ن$

حاول بنفسك

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

١ ٢ جا θ − ١ = ٠ ٢ ٢ جتا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ ٣ ظا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

مثال ٣

أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ ظتا θ + ١ = ٠ ٢ جتا² θ − جتا θ = ٠

الحل

١ ظتا θ = −١ ∴ ظا θ = −١ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى. ∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

أو θ تقع فى الربع الرابع. ∴ θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

لاحظ أن

قياس الزاوية الحادة التى تحقق أن ظا θ = | −١ | هو ٤٥°

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة وهو $135°$

∴ الحل العام هو : $\theta = \frac{3}{4}\pi + \text{ن}\pi$ حيث ن ∈ ص

٢ جتا θ (جتا θ − ١) = ٠

∴ إما جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° أو θ = ٢٧٠° وهى تكافئ − ٩٠°

∴ $\theta = \frac{\pi}{2} + \text{ن}\pi$ حيث ن ∈ ص

أو جتا θ = ١ ∴ θ = ٠ ∴ θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{2} + \text{ن}\pi$ أو θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

مثال ٤

أوجد الحل العام للمعادلة : جا θ جتا θ = $\frac{1}{2}$ جا θ

الحل

∵ جا θ جتا θ − $\frac{1}{2}$ جا θ = ٠ ∴ جا θ (جتا θ − $\frac{1}{2}$) = ٠

∴ إما جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠°

∴ θ = ن π حيث ن ∈ ص

أو جتا θ − $\frac{1}{2}$ = ٠ ∴ جتا θ = $\frac{1}{2}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول. ∴ θ = ٦٠°

أو θ تقع فى الربع الرابع. ∴ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° وهى تكافئ − ٦٠°

∴ $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + ٢\text{ن}\pi$ حيث ن ∈ ص

∴ الحل العام هو : θ = ن π أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + ٢\text{ن}\pi$ حيث ن ∈ ص

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : ٢ جا θ جتا θ − $\sqrt{3}$ جا θ = ٠

حل المعادلة المثلثية فى الفترة] ٠ ، ٢ π [

مثال ٥

إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٣٦٠° [أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ ٢ جتا θ + ١ = ٠

٢ $\sqrt{2}$ قا θ − ٢ = ٠

الحـل

[١] ∵ ٢ حتا θ + ١ = ٠ ∴ حتا θ = $-\frac{1}{2}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{1}{2}$ قياسها °٦٠

∴ θ = °١٨٠ − °٦٠ = °١٢٠ أ، θ = °١٨٠ + °٦٠ = °٢٤٠ ∴ م.ح = {°١٢٠ ، °٢٤٠}

[٢] ∵ $\sqrt{2}$ قتا θ − ٢ = ٠ ∴ قتا θ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$

∴ حا θ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ قياسها °٤٥

∴ θ = °٤٥ أ، θ = °٣٦٠ − °٤٥ = °٣١٥ ∴ م.ح = {°٤٥ ، °٣١٥}

مثال ٦

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٤ حتا^2 θ − ٣ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، °٣٦٠[

الحـل

∵ ٤ حتا^2 θ − ٣ = ٠ ∴ ٤ حتا^2 θ = ٣

∴ حتا^2 θ = $\frac{3}{4}$ ∴ حتا θ = ± $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ إما حتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ قياسها °٣٠

∴ θ = °٣٠ أ، θ = °٣٦٠ − °٣٠ = °٣٣٠

أ، حتا θ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (سالبة) ∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

∴ θ = °١٨٠ − °٣٠ = °١٥٠ أ، θ = °١٨٠ + °٣٠ = °٢١٠

∴ مجموعة الحل = {°٣٠، °١٥٠ ، °٢١٠ ، °٣٣٠}

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π[:

[١] $\sqrt{2}$ قتا θ − ٢ = ٠ [٢] طا^2 θ = ١

مثال ٧

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، π]

الحل

∵ ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ ∴ جتا θ (٢ جا θ + ٣) = ٠

∴ إما جتا θ = ٠ ∴ θ = $\frac{\pi}{2}$ ، أ θ = $\frac{3\pi}{2}$ (مرفوض لأن θ ∈ [٠ ، π])

أ، ٢ جا θ + ٣ = ٠ ∴ جا θ = $\frac{-3}{2}$ (وهذه المعادلة ليس لها حل لأن -١ ≤ جا θ ≤ ١)

∴ م.ح = {$\frac{\pi}{2}$}

مثال ٨

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٤ جا² θ - ٣ جا θ جتا θ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحل

∵ ٤ جا² θ - ٣ جا θ جتا θ = ٠ ∴ جا θ (٤ جا θ - ٣ جتا θ) = ٠

∴ إما : جا θ = ٠ ومنها θ = ٠ أ، θ = ١٨٠°

أ، ٤ جا θ - ٣ جتا θ = ٠ أى ٤ جا θ = ٣ جتا θ

أى $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} = \frac{3}{4}$ أى ظا θ = $\frac{3}{4}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{3}{4}$ قياسها ٥٢ ٣٦° َ

∴ θ = ٥٢ ٣٦° َ أ، θ = ١٨٠° + ٥٢ ٣٦° َ = ٥٢ ٢١٦° َ

∴ م.ح = {٠° ، ١٨٠° ، ٥٢ ٣٦° َ ، ٥٢ ٢١٦° َ}

حاول بنفسك

إذا كانت : ٠° < θ < ٣٦٠° أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا θ جتا θ = ٣ جتا² θ

مثال ٩

أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا² θ - جتا θ - ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

الحـــل

بالتعويض عن $جا^2 \theta = 1 - جتا^2 \theta$ «لتوحيد النسب المثلثية فى المعادلة»

$\therefore ٢ (١ - جتا^2 \theta) - جتا \theta - ١ = ٠$

$\therefore ٢ - ٢ جتا^2 \theta - جتا \theta - ١ = ٠$

$\therefore ١ - جتا \theta - ٢ جتا^2 \theta = ٠$

$\therefore (١ + جتا \theta) (١ - ٢ جتا \theta) = ٠$

$\therefore$ إما : $١ + جتا \theta = ٠$ أى : $جتا \theta = -١$

$\therefore \theta = \boxed{١٨٠^\circ}$

أ، $١ - ٢ جتا \theta = ٠$

أى $جتا \theta = \frac{١}{٢}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، $\because$ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

$\therefore \theta = \boxed{٦٠^\circ}$ أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = \boxed{٣٠٠^\circ}$

$\therefore$ م.ح = $\{٦٠^\circ ، ١٨٠^\circ ، ٣٠٠^\circ\}$

استخدام التكنولوچيا

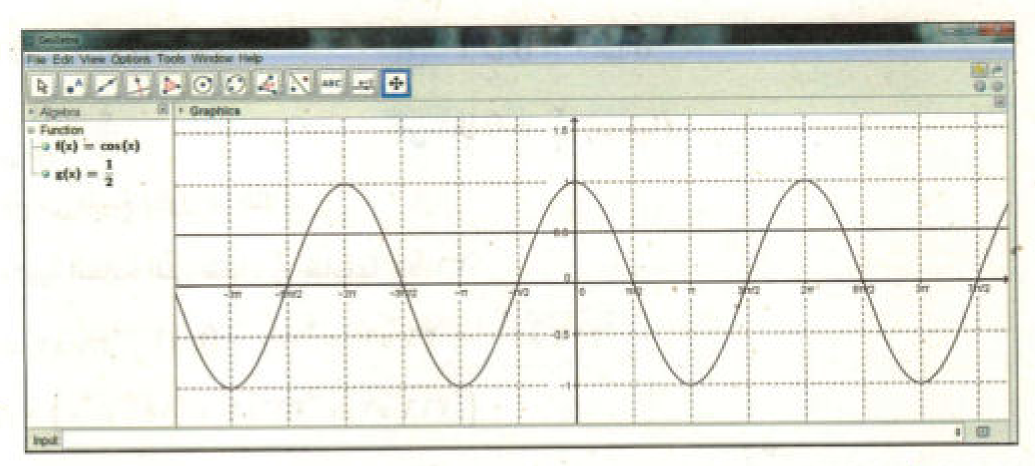
فى مثال (١) وجدنا أن :

الحل العام للمعادلة : $جتا \theta = \frac{١}{٢}$ هو $\theta = \pm \frac{\pi}{٣} + ٢ ن \pi$ حيث $ن \in ص$

ويمكن التأكد من صحة الحل برسم الدالتين $د_1$: $د_1(\theta) = جتا \theta$ ، $د_2$: $د_2(\theta) = \frac{١}{٢}$

باستخدام أحد البرامج الرسومية وتحديد قيم θ المناظرة لنقط تقاطع الدالتين ومقارنتها

بقيم θ فى الحل العام عند وضع $ن = \cdots ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، \cdots$



ونلاحظ من الرسم أن الدالتين تتقاطعان فى النقط :

$\cdots ، (\frac{-٥}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}) ، (\frac{-١}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}) ، (\frac{١}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}) ، (\frac{٥}{٣}\pi ، \frac{١}{٢}) ، \cdots$

أى أن $\theta = \cdots ، \frac{-٥}{٣}\pi ، \frac{-١}{٣}\pi ، \frac{١}{٣}\pi ، \frac{٥}{٣}\pi ، \cdots$

وهى نفس القيم التى نحصل عليها من الحل العام

عند التعويض عن $ن = \cdots ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، \cdots$



تمـارين 9 على حل المعادلات المثلثية

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ وكانت : جا $\theta + ١ = ٠$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $٠°$ (ب) $٩٠°$ (جـ) $١٨٠°$ (د) $٢٧٠°$

(٢) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ وكانت : جتا $\theta + ١ = ٠$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $٩٠°$ (ب) $١٨٠°$ (جـ) $٢٧٠°$ (د) $٣٦٠°$

(٣) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ وكانت : قتا $\theta - ١ = ٠$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $٠°$ (ب) $٩٠°$ (جـ) $١٨٠°$ (د) $٢٧٠°$

(٤) إذا كان : ٢ جا $\theta - \sqrt{٣} = ٠$ وكانت $٠° < \theta < ٣٦٠°$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $٣٠°$ أ، $١٥٠°$ (ب) $٦٠°$ أ، $١٢٠°$ (جـ) $١٥٠°$ أ، $٢١٠°$ (د) $١٢٠°$ أ، $٢٤٠°$

(٥) إذا كانت : $١٨٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ وكانت : ٢ جتا $\theta + ١ = ٠$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $٢١٠°$ (ب) $٢٤٠°$ (جـ) $٣٠٠°$ (د) $٣٣٠°$

(٦) إذا كان : $\sqrt{٢}$ جتا $\theta + ١ = ٠$ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، $\theta \in [٠ ، ٢\pi]$

فإن : $\theta =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}\pi$ (جـ) $\frac{٥}{٤}\pi$ (د) $\frac{٧}{٤}\pi$

(٧) مجموعة حل المعادلة : جا $\theta - \sqrt{٣}$ جتا $\theta = ٠$ حيث $\theta \in]\pi ، \frac{٣}{٢}\pi[$ هى ....

(أ) $\{\frac{٤}{٣}\pi\}$ (ب) $\{\frac{٧}{٦}\pi\}$ (جـ) $\{\frac{٥}{٤}\pi\}$ (د) $\{\frac{١}{٢}\pi\}$

(٨) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٣}$ ظا $\theta = ١$ حيث $٩٠° < \theta < ٢٧٠°$ هى ....

(أ) $\{٣٠°\}$ (ب) $\{١٥٠°\}$ (جـ) $\{٢١٠°\}$ (د) $\{٢٤٠°\}$

(٩) مجموعة حل المعادلة : جا θ + جتا $\theta = ٠$ حيث $١٨٠° < \theta < ٣٦٠°$ تساوى ....

(أ) $\{٢١٠°\}$ (ب) $\{٢٢٥°\}$ (جـ) $\{٢٤٠°\}$ (د) $\{٣١٥°\}$

(١٠) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ١٨٠°$ ، ظتا $\theta = ١$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $٣٠°$ (ب) $٤٥°$ (جـ) $٦٠°$ (د) $١٣٥°$

(١١) إذا كانت : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ، جا θ ظا $\theta = \frac{١}{٢}$ فإن مجموعة الحل هى ....

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{\frac{\pi}{٣}\}$ (جـ) $\{\frac{٤}{٣}\pi\}$ (د) $\{\frac{٥}{٣}\pi\}$

(١٢) مجموعة حل المعادلة : $جا^2 \theta + 1 = 0$ ، $\theta \in [0 ، \pi]$ هي ....

(أ) $\{\frac{\pi}{2}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{4}\}$ (جـ) $\{\pi\}$ (د) $\varnothing$

(١٣) إذا كان : $قا(-\theta) = 2$ حيث $0^\circ \le \theta < 180^\circ$ فإن : $\theta = $ ....

(أ) 60° (ب) 30° (جـ) 120° (د) 150°

(١٤) الحل العام للمعادلة : $\sqrt{3}\, طا\, \theta - 1 = 0$ هو .... ($ن \in ص$)

(أ) $\frac{\pi}{6} + \pi ن$ (ب) $2 ن \pi \pm \frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{3} + \pi ن$ (د) $2 ن \pi \pm \frac{\pi}{3}$

(١٥) الحل العام للمعادلة : $جا\, \theta = \frac{1}{2}$ هو .... ($ن \in ص$)

(أ) $2 ن \pi \pm \frac{\pi}{3}$ (ب) $2 ن \pi \pm \frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{6} + \pi ن$ (د) $\frac{\pi}{3} + \pi ن$

(١٦) الحل العام للمعادلة : $طا\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{3}$ هو .... ($ن \in ص$)

(أ) $\frac{\pi}{3} + ن \pi$ (ب) $\frac{\pi}{3} + 2 ن \pi$

(جـ) $\frac{4\pi}{3} + 2 ن \pi$ (د) $\frac{\pi}{3} + 2 ن \pi$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2 ن \pi$

(١٧) إذا كان : $5\, جا\, س = 12\, جتا\, س$ حيث $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ فإن : $س \simeq$ ....

(أ) $157^\circ\ 22'\ 48''$ (ب) $112^\circ\ 37'\ 12''$ (جـ) $22^\circ\ 37'\ 12''$ (د) $67^\circ\ 22'\ 48''$

(١٨) إذا كانت : $3^{جا\, \theta} = 1$ حيث $\theta \in]0 ، 2\pi[$ فإن : $\theta = $ ....$^\circ$

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) π (د) $\frac{3\pi}{2}$

(١٩) إذا كان : $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $7^{طا\, \theta} = \frac{1}{49}$ هي ....

(أ) $\{30^\circ\}$ (ب) $\{30^\circ ، 150^\circ\}$ (جـ) $\{210^\circ ، 330^\circ\}$ (د) $\varnothing$

(٢٠) إذا كان : $جا\, س = \frac{-1}{2}$ ، $جتا\, س = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $س \in]0 ، 2\pi[$ فإن : $س = $ ....

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{5\pi}{6}$ (جـ) $\frac{7\pi}{6}$ (د) $\frac{11\pi}{6}$

(٢١) إذا كانت $س \in [0 ، 2\pi[$ فإن مجموعة حل المعادلة : $جتا\, س = \frac{1}{2}$ هي نفسها مجموعة حل المعادلة ....

(أ) $طا\, س = 2\, جا\, س$ (ب) $2\, جتا^2\, س = جتا\, س$

(جـ) $2\, جتا^2\, س + 3\, جتا\, س = 2$ (د) $جتا\, (س - \frac{1}{2}) = 0$

(٢٢) إذا كانت : $\theta \in [0 ، 2\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : $2\, جا\, \theta = 3$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) إذا كانت : $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $طا\, (\theta - 90^\circ) = \sqrt{3}$ هي ....

(أ) $\{30^\circ ، 210^\circ\}$ (ب) $\{150^\circ ، 210^\circ\}$

(جـ) $\{150^\circ ، 330^\circ\}$ (د) $\{210^\circ ، 330^\circ\}$

(٢٤) إذا كانت : $٠ \leq$ س $< ٢\pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : حتا $\left(س - \frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٤} ، \frac{-\pi}{٤}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi}{٤}\right\}$ (جـ) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٧\pi}{١٢}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٥\pi}{١٢}\right\}$

(٢٥) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ حتا^٢ $\theta - ١ = ٠$ هى ....

(أ) $\{٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥°\}$ (ب) $\{٤٥° ، ٣١٥°\}$

(جـ) $\{١٣٥° ، ٢٢٥°\}$ (د) $\{٤٥° ، ٢٢٥°\}$

(٢٦) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ فإن مجموعة حل المعادلة : حتا^٢ θ − حتا $\theta = ٠$ هى ....

(أ) $\{٠° ، ٩٠°\}$ (ب) $\{٠° ، ٩٠° ، ١٨٠°\}$

(جـ) $\{٠° ، ٩٠° ، ٢٧٠°\}$ (د) $\{٩٠° ، ٢٧٠°\}$

(٢٧) إذا كانت $٠ \leq$ س $< ٢\pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\frac{\text{حتا}^٢ س - \text{حا}^٢ س}{١ - \text{حا}^٢ س} + ٢ = ٠$ هى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(جـ) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(٢٨) إذا كانت $٠° < \theta \leq ٣٦٠°$ فإن مجموعة حل المعادلة : حا $(٢\theta + ٣٠°) = \sqrt{٣}$ حتا $(٢\theta + ٣٠°)$

هى ....

(أ) $\{٣٠° ، ١٢٠°\}$ (ب) $\{٦٠° ، ٢٤٠°\}$

(جـ) $\{١٥° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠°\}$ (د) $\{١٥° ، ١٠٥° ، ١٩٥° ، ٢٨٥°\}$

(٢٩) إذا كان : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن مجموعة الحل للمعادلة : حا θ + قتا $\theta = ٢$ تساوى ....

(أ) $\left\{\frac{\pi}{٢}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{٣}\right\}$ (جـ) $\{\pi\}$ (د) $\left\{\frac{٣\pi}{٢}\right\}$

(٣٠) عدد حلول المعادلة : حتا^٢ θ − ٤ حتا θ + ٤ = ٠ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣١) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٣٦٠°$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ حتا^٢ θ − ٥ حتا θ − ٣ = ٠ هى ....

(أ) $\{٣٠° ، ١٥٠°\}$ (ب) $\{٦٠° ، ١٢٠°\}$

(جـ) $\{٦٠° ، ٢٤٠°\}$ (د) $\{١٢٠° ، ٢٤٠°\}$

(٣٢) إذا كانت : $٠° \leq \theta < ٢٧٠°$ فإن مجموعة حل المعادلة : ٢ حا^٢ θ + ٣ حا θ + ١ = ٠ هى ....

(أ) $\{٢٤٠°\}$ (ب) $\{٢١٠°\}$ (جـ) $\{٢٢٥°\}$ (د) $\{٣٣٠°\}$

(٣٣) أى من قيم س التالية تحقق المعادلة : حا س + $\frac{١}{\text{حا} س} = \frac{٧}{٢\sqrt{٣}}$ ؟

(أ) ١٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٣٤) إذا كانت : $\theta \in [\cdot , \pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : جا θ جتا $\theta = \frac{1}{2}$ جا θ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٥) إذا كانت : $\cdot < \theta < 2\pi$ فإن عدد حلول المعادلة : جتا^4 θ − جا^4 θ = جا θ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت : $\theta \in [\cdot , 2\pi[$ وكانت س هى مجموعة حل المعادلة : جا $\theta = \cdot$ ، ص هى مجموعة حل المعادلة : جتا $\theta = \frac{1}{2}$ فإن مجموعة حل المعادلة : جا θ (٢ جتا θ − ١) = ٠ هى ....

(أ) س ∩ ص (ب) س ∪ ص (جـ) س − ص (د) ص − س

(٣٧) إذا كانت : $\theta \in [\cdot , 2\pi[$ وكانت س تمثل مجموعة حل المعادلتين : جا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جتا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

وكانت ص تمثل مجموعة حل المعادلة : جا θ = جتا θ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س ⊂ ص (جـ) ص ⊂ س (د) ن(س) > ن(ص)

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : (١ + جا θ)^2 = جتا θ + ٢ جا θ حيث $0° \leq \theta < 360°$ هى ....

(أ) $\{0°\}$ (ب) $\{0° ، 180°\}$ (جـ) $\{180° ، 270°\}$ (د) $\{0° ، 90° ، 180°\}$

(٣٩) إذا كانت : س ، ص $\in [\cdot , 2\pi]$ ، θ = س + ص فإن مجموعة قيم θ التى تحقق أن جا س جا ص = ١ تساوى ....

(أ) $\{\pi ، 2\pi\}$ (ب) $\{\pi ، 3\pi\}$ (جـ) $\{\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{3}\}$

(٤٠) إذا كان الحل العام للمعادلة : جا θ = ٣أ − ٤ هو $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن حيث ن عدد صحيح فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\frac{5}{3}$

(٤١) الحل العام للمعادلة : جا $\frac{3}{2}\theta$ = صفر هو ....

(أ) π ن (ب) $\frac{3}{2}\pi$ ن (جـ) $\frac{2}{3}\pi$ ن (د) ٣ π ن

(٤٢) الحل العام للمعادلة : جا θ جتا θ = ٠ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) ٢ π ن (ب) π ن (جـ) $\frac{\pi}{2}$ ن (د) $\frac{\pi}{4}$ ن

(٤٣) إذا كانت : $\theta \in [\cdot , 2\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : $\sqrt{\text{جتا}^2 \theta} = \frac{1}{2}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤٤) مجموعة حل المعادلة : ظا θ + ظتا $\theta = \sqrt{3}$ حيث $\cdot < \theta < 2\pi$ هى ....

(أ) $\{\frac{\pi}{6}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{6} ، \frac{7\pi}{6}\}$ (جـ) $\{\frac{\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}\}$ (د) $\{\frac{7\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}\}$

(٤٥) إذا كانت : $\theta \in]\cdot , \frac{\pi}{2}[$ وكانت : ظا θ + ظا^2 θ = ٢ فإن : ظتا^2 θ + ظتا^4 θ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(٤٦) إذا كان : جتا θ أحد جذرى المعادلة : س^2 − س ظا θ + جا^2 $\theta = \frac{1}{2}$ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (جـ) $60°$ (د) $120°$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) جا $\theta = \frac{1}{2}$ (٢) جتا $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (٣) ظا $\theta = \sqrt{3}$

(٤) جا $\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (٥) جتا $\theta = \frac{-1}{2}$ (٦) ظا $\theta = -1$

(٧) قتا $\theta = -2$ (٨) قا $\theta = \sqrt{2}$ (٩) ظتا $\theta = -\sqrt{3}$

(١٠) ٢ جتا $\theta - \sqrt{3} = 0$ (١١) ٢ جا $\theta + \sqrt{2} = 0$ (١٢) جتا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}$

(١٣) ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا $\theta = 0$ (١٤) جا θ جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ (١٥) ٢ جا^2 $\theta - \sqrt{3}$ جا $\theta = 0$

(١٦) جتا^2 θ − جتا $\theta = 0$ (١٧) ٢ جا^2 θ = جا θ

(١٨) $\sqrt{2}$ جا θ جتا θ − جا $\theta = 0$ (١٩) ٢ جتا^2 θ + جتا $\theta = 0$ (٢٠) ٢ جتا^2 θ + ٣ جتا $\theta + 1 = 0$

---

٢ إذا كانت $\theta \in [0 , 2\pi[$ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) ٢ جتا $\theta - 1 = 0$ (٢) ٢ جا $\theta + 1 = 0$ (٣) ٢ جتا $\theta + \sqrt{3} = 0$

(٤) ظا $\theta - 1 = 0$ (٥) ٣ قتا $\theta + 2 = 0$ (٦) ٤ جا $\theta + 3 = 0$

(٧) قا $\theta + \sqrt{2} = 0$ (٨) ٤ ظا $\theta - 5 = 0$ (٩) جا θ − ٢ جتا $\theta = 0$

(١٠) جتا $\theta + 1 = 0$ (١١) جا θ جتا $\theta = 0$ (١٢) $\frac{\text{جا } 25^\circ}{\text{جتا } 65^\circ}$ + ظا$(90^\circ - \theta) = 0$

(١٣) جتا $(\theta - 50^\circ) = \frac{1}{2}$ (١٤) ٤ جا^2 $\theta = 3$ (١٥) ٣ قا^2 $\theta = 4$

(١٦) جا^2 θ − جتا^2 $\theta = 0$ (١٧) ٣ جتا^2 θ + ٢ جا θ جتا $\theta = 0$

(١٨) ٤ جا^2 θ − ٣ جا θ جتا $\theta = 0$ (١٩) ٤ ظا^2 θ + ٣ ظا $\theta = 0$

(٢٠) ٢ جا^2 θ + جا $\theta - 1 = 0$ (٢١) ظا^2 $\theta - \frac{1}{\text{ظا } \theta} = 0$

---

٣ أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة $[0 , \frac{3\pi}{2}]$:

(١) ظا^2 θ − ظا $\theta = 0$ (٢) ٢ جا θ جتا θ − جتا $\theta = 0$

---

٤ حل المعادلة : جا θ جتا $\theta - \frac{1}{2}$ جتا $\theta = 0$ إذا كانت : $0^\circ < \theta < 180^\circ$

---

٥ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) جتا θ = جا ٢ θ (٢) جتا ٢ θ = جا θ

(٣) جتا ٥ θ = جا ٤ θ (٤) قا ٤ θ = قتا ٢ θ

٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة [٠ ، π[:

(١) ٢ جا٢ θ − ٥ جا θ + ٢ = ٠ | (٢) ٤ جا٢ θ + ٨ جا θ + ٣ = ٠
(٣) ٢ ظا٢ θ − ظا θ − ١ = ٠ | (٤) ٢ قا٢ θ − ٧ قا θ + ٢ = ٠

---

٧ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلتين : ٢ جتا θ + ١ = ٠ ، ظا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ «٢٤٠°»

---

٨ أوجد مجموعة حل المعادلة : جا $\left(\frac{٩\,θ}{٤}\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{π}{٢}$[«{٢٠° ، ٦٠°}»

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول المعادلة : جا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٦π] هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) إذا كان : جا أ + جا ب = ٢ فإن : ....

(أ) جتا أ + جتا ب = صفر (ب) جتا أ − جتا ب = ١
(جـ) جا أ − جا ب = ١ (د) جا (أ + ب) = −١

(٣) مجموعة حل المعادلة : جتا س + جا س = ٢ حيث س ∈ [٠ ، π] هى ....

(أ) {$\frac{π}{٢}$} (ب) {صفر} (جـ) {صفر ، $\frac{π}{٢}$} (د) ∅

(٤) إذا كانت ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° فإن عدد حلول المعادلة : ٣ جا س = ظا س هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥) إذا كان : ظا θ + ظتا θ = ٢ فإن : ظا٢٠١٩ θ + ظتا٢٠١٩ θ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) قيم θ التى تجعل جذرى المعادلة التربيعية : س٢ + ٢ س + ٢ جتا θ = ٠ متساويين حيث θ ∈ [٠ ، ٢π] هى ....

(أ) $\frac{π}{٦}$ ، $\frac{٥π}{٦}$ (ب) $\frac{π}{٣}$ ، $\frac{٢π}{٣}$ (جـ) $\frac{π}{٣}$ ، $\frac{٥π}{٣}$ (د) $\frac{π}{٦}$ ، $\frac{٧π}{٦}$

(٧) مجموع حلول المعادلة : جا٢ س − جا س جتا س = جتا س − جا س حيث س ∈]٠ ، ٢π[هو ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٨) مجموع حلول المعادلة : حتا ٢ س = − حا ٢ س حيث س ∈ [٠ ، ٢ π] هو ....

(أ) $\frac{٢\pi}{٢}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٨}$ (جـ) $\frac{٩\pi}{٢}$ (د) $\frac{١١\pi}{٢}$

(٩) إذا كانت θ ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ وكانت للمعادلة : $س^٢ - (ظا θ + \frac{١}{ظا θ})$ س + ١ = صفر جذر وحيد موجب

فإن : حا θ حتا θ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٠) إذا كان : ٤ حتا س + ٣ حا س = ٣ فإن : ظا س = ... حيث س ∈ $]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٥}{١٢}$ (جـ) $\frac{-٧}{٢٤}$ (د) $\frac{-٨}{١٥}$

(١١) الحل العام للمعادلة : ظتا θ − ظا θ = قا θ هو ....

(أ) $(-١)^{ن} \times \frac{\pi}{٦} + ن\pi$ (ب) $\frac{\pi}{٢} + ن\pi$

(جـ) $\frac{٣\pi}{٢} + ٢ن\pi$ (د) $-\frac{\pi}{٦} + ٢ن\pi$

---

٢ إذا كانت θ ∈ [٠ ، ٢ π[فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) ٢ $حتا^٢$ θ + ١١ حا $(\frac{\pi}{٢} - θ)$ − ٦ = ٠

(٢) ٤ حا θ + قتا θ − ٤ = ٠

(٣) حتا θ + قا θ حتا θ $ظتا^٢$ θ = $\sqrt{٣}$

(٤) $ظا^٤$ θ − ٣ $ظا^٢$ θ + ٢ = ٠

(٥) ٢ حا θ حتا θ + ٢ حا θ − حتا θ − ١ = ٠

(٦) $\sqrt{٣}$ $ظا^٢$ θ − $(١ + \sqrt{٣})$ ظا θ + ١ = ٠

(٧) $ظا^٢$ θ + $قا^٢$ θ = ٧

(٨) ٦ $ظا^٢$ θ + ٥ قا θ + ٥ = ٠



الدرس 3

حل المثلث القائم الزاوية

- أى مثلث يحتوى على ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، والمقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه الغير معلومة.
- لحل المثلث القائم الزاوية يلزم معرفة : طولى ضلعين فيه أ، طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين.
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة ونظرية فيثاغورث فى حل المثلث القائم الزاوية حيث :

فى المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب

١ $\text{جا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أح}}$ ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أح}}$

، $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب ح}}$

٢ $(\text{أح})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب ح})^2$

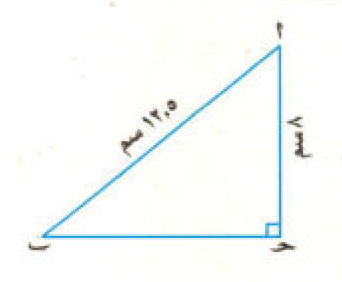
أ ب ح θ الوتر المقابل المجاور

أولاً حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين



حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ح والذى فيه : أ ح = ٨ سم ، أ ب = ١٢,٥ سم

الحل



- $\because \text{جا ب} = \frac{\text{أح}}{\text{أب}}$ $\therefore \text{جا ب} = \frac{8}{12.5}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق $(\angle \text{ب}) \approx 39^\circ\ 47'\ 41''$

- $\because$ ق $(\angle \text{ب}) = 39^\circ\ 47'\ 41''$

$\therefore$ ق $(\angle \text{أ}) = 90^\circ - 39^\circ\ 47'\ 41'' = 50^\circ\ 12'\ 19''$

• ∵ $\frac{ب حـ}{أ ب}$ = جتا ب ∴ $\frac{ب حـ}{١٢,٥}$ = جتا (٤١ ٤٧ ٣٩°) ∴ ب حـ = ١٢,٥ × جتا (٤١ ٤٧ ٣٩°)

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب حـ ≈ ٩,٦ سم

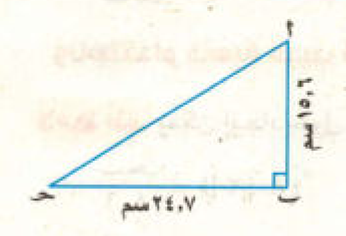
لاحظ أنه يمكن إيجاد ب حـ باستخدام نظرية فيثاغورث حيث : $(ب حـ)^2 = (أ ب)^2 - (أ حـ)^2$

فيكون ب حـ = $\sqrt{(١٢,٥)^2 - (٨)^2}$ ≈ ٩,٦ سم

مثال ٢

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ ب = ١٥,٦ سم ، ب حـ = ٢٤,٧ سم

الحل



• ∵ $\frac{أ ب}{ب حـ}$ = ظا حـ ∴ ظا حـ = $\frac{١٥,٦}{٢٤,٧}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق (∠ حـ) ≈ ٣٢ ١٦ ٣٢°

• ∴ ق (∠ أ) = ٩٠° − ٣٢ ١٦ ٣٢° = ٢٨ ٤٣ ٥٧°

• ∵ $\frac{أ ب}{أ حـ}$ = جا حـ ∴ $\frac{١٥,٦}{أ حـ}$ = جا (٣٢ ١٦ ٣٢°) ∴ أ حـ = $\frac{١٥,٦}{جا (٣٢ ١٦ ٣٢°)}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ حـ ≈ ٢٩,٢١ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد أ حـ باستخدام نظرية فيثاغورث حيث : $(أ حـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب حـ)^2$

فيكون : أ حـ = $\sqrt{(١٥,٦)^2 + (٢٤,٧)^2}$ ≈ ٢٩,٢١ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب فى الحالتين الآتيتين :

١ أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨,٦ سم
٢ أ ب = ٥,٤ سم ، ب حـ = ٧,٣ سم

ثانيًا حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس إحدى زاويتيه الحادتين

مثال ٣

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أ حـ = ١٢,٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٢٥ ٥٠ َ°

الحل



• ق (∠ أ) = ٩٠° − ٢٥ ٥٠ َ° = ٦٤ ١٠ َ°

• ∵ $\frac{أ ب}{أ حـ}$ = جا حـ ∴ $\frac{أ ب}{١٢,٥}$ = جا ٢٥ ٥٠ َ°

∴ أ ب = ١٢,٥ جا ٢٥ ٥٠ َ°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أب ≈ ٥,٤٥ سم

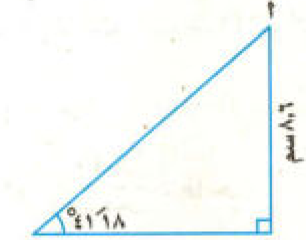
- ∵ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = جتا حـ ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{١٢,٥}$ = جتا ٥٠ َ ٢٥ ° ∴ ب حـ = ١٢,٥ جتا ٥٠ َ ٢٥ °

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب حـ ≈ ١١,٢٥ سم

مثال ٤

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : أب = ٨,٦ سم ، ق (∠ حـ) = ١٨ َ ٤١ °

الحل



- ق (∠ أ) = ٩٠ ° − ١٨ َ ٤١ ° = ٤٢ َ ٤٨ °
- ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$ = ظا حـ ∴ $\frac{٨,٦}{\text{ب حـ}}$ = ظا ١٨ َ ٤١ ° ∴ ب حـ = $\frac{٨,٦}{\text{ظا ١٨ َ ٤١ °}}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب حـ ≈ ٩,٧٩ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد طول $\overline{\text{ب حـ}}$ باستخدام ق (∠ أ) حيث يكون : $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$ = ظا أ

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{٨,٦}$ = ظا ٤٢ َ ٤٨ ° ∴ ب حـ = ٨,٦ ظا ٤٢ َ ٤٨ ° ≈ ٩,٧٩ سم

- ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ = جا حـ ∴ $\frac{٨,٦}{\text{أ حـ}}$ = جا ١٨ َ ٤١ ° ∴ أ حـ = $\frac{٨,٦}{\text{جا ١٨ َ ٤١ °}}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ حـ ≈ ١٣,٠٣ سم

لاحظ أنه يمكن إيجاد طول $\overline{\text{أ حـ}}$ باستخدام ق (∠ أ) حيث يكون : $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ = جتا أ

∴ $\frac{٨,٦}{\text{أ حـ}}$ = جتا ٤٢ َ ٤٨ ° ∴ أ حـ = $\frac{٨,٦}{\text{جتا ٤٢ َ ٤٨ °}}$ ≈ ١٣,٠٣ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه ق (∠ ب) = ٩٠ ° إذا كان :

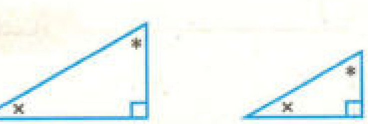
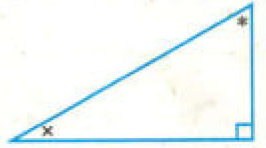
[١] أ ب = ١٠ سم ، ق (∠ حـ) = ٥٤ ° [٢] أ حـ = ٣٢ سم ، ق (∠ أ) = ٢٤ َ ٣٢ °

تفكير ناقد

هل يمكن حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية قياسى زاويتيه الحادتين ؟ الإجابة : لا يمكن.

تفسير الإجابة :

لأنه يوجد عدد لا نهائى من المثلثات القائمة التى لها نفس قياسى الزاويتين الحادتين (أى المثلثات المتشابهة)

ولذلك لا يمكن تحديد أى من هذه المثلثات هو المطلوب تحديد أطوال أضلاعه (أى حله) إلا إذا علم على الأقل أحد أطوال أضلاعه.

مثال ٥

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

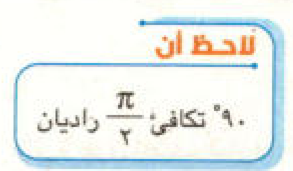
١ ق (∠ أ) = ١,٢٥٤ء ، ب حـ = ١٠,٦ سم   ٢ ق (∠ حـ) = ٠,٧١٥ء ، أ حـ = ٢٣ سم

الحل

لاحظ أنه

يجب تحويل نظام الآلة الحاسبة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل إجراء العمليات الحسابية التى تحتوى على دوال مثلثية لزوايا مقدرة بالراديان

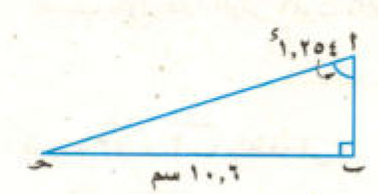
وذلك بالضغط على SHIFT ثم MODE ثم 4



١ • ق (∠ حـ) = $\frac{\pi}{2}$ − ١,٢٥٤ء ≈ ٠,٣١٧ء

• ∵ حا أ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ ∴ حا ١,٢٥٤ء = $\frac{١٠,٦}{أ حـ}$

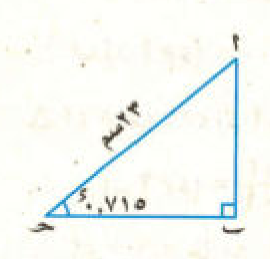
∴ أ حـ = $\frac{١٠,٦}{حا ١,٢٥٤ء}$ ≈ ١١,١٥٥ سم



• ∵ طا أ = $\frac{ب حـ}{أ ب}$ ∴ طا ١,٢٥٤ء = $\frac{١٠,٦}{أ ب}$

∴ أ ب = $\frac{١٠,٦}{طا ١,٢٥٤ء}$ ≈ ٣,٤٧٥ سم

٢ • ق (∠ أ) = $\frac{\pi}{2}$ − ٠,٧١٥ء ≈ ٠,٨٥٦ء



• ∵ حا حـ = $\frac{أ ب}{أ حـ}$ ∴ حا ٠,٧١٥ء = $\frac{أ ب}{٢٣}$

∴ أ ب = ٢٣ × حا ٠,٧١٥ء ≈ ١٥,٠٧٩ سم

• ∵ حتا حـ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ ∴ حتا ٠,٧١٥ء = $\frac{ب حـ}{٢٣}$

∴ ب حـ = ٢٣ × حتا ٠,٧١٥ء ≈ ١٧,٣٦٧ سم

حاول بنفسك

حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

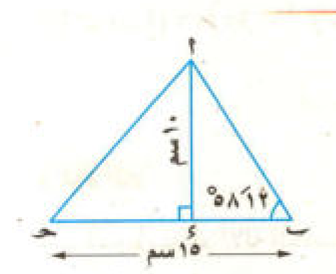
١ ق (∠ أ) = ٠,٦٢٣ء ، ب حـ = ١٠ سم   ٢ ق (∠ حـ) = ١,٠٧٣ء ، أ حـ = ٣٧,٥ سم

مثال ٦

أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٥٨° ١٢َ ، ب حـ = ١٥ سم ، رسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

حيث ء ∈ $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ١٠ سم **أوجد :** ق(∠حـ)

الحل



- فى Δ أ ء ب : ∵ طا ٥٨° ١٢َ = $\frac{١٠}{ب ء}$

∴ ب ء = $\frac{١٠}{طا ٥٨° ١٢َ}$ ≈ ٦,٢ سم

∴ ء حـ = ١٥ − ٦,٢ = ٨,٨ سم

- فى Δ أ ء حـ : ∵ طا حـ = $\frac{١٠}{٨,٨}$

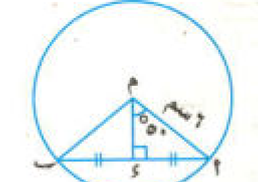
وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق(∠حـ) = ٤٨° ٣٩َ ٨ً

مثال ٧

دائرة طول نصف قطرها ٦ سم رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٠°

احسب طول هذا الوتر لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



نرسم $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ يقطعه فى ء

∵ $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ ∴ ء منتصف $\overline{أ ب}$

، ∵ م أ = م ب = نق ∴ $\overleftarrow{م ء}$ ينصف ∠ أ م ب

∴ ق(∠ أ م ء) = ١٠٠° ÷ ٢ = ٥٠°

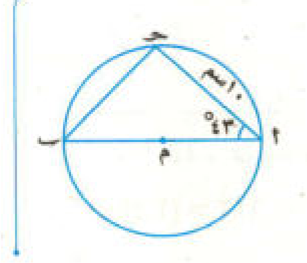
Δ أ ء م فيه : ق(∠ أ ء م) = ٩٠°

∴ جا(∠ أ م ء) = $\frac{أ ء}{م أ}$ ∴ جا ٥٠° = $\frac{أ ء}{٦}$

∴ أ ء = ٦ × جا ٥٠° ≈ ٤,٥٩٦ سم ∴ أ ب = ٢ أ ء ≈ ٩,١٩٣ سم



حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

، ق(∠أ) = ٤٣° ، أ حـ = ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م لأقرب رقمين عشريين.



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يمكن حل المثلث القائم الزاوية فى كل الحالات الآتية ما عدا أن يكون المعطى ....

(أ) طولا ضلعين فى المثلث. (ب) طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

(جـ) قياسا زاويتين فى المثلث. (د) طول أحد ضلعى القائمة وطول الوتر.

(٢) فى الشكل المقابل :

أحـ ≃ .... سم

(أ) ١٣,٢ (ب) ٨,٣

(جـ) ٣,٧ (د) ٥,٩

(٣) فى الشكل المقابل :

س ص ≃ .... سم.

(أ) ٩,٨ (ب) ٦,٩

(جـ) ٨,٤ (د) ١٤,٦

(د) ٥٩

(٤) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{ب حـ}$ ≃ .... سم.

(أ) ١٢

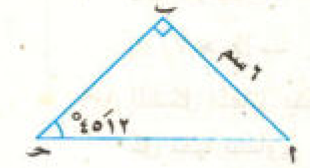
(ب) ١٣

(جـ) ١٦

(د) ٢٤

(٥) فى الشكل المقابل :

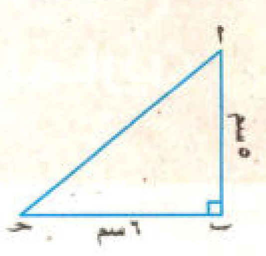
طول $\overline{ب حـ}$ ≃ .... سم.



(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٩ (د) ٥

(٦) فى الشكل المقابل :



ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٥٦° ٢٧َ ٢٦ًَ (ب) ٣٩° ٤٨َ
(جـ) ٣٣° ٣٣َ (د) ٥٠° ١٢َ

(٧) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٥ $\sqrt{3}$ سم

فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٦°

(٨) فى الشكل المقابل :



أ ب = ... سم.

(أ) ٩٨ ظتا ٢٠° (ب) ٩٨ جا ٢٠°
(جـ) ٩٨ قتا ٢٠° (د) ٩٨ ظا ٢٠°

(٩) إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٠,٩٢٥ ، ب حـ = ٨ سم

فإن : أ حـ = ... سم.

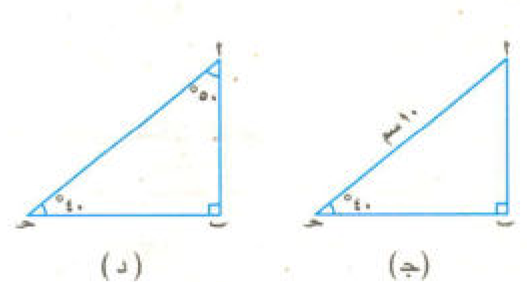
(أ) ١٠ (ب) ١٣ (جـ) ٦ (د) ١١

(١٠) إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٥٤° ١٣َ ، ب حـ = ٢٠ سم

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... سم.

(أ) ١٦,٢ (ب) ١١,٧ (جـ) ١٤,٤ (د) ٢٧,٧

(١١) فى أى الأشكال الآتية لا يمكن حل المثلث أ ب حـ ؟



(١٢) إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فإن :

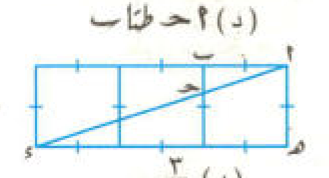
أولًا : ب حـ = ...

(أ) أ ب جا حـ (ب) أ ب قتا حـ (جـ) أ ب ظا ب (د) أ ب قا حـ

ثانيًا : أ ب = ...

(أ) أ حـ ظا ب (ب) أ حـ قا ب (جـ) أ حـ قتا ب (د) أ حـ ظتا ب

(١٣) الشكل المقابل يتكون من ٣ مربعات متلاصقة ، إذا كان طول ضلع كل منها يساوى ٢ سم فإن : ب حـ = ... سم



(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$

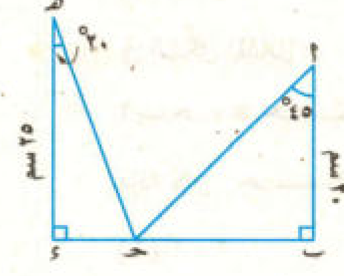
(١٤) في الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ... سم.

(أ) ٥ (ب) $٦ \frac{٢}{٣}$

(جـ) $٣ \frac{٣}{٤}$ (د) ٣

(١٥) في الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{ب د}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٩

(ب) ٢٩

(جـ) ٢٣

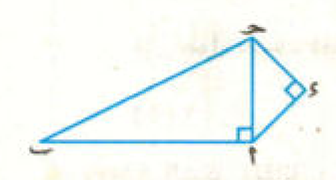
(د) ٢٨,٥

(١٦) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ جـ = ١٤,٨ سم ، ق (∠ أ) = ٦٤° ٣٢َ

فإن : طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٢٥,٢ (ب) ١٥,٨ (جـ) ١٨,٧ (د) ٢٥,٨

(١٧) في الشكل المقابل :



أ د = ب جـ × ....

(أ) جا (∠ أ جـ ب) جا (∠ د أ جـ)

(ب) جتا (∠ أ جـ ب) جتا (∠ د أ جـ)

(جـ) جا (∠ أ جـ ب) ظا (∠ د أ جـ)

(د) جتا (∠ أ جـ ب) ظتا (∠ د أ جـ)

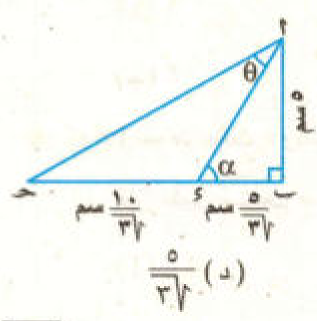
(١٨) في الشكل المقابل :

جـ د = ... سم.

(أ) ٦ قتا ٣٠° قا ٢٠° (ب) ٦ جا ٣٠° جتا ٢٠°

(جـ) ٦ قا ٣٠° جتا ٢٠° (د) ٦ جتا ٣٠° جا ٢٠°

(١٩) في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

وكان : أ ب = ٥ سم ، ب د = $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ سم ، جـ د = $\frac{١٠}{\sqrt{٣}}$ سم

فإن : قا α − جا θ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$

(٢٠) في الشكل المقابل :

$\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، ء $\in$ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث حـ ء = ٢٠ سم

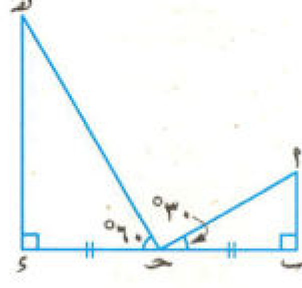
فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ١٠ $\sqrt{3}$ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ١٠

(٢١) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ، هـ حـ ء مثلثان قائما الزاوية فى ب ، ء على الترتيب

فإذا كان : حـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ فإن : $\frac{\text{هـ ء}}{\text{أ ب}}$ = ...



(أ) ٣ : ٢ (ب) ٥ : ٣

(جـ) ٢ : ١ (د) ٣ : ١

(٢٢) يبين الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها

، فإذا كان : أ حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٣٧°

فإن طول نصف قطر الدائرة ≃ .... سم

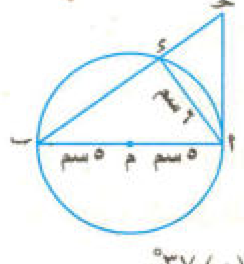
(أ) ٧,٥١ (ب) ٩,٩٧ (جـ) ٧,٩٦ (د) ٤,٧٩

(٢٣) في الشكل المقابل :

الدائرة م طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماس للدائرة عند أ ، أ ء = ٦ سم

فإن : ق (∠ حـ أ ء) ≃ ....



(أ) ٥٣° (ب) ٣١° (جـ) ٣٩° (د) ٣٧°

(٢٤) في الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{أ حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٥) أ ب حـ مثلث ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ فإذا كان : أ ء = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٥٢° ، ق (∠ حـ) = ٢٨°

فإن طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ≃ .... سم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٢٦) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٠ سم

، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{هـ و} \perp \overline{ب حـ}$

فإن : ء هـ + هـ و = ... سم.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٨}$ (د) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٧}$

(٢٧) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\theta \in \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣}\right]$

فإن : أ حـ $\in$ ....

(أ) $[٨\sqrt{٣} ، ١٦]$ (ب) $[\frac{١٦}{٣}\sqrt{٣} ، ١٦]$

(جـ) $[١٦ ، ١٦\sqrt{٣}]$ (د) $[١٦\sqrt{٣} ، ٢٤]$

(٢٨) في الشكل المقابل :

أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $\theta_١ = \theta_٢ = \theta_٣$ (ب) $\theta_١ > \theta_٢ > \theta_٣$

(جـ) $\theta_١ < \theta_٢ < \theta_٣$ (د) $\theta_١ > \theta_٢$ ، $\theta_٣ > \theta_٢$

(٢٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ حـ}$ قطر في الدائرة م

فإن مساحة الدائرة المار برؤوس Δ أ ب حـ

تساوى $\frac{\pi}{٤} \times (أ ب)^٢ \times$ ....

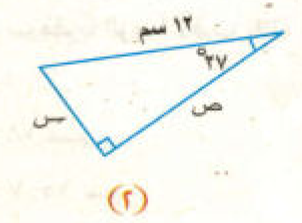
(أ) جا^٢ حـ (ب) جتا^٢ حـ (جـ) ١ + ظا^٢ أ (د) ١ − ظا^٢ أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

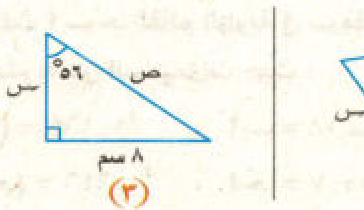
١ أوجد قيمة كل من س ، ص في كل شكل من الأشكال الآتية :



(١)



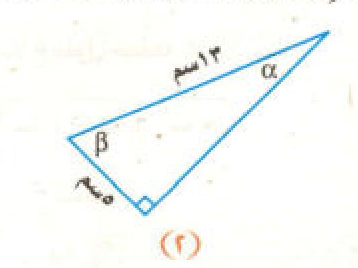
(٢)

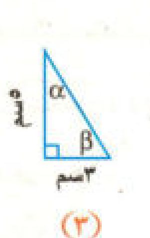


(٣)

٢ أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :







---

٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد طول $\overline{أب}$ مقربًا لرقم عشرى واحد إذا كان :

(١) ق (∠ حـ) = ٣٢° ١٨َ ، أ حـ = ٢٥ سم «١٣,٤ سم»

(٢) ق (∠ أ) = ٦٢° ٤٤َ ، ب حـ = ١٦ سم «٨,٢ سم»

(٣) ق (∠ أ) = ٤٢° ٨َ ، أ حـ = ٢٤ سم «١٧,٨ سم»

---

٤ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد ق (∠ حـ) لأقرب دقيقة إذا كان :

(١) أ ب = ١٢,٦ سم ، أ حـ = ١٨,٦ سم «٤٢° ٣٩َ»

(٢) ب حـ = ٥٤ سم ، أ حـ = ٨٨ سم «٥٢° ٩َ»

(٣) أ ب = ٢٧,٢ سم ، ب حـ = ٢٠,٤ سم «٥٣° ٨َ»

---

٥ حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا قياسات الزوايا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث :

(١) أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

(٢) أ ب = ١٢,٥ سم ، ب حـ = ١٧,٦ سم

(٣) أ ب = ٥,٣ سم ، أ حـ = ١٢,٢ سم

(٤) ب حـ = ٣١ سم ، أ حـ = ٤٢ سم

---

٦ حل Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه :

(١) أ حـ = ٢٤,٦ سم ، أ ب = ١٦,٢ سم

(٢) أ ب = ٣٩ سم ، ب حـ = ٦٢ سم

(٣) ق (∠ حـ) = ٦٢° ، أ حـ = ٧٦ سم

(٤) أ ب = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢° ٢٤َ

---

٧ حل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب مقربًا الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات حيث :

(١) ق (∠ أ) = ١,١٦٩ ء ، أ ب = ١٨ سم

(٢) ق (∠ حـ) = ٠,٦٤٦ ء ، أ حـ = ١٥,٧ سم

(٣) ق (∠ حـ) = ١,٠٨٢ ء ، أ حـ = ٣٥,٨ سم

٨ مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٧ سم وقاعدته ١٠ سم.

احسب قياسات زواياه. «٥٥ َ ٢٤ ً ٤٤° ، ٥٥ َ ٢٤ ً ٤٤° ، ٦٠ ً ١٠ َ ٩١°»

٩ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ ح ، ب ح = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٤٨° ٥٤َ

أوجد طول : أ ب لأقرب سنتيمتر. «١٥ سم»

١٠ س ص ع مثلث فيه : س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم

أثبت أن : المثلث قائم الزاوية فى ص ثم أوجد : قياس زاوية س «٢٣ َ ٦٧°»

١١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم ، رسم أ ح قطر فيها ثم رسم الوتر أ ب طوله ١٠ سم

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ح «٤ ً ٩ َ ٥١° ، ٩٠° ، ٥٦ ً ٤٠ َ ٣٨°»

١٢ دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر أ ب يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠° ،

احسب طول أ ب لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. «١١,٤٦٨ سم»

١٣ أ ب ح ء معين طولا قطريه أ ح ، ب ء هما ١٨,٨ سم ، ٢٤,٦ سم

أوجد : ق (∠ أ ء ح) لأقرب دقيقة. «٤٧ َ ٧٤°»

١٤ قطعة أرض على شكل معين أ ب ح ء طول ضلعه ١٠ أمتار ، ق (∠ أ ب ح) = ١٠٤° ١٦َ

أوجد : طولى قطريه أ ح ، ب ء «١٥,٧٩ مترًا تقريبًا ، ١٢,٢٨ مترًا تقريبًا»

١٥ أ ب ح ء مستطيل طول قطره أ ح = ٢٤,٨ سم ، ق (∠ أ ح ب) = ٢٣° ٣٦َ

أوجد طول كل من : أ ب ، ب ح «٩,٩ سم تقريبًا ، ٢٢,٧ سم تقريبًا»

١٦ أ ب ح ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

أ ء // ب ح ، أ ب = ح ء = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم ، ب ح = ١٠ سم.

أوجد قياس كل من زواياه الأربعة. «٨ َ ٥٣° ، ٥٢ َ ١٢٦° ، ٨ َ ٥٣° ، ٥٢ َ ١٢٦°»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ء ∈ ب ح بحيث ء أ = ء ب = ء ح = ٥ سم

، ق (∠ أ ء ب) = ٨٠° فإن : أ ح = ... سم

(أ) ١٠ حا ٤٠° (ب) ١٠ حا ٥٠° (جـ) ٥ حا ٨٠° (د) ٥ حا ٤٠°

(٢) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه هى أ ، أ + ١ ، أ − ١ حيث أ > ١

فإن قياس أكبر زواياه الحادة يساوى .... تقريبًا.

(أ) ٣٦° ٥٢َ (ب) ٤٨° ١٨َ (جـ) ٥٣° ٨َ (د) ٦٢° ٤٢َ

(٣) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٦ سم ومحيط Δ أ ب حـ = ٢٤ سم

فإن : ق (∠ حـ) ≃ ....

(أ) ١٤° (ب) ١٨° (جـ) ٣٧° (د) ٥٣°

(٤) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب وكان أ ب > ب حـ ، مساحة Δ أ ب حـ = ٣٠ سم^2

، أ ب + ب حـ = ٢٠ سم فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٧٧° ١٩َ ٠ (ب) ٥٤° ٣٧َ (جـ) ٢٦° ١٨َ (د) ١٢° ٤١َ

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أحـ}$ قطرًا فى دائرة م ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا لها

، أ ب = ٦ سم ، نق = ٥ سم

فإن : ق (∠ ء حـ م) = ...

(أ) ٥٠° ١٢َ (ب) ٢٥° ٦َ (جـ) ١٨° ٣١َ (د) ٣٧° ٣٩َ

(٦) فى الشكل المقابل :

$\overline{ب حـ}$ قطر فى دائرة م ، أ حـ = ٦ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = θ

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^2

(أ) ٦ ظتا θ (ب) ٦ ظا θ (جـ) ١٨ ظا θ (د) ١٨ ظتا θ

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى أ

، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ ، أ ء = جا^2 θ

فإن : ب حـ = ...

(أ) جا θ (ب) ظا θ (جـ) جتا θ (د) ظا^2 θ

(٨) شكل خماسى منتظم طول ضلعه ٥,٨٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧



الدرس 4

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

زاوية الارتفاع

(الجسم المرصود) حـ
زاوية ارتفاع
ب
أ
(عين الراصد)

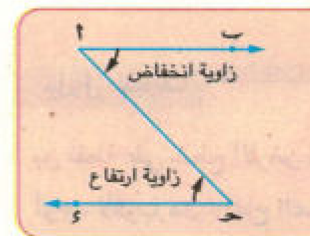
إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أعلى مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{أب}$ الأفقى والشعاع $\overrightarrow{أحـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية ارتفاع** الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

زاوية الانخفاض

(عين الراصد)
أ
ب
زاوية انخفاض
(الجسم المرصود) حـ

إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أسفل مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overrightarrow{أب}$ الأفقى والشعاع $\overrightarrow{أحـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية انخفاض** الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

ملاحظة

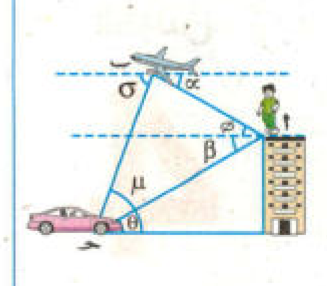


قياس زاوية انخفاض حـ بالنسبة إلى أ يساوى قياس زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى حـ

وذلك لأن ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (بالتبادل)

تحقق من فهمك

باستخدام الشكل المقابل أكمل ما يأتى :





١ زاوية ارتفاع الشخص أ بالنسبة للسيارة حـ هى ....



٢ زاوية انخفاض السيارة حـ بالنسبة للطائرة ب هى ....

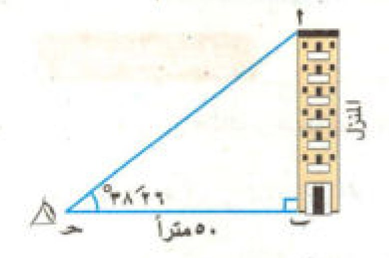
٣ زاوية ارتفاع الطائرة ب بالنسبة للشخص أ هى ....

٤ زاوية انخفاض الشخص أ بالنسبة للطائرة ب هى ....

مثال ١

من نقطة على سطح الأرض على بُعد ٥٠ مترًا من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى المنزل يساوى ٢٦ َ ٣٨° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

الحل



بفرض أن أب يمثل ارتفاع المنزل

∴ ظا ٢٦ َ ٣٨° = $\frac{\text{أب}}{٥٠}$

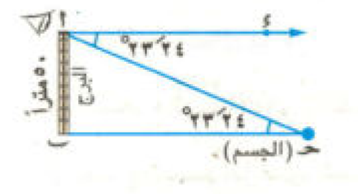
∴ أب = ٥٠ × ظا ٢٦ َ ٣٨° ≈ ٤٠ مترًا.

∴ ارتفاع المنزل = ٤٠ مترًا تقريبًا.

مثال ٢

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٢٤ َ ٢٣° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل



بفرض أن أب يمثل ارتفاع البرج

∴ د ء أ حـ هى زاوية انخفاض الجسم



∴ ق(د حـ) = ق(د ء أ حـ) = ٢٤ َ ٢٣° (لأن $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$)

∴ ظا ٢٤ َ ٢٣° = $\frac{٥٠}{\text{حـ ب}}$ ∴ حـ ب = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٢٤ َ ٢٣°}}$ ≈ ١١٦ مترًا.

∴ بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٦ مترًا تقريبًا.

حاول بنفسك

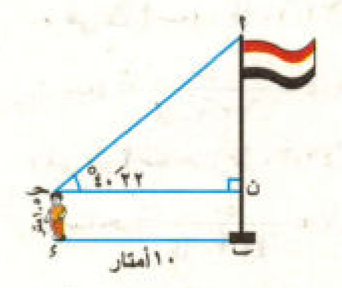
من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ مترًا عن قاعدة عمود رأسى، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود هو ٣٢ َ ١٨°
أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض.

مثال ٣

وقف شخص طوله ١,٥ متر على بعد ١٠ أمتار من قاعدة سارية علم مثبتة رأسيًا على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى السارية يساوى ٢٢َ ٤٠ْ احسب طول السارية لأقرب متر.

الحل

بفرض أن : $\overline{أب}$ يمثل ارتفاع السارية ، $\overline{حء}$ يمثل طول الشخص



نرسم $\overline{حن}$ // $\overline{ءب}$ حيث ن $\in$ $\overline{أب}$

∴ ظا ٢٢َ ٤٠ْ = $\frac{أن}{١٠}$ ∴ أن = ١٠ × ظا ٢٢َ ٤٠ْ ≈ ٨,٥ متر

، ∵ طول $\overline{أب}$ = أن + ن ب حيث : ن ب = حء = ١,٥ مترًا

∴ أب = ٨,٥ + ١,٥ = ١٠ ∴ طول السارية = ١٠ أمتار تقريبًا.

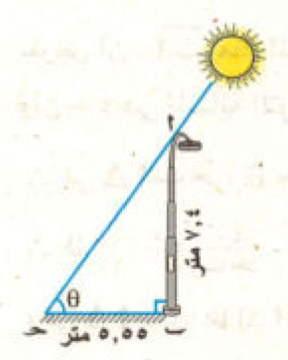
مثال ٤

عمود إنارة ارتفاعه ٧,٤ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥,٥٥ متر.

أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل

بفرض أن : $\overline{أب}$ يمثل عمود الإنارة



، $\overline{بح}$ يمثل ظل عمود الإنارة على الأرض

، θ قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

∴ ظا θ = $\frac{أب}{بح}$ = $\frac{٧,٤}{٥,٥٥}$ ∴ θ ≈ ٤٨ً ٧َ ٥٣ْ

∴ قياس زاوية ارتفاع الشمس بالراديان = ٤٨ً ٧َ ٥٣ْ × $\frac{\pi}{١٨٠ْ}$ ≈ ٠,٩٢٧ ء

حاول بنفسك

من قمة صخرة ارتفاعها ٢٠٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة.

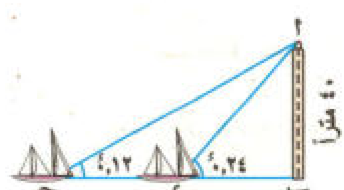
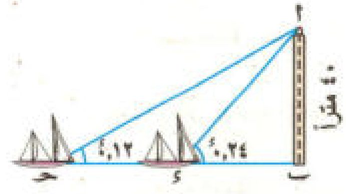
فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ مترًا رصد شخص سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما ٣٢° ١٠َ ، ٤٩° ٣٠َ أوجد البعد بين السفينتين.

الحل

بفرض أن أ ب يمثل ارتفاع الصخرة ، حـ ء البعد بين السفينتين.

∴ فى Δ أ ب ء : طا ٣٢° ١٠َ = $\frac{٥٠}{ب ء}$

∴ ب ء = $\frac{٥٠}{طا ٣٢° ١٠َ}$ = ٧٩,٥ متر تقريبًا

، فى Δ أ ب حـ : طا ٤٩° ٣٠َ = $\frac{٥٠}{ب حـ}$

∴ ب حـ = $\frac{٥٠}{طا ٤٩° ٣٠َ}$ = ٤٢,٧ متر تقريبًا.

∴ حـ ء = ٧٩,٥ − ٤٢,٧ = ٣٦,٨ متر تقريبًا.

مثال ٦

تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٤٠ مترًا عن سطح البحر ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ١٢,٠ ء وبعد ٥ دقائق رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٤,٠ ء . احسب سرعة السفينة علمًا بأن السفينة تسير بسرعة منتظمة.

الحل

بفرض أن : $\overline{\text{أ ب}}$ يمثل المنارة

وأن حـ ء هى المسافة التى قطعتها السفينة فى ٥ دقائق.

∴ فى Δ أ ب حـ : طا حـ = $\frac{أ ب}{ب حـ}$

∴ طا ١٢,٠ ء = $\frac{٤٠}{ب حـ}$ ∴ ب حـ = $\frac{٤٠}{طا ١٢,٠ ء}$ ≈ ٣٣١,٧٣ مترًا.

، فى Δ أ ب ء : طا (∠ أ ء ب) = $\frac{أ ب}{ب ء}$

∴ طا ٢٤,٠ ء = $\frac{٤٠}{ب ء}$

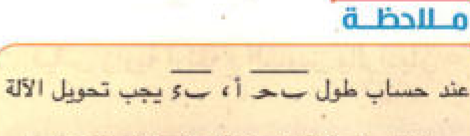
∴ ب ء = $\frac{٤٠}{طا ٢٤,٠ ء}$ ≈ ١٦٣,٤٥ مترًا.

∴ ء حـ = ٣٣١,٧٣ − ١٦٣,٤٥ = ١٦٨,٢٨ مترًا.

∵ السفينة قطعت ١٦٨,٢٨ مترًا فى ٥ دقائق.

∴ سرعة السفينة = $\frac{المسافة}{الزمن}$ = $\frac{١٦٨,٢٨}{٥}$ = ٣٣,٦٥٦ م/دقيقة.

ملاحظة



عند حساب طول $\overline{\text{ب حـ}}$ أ، $\overline{\text{ب ء}}$ يجب تحويل الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) بالضغط على



تمـارين 11 على زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٤٠ مترًا عن قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكان قياسها ٧٢° فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢١ (جـ) ١٢٢ (د) ١٢٣

(٢) رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٤٠° فإن بعد الراصد عن الطائرة يساوى .... لأقرب متر.

(أ) ٦٤٣ (ب) ١١٩٢ (جـ) ١٣٠٥ (د) ١٥٥٦

(٣) من قمة برج ارتفاعه ٨٠ مترًا إذا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج ١٢َ ٢٤° فإن بُعد الجسم عن قاعدة البرج يساوى تقريبًا ....

(أ) ١٩٥ متر (ب) ١٧٨ متر (جـ) ٨٨ متر (د) ٣٦ متر

(٤) من قمة منارة ارتفاعها ٨٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض هدف ثابت على سطح البحر فكان قياسها ٨٠° ، فإن بُعد الهدف عن قمة المنارة يساوى .... متر تقريبًا.

(أ) ٧٨ (ب) ٧٩ (جـ) ٨٠ (د) ٨١

(٥) عمود إنارة طوله ٨ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥ متر ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة يساوى ....

(أ) ٣٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٥٨°

(٦) من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ مترًا عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يُبعد عن قاعدة الصخرة ٢٠٠ متر بالراديان ≃ ....

(أ) ٠,٠٨ (ب) ٠,٤٦ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٢٤

(٧) إذا سار شخص مسافة ١ كم على طريق منحدر يميل على سطح الأفقى بزاوية قياسها ١٥َ ٢٢° فإن مقدار ارتفاعه عن المستوى الأفقى عندئذ يساوى .... متر تقريبًا.

(أ) ٩٢٥,٥ (ب) ٤٠٩,١ (جـ) ٣٧٨,٦ (د) ٣٧٦,٨

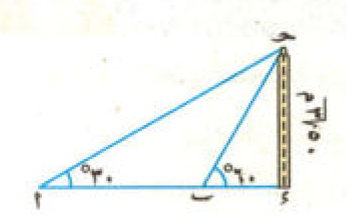
(٨) 📖 طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية يساوى ٦٣°. فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض = ... متر.

(أ) ٣٧ (ب) ١٩ (جـ) ٨٢ (د) ٨٠

(٩) شخص طوله ١٦٠ سم ويقف على سطح الأرض وعلى بُعد ٢٠ مترًا من شجرة رأسية وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى الشجرة يساوى ٤٨َ ٣١° فإن ارتفاع الشجرة ≃ .... متر.

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٢ (د) ١١

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا قيست زاويتا ارتفاع قمة برج طوله ٥٠ $\sqrt{3}$ متر من النقطتين أ ، ب على نفس الخط الأفقى المار بقاعدة البرج فكان قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب

فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يساوى .... متر.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{3}$ (ب) ٥٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

(١١) من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع قمة عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها فوجد أن قياسها ٢٨° فإن ارتفاع العمارة لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٩ (د) ٣١

(١٢) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ مترًا ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة الصخرة ، وقاس زاويتى انخفاضيهما ، فوجد قياسيهما ١٢َ ٣٥° ، ٦َ ٥٣° فإن البعد بين السفينتين ≃ .... متر.

(أ) ١٩,٤ (ب) ١٧,٧ (جـ) ٢٦,٧ (د) ٨٦,٧

(١٣) إذا كان قياس زاوية ارتفاع الشمس ٣٠° فإن طول ظل برج ارتفاعه ١٥٠ متر على سطح الأرض = ... متر.

(أ) ٧٥ $\sqrt{3}$ (ب) ٢٠٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٥٠ $\sqrt{3}$ (د) ٧٥ $\sqrt{2}$

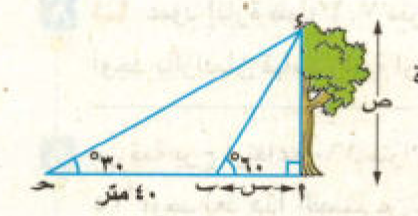
(١٤) من قمة تل ارتفاعه ٣٠٠ متر كانت زاويتى انخفاض قمة وقاعدة برج مقابل قياساهما ٣٠° ، ٤٥° على الترتيب فإذا كان كلًا من قاعدة التل والبرج على نفس المستوى الأفقى فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ٥٠ $(3 - \sqrt{3})$ (ب) ٢٠٠ $(3 - \sqrt{3})$ (جـ) ١٠٠ $(3 - \sqrt{3})$ (د) ١٥٠ $(3 - \sqrt{3})$

(١٥) إذا كان طول ظل برج رأسى على الأرض الأفقية عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٣٠° أكبر من طوله عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٤٥° بمسافة ٦٠ متر فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ $\sqrt{3}$ (د) ٣٠ $(\sqrt{3} + 1)$

(١٦) فى الشكل المقابل :



شخص يقف على ضفة نهر وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة على الضفة الأخرى للنهر يساوى ٦٠° وعندما تحرك ٤٠ متر مبتعدًا عن الشجرة فى اتجاه أب فإن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة أصبح ٣٠° فإن عرض النهر = ... متر.

(أ) ٦٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٠

(١٧) قام شخص من قمة برج مراقبة ارتفاعه ٢٠٠ متر برصد سفينتين فى البحر فى نفس المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج وفى جهتين مختلفتين من برج المراقبة فكان زاويتى انخفاضيهما ٣٠° ، ٤٥° فإن المسافة بين السفينتين ≃ .... متر.

(أ) ٥٥٠ (ب) ٥٤٦ (جـ) ٤٣٦ (د) ٦١٥

(١٨) من قاعدة وقمة منزل ارتفاعه ١٠ أمتار تم رصد زاويتى ارتفاع قمة برج مقابل فكانتا ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فإذا كان قاعدتى المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقى فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٧,٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة ٢٢° ، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين. «٣,٢٣ مترًا»

٢ وجد شخص أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج يساوى ٢١َ ٣٩° فإذا كان الشخص يبعد عن قاعدة البرج مسافة ٥٠ مترًا فما ارتفاع البرج ؟ «٤١ مترًا تقريبًا»

٣ رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥° ، أوجد بعد الراصد عن الطائرة. «٢٣٤١,٤ مترًا تقريبًا»

٤ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ مترًا من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟ «٠,٥٤ تقريبًا»

٥ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض، فوجد أن قياس زاوية انخفاضها هو ٦٣°. أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد. «٢٨٧٣ مترًا تقريبًا»

٦ من قمة منارة ارتفاعها ٢٠٠ متر قيست زاوية انخفاض قارب فى النهر فكان قياسها يساوى ١٤َ ٣١° فما بُعد القارب عن قاعدة المنارة إذا كان القارب يقع مع قاعدة المنارة فى مستو أفقى واحد ؟ «٣٢٩,٨ مترًا تقريبًا»

٧ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٣٦َ ٢٨° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر. «١١٠ متر تقريبًا»

٨ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٤,٨ متر
أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ. «٠,٩٨٣ء»

---

٩ من قمة برج ارتفاعه ١٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هو ٣٥° أوجد بُعد هذا الجسم عن كل من قاعدة البرج وقمته لأقرب متر. «٢٢٩ مترًا تقريبًا ، ٢٧٩ مترًا تقريبًا»

---

١٠ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤°
أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من :
(١) بعد الطرف السفلى عن الحائط. (٢) طول السلم. «١,٨٥ مترًا تقريبًا ، ٤,٢٣ مترًا تقريبًا»

---

١١ إذا كان قياس زاوية ارتفاع مئذنة من نقطة على بُعد ١٤٠ مترًا من قاعدتها يساوى ٤٦َ ٢٦° فما هو ارتفاع المئذنة لأقرب متر ؟ وإذا قيست زاوية ارتفاع المئذنة نفسها من نقطة تبعد ١١٠ أمتار من قاعدتها فأوجد لأقرب دقيقة قياس زاوية ارتفاعها عندئذ. «٧١ مترًا ، ٥٠َ ٣٢°»

---

١٢ وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هو $\frac{\pi}{6}$ ، ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر وجد أن قياس زاوية الارتفاع هو $\frac{\pi}{4}$
أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر. «١٠٩٣ مترًا تقريبًا»

---

١٣ وقف رجلان فى جهتين مختلفتين من سارية علم مثبتة رأسيًا على سطح الأرض بحيث كان الرجلان وقاعدة السارية على مستقيم أفقى واحد. فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة السارية وكان قياسا زاويتى ارتفاعها هما ١٦َ ٥٤° ، ١٢َ ٤٧° أوجد البعد بين الرجلين
إذا كان طول السارية ١٢ مترًا (بفرض إهمال طولى الرجلين). «١٩,٧ مترًا»

---

١٤ $\overline{أب}$ يمثل برجًا ارتفاعه ٥٠ مترًا قاعدته ب وقمته أ ، وقف شخصان أحدهما عند حـ والآخر عند ء حيث ب ، حـ ، ء تقع على مستقيم أفقى واحد ، بحيث حـ تقع بين ب ، ء فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة البرج ، كان قياسا زاويتى ارتفاع قمة البرج ١٣َ ٥٢° ، ٣٦َ ٤٥° على الترتيب فأوجد طول $\overline{حـ ء}$ (بفرض إهمال طولى الشخصين). «١٠,٢ مترًا»

---

١٥ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا رصدت سفينتان فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة البرج فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما ٤٧° ، ٣٥َ ٤١° على الترتيب.
أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر. «١٢ مترًا»

---

١٦ يقف شخص على بعد ٨٥ مترًا من قاعدة برج على قمته سارية علم فلاحظ أن قياسى زاويتى ارتفاع قمة السارية وقاعدة السارية ٥٦° ، ٥٤° على الترتيب.
أوجد طول سارية العلم لأقرب متر (بفرض إهمال طول الشخص). «٩ أمتار»

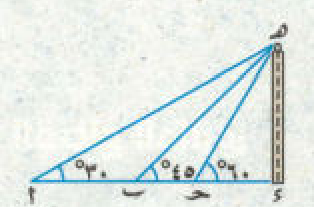
١٧ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ مترًا ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١١ ,٠ ° وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٢ ,٠ ° احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة.
«١٥,٣ متر/دقيقة»



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

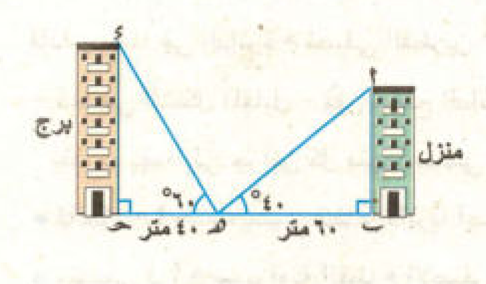


إذا كانت قياسات زوايا ارتفاع أعلى نقطة فى البرج من ثلاث نقاط على الخط المؤدى لأسفل نقطة فى البرج هى ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° على الترتيب

فإن أب : ب حـ = ...

(أ) ١ : $\sqrt{3}$ (ب) ٢ : ٣ (جـ) $\sqrt{3}$: $\sqrt{2}$ (د) $\sqrt{3}$: ١

(٢) فى الشكل المقابل :



ظل زاوية ارتفاع قمة البرج من قمة المنزل = ...

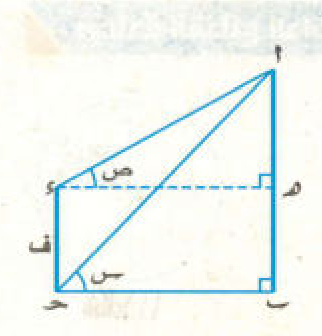
(أ) $\frac{٤٠ \text{ حا } ٦٠° - ٦٠ \text{ حا } ٤٠°}{١٠٠}$

(ب) $\frac{٤٠ \text{ ظا } ٦٠° - ٦٠ \text{ ظا } ٤٠°}{١٠٠}$

(جـ) ١٠٠ ظا ٨٠°

(د) ٤٠ ظا ٦٠° - ٦٠ ظا ٤٠°

(٣) فى الشكل المقابل :



قيست زاويتا ارتفاع قمة جبل $\overline{\text{أب}}$ من قاعدة وقمة منزل $\overline{\text{حـ ء}}$ ارتفاعه ف فوجد قياساهما على الترتيب س ، ص فإن : أب = ...



(أ) $\frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا ص}}$ (ب) $\frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا س - ظا ص}}$

(جـ) ف (ظا س - ظا ص) (د) ف ظا س ظا ص



الدرس

5

القطاع الدائرى

تعريف

القطاع الدائرى هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها وبنصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس.

فإذا رسمنا فى الدائرة م نصفى القطرين $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

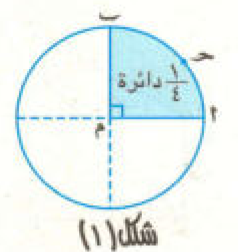
– كما فى الشكل المقابل – فإن سطح الدائرة

ينقسم بهما إلى جزأين كل منهما يسمى **«قطاع دائرى»**.

- فالجزء م أ حـ ب يسمى قطاعاً دائريًا أصغر بينما الجزء م أ ء ب يسمى قطاعاً دائريًا أكبر.
- وتسمى ∠ أ م ب بزاوية القطاع الأصغر، ∠ أ م ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.
- ويسمى $\overset{\frown}{\text{أ حـ ب}}$ بقوس القطاع الأصغر ، $\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$ بقوس القطاع الأكبر.



مساحة القطاع الدائرى



شكل(١)

$\frac{1}{3}$ دائرة ، 120° ، م ، أ ، ب ، حـ

شكل(٢)

$\frac{1}{2}$ دائرة ، 180° ، م ، أ ، ب ، حـ

شكل(٣)

$\frac{2}{3}$ دائرة ، 240° ، م ، أ ، ب ، حـ

شكل(٤)

بملاحظة الأشكال السابقة نجد أن :

شكل(١) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م أ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{4}$ ، $\frac{\text{ق (∠ أ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$

شكل(٢) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م أ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{\text{ق (∠ أ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$

شكل(٣) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م ؟ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ق (د ؟ م ب)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{١٨٠°}{٣٦٠°} = \frac{١}{٢}$

شكل(٤) : $\frac{\text{مساحة القطاع (م ؟ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ق (د ؟ م ب المنعكسة)}}{\text{قياس الدائرة م}} = \frac{٢٤٠°}{٣٦٠°} = \frac{٢}{٣}$

أى أن النسبة بين مساحة القطاع ومساحة الدائرة هى نفس النسبة بين قياس زاوية القطاع وقياس الدائرة.

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس الدائرة}}$$

وإذا رمزنا إلى : قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائرى بالرمز $\theta^{د}$ وقياسها بالتقدير الستينى بالرمز س° ، طول نصف قطر الدائرة بالرمز نق وطول قوس القطاع بالرمز ل فإن :

١ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائرى}}{\pi \text{ نق}^٢} = \frac{\theta^{د}}{٢\pi}$ ∴ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{\theta^{د}}{٢\pi} \times \pi$ نق^٢

أى أن مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ $\theta^{د}$ نق^٢

٢ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائرى}}{\pi \text{ نق}^٢} = \frac{\text{س}°}{٣٦٠°}$ ∴ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{\text{س}°}{٣٦٠°} \times \pi$ نق^٢

أى أن مساحة القطاع الدائرى = $\frac{\text{س}°}{٣٦٠°}$ × مساحة الدائرة

٣ ∵ $\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

، ∵ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ $\theta^{د}$ نق^٢ ∴ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢} \times \frac{\text{ل}}{\text{نق}} \times$ نق^٢

أى أن مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق

ملاحظتان

١ يمكن اعتبار الدائرة قطاعًا دائريًا قياس زاويته = ٣٦٠°

وتكون مساحة القطاع الدائرى = مساحة الدائرة = π نق^٢

٢ محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل



مثال ١

أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ل فى دائرة طول نصف قطرها نق إذا كان قياس زاويته $\theta^{د}$ بالتقدير الدائرى ، سٓ° بالتقدير الستينى فى كل مما يأتى :

١ نق = ١٠ سم ، $\theta^{د}$ = ١,٥ د | ٢ نق = ١٠,٥ سم ، سٓ° = ١٤٤°

٣ نق = ٦ سم ، ل = ٤ سم

الحل

١ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{د}$ نق^2 = $\frac{1}{2}$ × ١,٥ × (١٠)^2 = ٧٥ سم^2

٢ مساحة القطاع = $\frac{س^{\circ}}{360^{\circ}}$ × π نق^2 = $\frac{144^{\circ}}{360^{\circ}}$ × π × (١٠,٥)^2 ≈ ١٣٨,٥ سم^2

٣ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ سم^2

حاول بنفسك

١ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ٧ سم ، زاويته المركزية قياسها ٢,١ د

٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته = ٦,٥ سم وطول قوسه = ٨ سم

٣ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

مثال ٢

قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ، ومحيطه ٥٥ سم أوجد مساحته.

الحل

∵ نق = ١٢ سم ، محيط القطاع = ٥٥ سم ، ∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∴ ٥٥ = ٢ × ١٢ + ل ∴ ل = ٣١ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٣١ × ١٢ = ١٨٦ سم^2

مثال ٣

قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥ سم ، ومساحته ٢٧٠ سم^2 أوجد :

[١] طول قوس القطاع. [٢] قياس زاوية القطاع بالقياسين الدائرى والستينى.

الحل

[١] ∵ نق = ١٥ سم ، مساحة القطاع = ٢٧٠ سم^2 ، ∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

∴ ٢٧٠ = $\frac{1}{2}$ ل × ١٥ ∴ ل = ٣٦ سم

[٢] ∵ ل = ٣٦ سم ، نق = ١٥ سم ∴ θء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{36}{15}$ = ٢,٤ء

∴ س° = ٢,٤ × $\frac{180°}{\pi}$ ≈ ١٣٧ ٣١ َ°

مثال ٤

قطاع دائرى مساحته ٧٥ سم^2 ومحيطه ٣٥ سم

أوجد طول نصف قطر دائرته وقياس زاويته المركزية بالقياس الستينى.

الحل

∵ مساحة القطاع = ٧٥ ∴ $\frac{1}{2}$ ل نق = ٧٥ ∴ ل نق = ١٥٠ (١)

، ∵ محيط القطاع = ٣٥ ∴ ل + ٢ نق = ٣٥ ∴ ل = ٣٥ − ٢ نق (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ (٣٥ − ٢ نق) نق = ١٥٠

∴ ٢ نق^2 − ٣٥ نق + ١٥٠ = ٠ ∴ (نق − ١٠) (٢ نق − ١٥) = ٠

∴ نق = ١٠ سم أ، نق = ٧$\frac{1}{2}$ سم وبالتعويض فى (١)

∴ ل = ١٥ سم | ∴ ل = ٢٠ سم

، ∵ θء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{15}{10}$ = ١,٥ء | ، ∵ θء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{20}{7,5}$ = $\frac{8}{3}$ء

∴ س° = ١,٥ء × $\frac{180°}{\pi}$ ≈ ٨٥ ٥٦ َ ٤٧ ً° | ∴ س° = $\frac{8}{3}$ء × $\frac{180°}{\pi}$ ≈ ١٥٢ ٤٧ َ ١٩ ً°

حاول بنفسك

قطاع دائرى مساحته ١٢٠ سم^2 ، وطوله قوسه ٢٠ سم

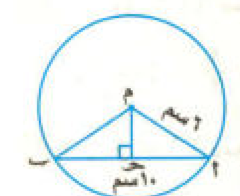
أوجد قياس زاويته بالقياسين الدائرى والستينى وأوجد محيط القطاع.

مثال ٥

دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ بحيث : أ ب = ١٠ سم

أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



نرسم $\overline{م حـ} \perp \overline{أ ب}$ يقطعه فى حـ فيكون حـ منتصف $\overline{أ ب}$

∴ أ حـ = حـ ب = ٥ سم

∵ △ أ حـ م فيه : ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°

∴ جا (∠ أ م حـ) = $\frac{أ حـ}{أ م} = \frac{٥}{٦}$ ∴ ق (∠ أ م حـ) ≈ ٥٦° ٢٦َ ٣٤ً

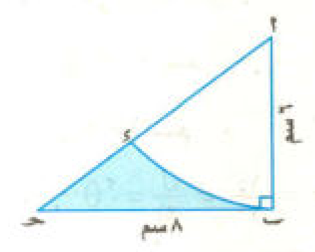
∴ ق (∠ أ م ب) = ٢ × ٥٦° ٢٦َ ٣٤ً = ١١٢° ٥٣َ ٨ً

مساحة القطاع الأصغر م أ ب = $\frac{س°}{٣٦٠°} \times \pi$ نق² = $\frac{١١٢° ٥٣َ ٨ً}{٣٦٠°} \times \pi \times (٦)^٢$ ≈ ٣٥,٤٦ سم²

مثال ٦

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، رسم قوس دائرى مركزه أ وطول نصف قطر دائرته يساوى أ ب قطع $\overline{أ حـ}$ فى ء أوجد لأقرب سم² مساحة المنطقة المحصورة بين : $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overset{\frown}{ب ء}$

الحل



المساحة المطلوبة = مساحة △ أ ب حـ − مساحة القطاع أ ب ء

إيجاد مساحة △ أ ب حـ :

مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²

إيجاد مساحة القطاع أ ب ء :

∵ نق = أ ب = ٦ سم ، ظا (∠ ب أ ء) = $\frac{ب حـ}{أ ب} = \frac{٨}{٦}$ ∴ ق (∠ ب أ ء) ≈ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

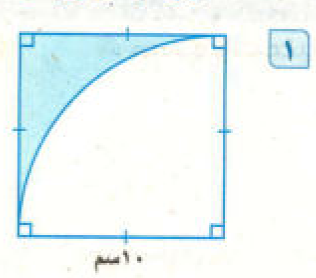
∴ مساحة القطاع أ ب ء = π نق² × $\frac{س°}{٣٦٠°}$ = π × ٦² × $\frac{٥٣° ٧َ ٤٨ً}{٣٦٠°}$ ≈ ١٧ سم²

∴ المساحة المطلوبة = ٢٤ − ١٧ = ٧ سم²

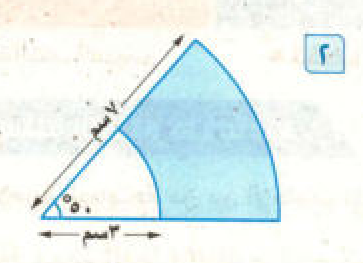
حاول بنفسك

أوجد مساحة الجزء المظلل فى كل مما يأتى بدلالة π :

١



٢



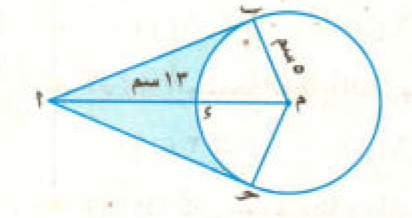
مثال ٧

أ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ م = ١٣ سم ، رسمت $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ مماستين للدائرة فى ب ، حـ فأوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة بين : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ ، $\overset{\frown}{ب حـ}$

الحل

مساحة المنطقة المطلوبة = مساحة الشكل أ ب م حـ − مساحة القطاع م حـ ء ب

إيجاد مساحة الشكل أ ب م حـ :



∵ $\overline{أب}$ مماسة للدائرة ، $\overline{ب م}$ نصف قطر فيها.

∴ ق (∠ م ب أ) = ٩٠°

وبالمثل ق (∠ أ حـ م) = ٩٠°

∴ أ ب = أ حـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم (فيثاغورث)

∴ مساحة الشكل أ ب م حـ = ٢ × مساحة Δ أ ب م = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٦٠ سم^٢

إيجاد مساحة القطاع م حـ ء ب :

فى Δ م ب أ القائم الزاوية فى ب : جتا (∠ ب م أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ∴ ق (∠ ب م أ) ≈ ٤٨ ً ٢٢ َ ٦٧°

∴ ق (∠ ب م حـ) = ٢ × ٤٨ ً ٢٢ َ ٦٧° ≈ ٣٦ ً ٤٥ َ ١٣٤°

∴ مساحة القطاع م حـ ء ب = π نق^٢ × $\frac{س°}{٣٦٠°}$ = π × ٢٥ × $\frac{٣٦ ً ٤٥ َ ١٣٤°}{٣٦٠°}$ ≈ ٢٩ سم^٢

∴ مساحة المنطقة المطلوبة = ٦٠ − ٢٩ = ٣١ سم^٢



تمـارين 12 على القطاع الدائرى

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى .... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٠

(٢) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٨

(٣) مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ١٠ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢,٥ (د) ١٠٠

(٤) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢^{ء} وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٤,٨ (ب) ٩,٦ (جـ) ١٢,٨ (د) ١٩,٦

(٥) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

(٦) إذا كان محيط قطاع دائرى ٨ سم وطول قوسه ٢ سم فإن : نق = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) القطاع الدائرى الذى محيطه ٤٤ سم وطول نصف قطر دائرته ١٤ سم فإن طول قوسه يساوى .... سم

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣٢ (د) ٤

(٨) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٩) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم ، ومحيطه ٢٠ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(١٠) قطاع دائرى مساحته ١٥ سم^2 وطول قوسه ٣ سم فإن : نق = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢,٥ (د) ١٥

(١١) قطاع دائرى مساحته ٤٠٠ سم^2 ، وطول نصف قطر دائرته ٢٠ سم فإن طول قوسه يساوى .... سم

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

(١٢) إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠ سم^2 وقياس زاويته ٢,٢^{د}

فإن طول نصف قطر دائرته يساوى .... سم

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) طول قوس القطاع الدائرى الذى مساحته ٦ π سم^2 ، وقياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{٣}$ هو .... سم

(أ) ١٨ (ب) ٦ π (جـ) ٦ (د) ٢ π

(١٤) محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم^2 ، طول قوسه ٨ سم يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٤ (جـ) ٣٢ (د) ٢٤

(١٥) قطاع دائرى مساحته ٤٥ سم^2 وطول قطر دائرته ٢٠ سم ، فإن محيطه يساوى .... سم

(أ) ٢٩ (ب) ١٩ (جـ) ٣٩ (د) ٤٩

(١٦) مساحة قطاع دائرى ٢٧ سم^2 وطول نصف قطر دائرته ٦ سم

، فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية = ...^{د}

(أ) ١,٥ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤,٥

(١٧) قطاع دائرى محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته ، فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية يساوى .... راديان.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٨) قطاع دائرى طول قوسه (ل) وقياس زاويته ١,٢^{د} وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه = ... وحدة طول.

(أ) ١,٢ نق (ب) ٣,٢ نق (جـ) ١,٢ نق^2 (د) ٣,٢ نق^2

(١٩) قياس زاوية القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته نق سم ومساحته $\frac{\pi}{٦}$ نق^2 سم^2

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٢٠) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم فإن مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع تساوى .... سم^2

(أ) ٧ π (ب) ١٤ π (جـ) ٤٩ π (د) ١٥٤ π

(٢١) دائرة مساحتها ٥٣,٦ سم^2 فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة قياس زاويته ٣٠َ ٦٧° ≃ .... سم^2

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢٢) دائرة مساحتها $\frac{٥}{٨}$ ٤٩٠ سم^2 فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة طول قوسه ٣٢ سم ≃ .... سم^2

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٣٠٠

(٢٣) قطاع دائرى طول قوسه ٤ ل سم وطول نصف قطر دائرته نق سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ل + ٢ نق (ب) نق + ٢ ل (جـ) ٢ (نق + ٢ ل) (د) ٢ (ل + ٢ نق)

(٢٤) قطاع دائرى طول قوسه (ل) وقياس زاويته ($\theta^{د}$) وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه = ...

(أ) نق + ل (ب) نق + ٢ ل (جـ) نق (٢ + $\theta^{د}$) (د) ٢ نق (١ + $\theta^{د}$)

(٢٥) قطاع دائرى محيطه ٣٥ سم ، ومساحته ٧٥ سم^2 فإن قياس زاويته بالقياس الدائرى = ...^{د}

(أ) $\frac{٣}{٢}$ أ، $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ أ، $\frac{٧}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ أ، $\frac{٨}{٣}$ (د) ١ أ، $\frac{٨}{٣}$

(٢٦) قطاع دائرى مساحته (م) زاد طول قطر دائرته إلى الضعف فإن مساحته تصبح .... باعتبار أن زاويته المركزية لا تتغير.

(أ) ٢ م (ب) ٤ م (جـ) $\frac{١}{٢}$ م (د) ٣ م

(٢٧) دائرة طول نصف قطرها نق سم وكان محيط قطاع دائرى فيها (٢ نق + ٨) سم

فإن مساحة هذا القطاع .... سم^2

(أ) نق^2 (ب) ٤ نق^2 (جـ) ٨ نق^2 (د) ٤ نق

(٢٨) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائرى إلى مساحة دائرته كنسبة ٢ : ٥

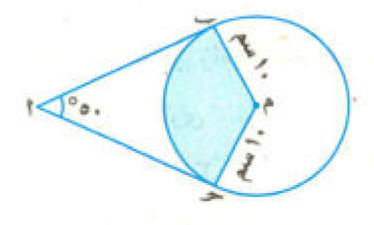
فإن قياس زاوية القطاع = ...

(أ) ٣٦° (ب) ٧٢° (جـ) ١٠٨° (د) ١٤٤°

(٢٩) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائرى إلى مساحة دائرته كنسبة ٣ : ٧ وكان محيط الدائرة يساوى ٤٢ سم فإن طول قوس القطاع = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٣٠) فى الشكل المقابل :

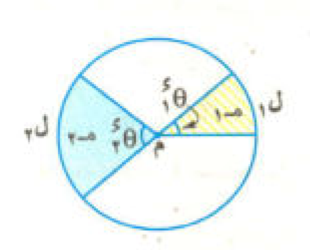


مساحة المنطقة المظللة تساوى ....

(أ) $\frac{٥٠}{٩}$ π (ب) $\frac{١٢٥}{٩}$ π

(جـ) $\frac{٢٠٠}{٩}$ π (د) $\frac{٣٢٥}{٩}$ π

(٣١) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، $م_1$ ، $م_2$ هما مساحتى القطاعين المظللين

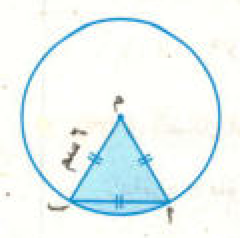
فإن : $\frac{م_1}{م_2}$ = ...

(١) $\frac{ل_1}{ل_2}$ (٢) $\frac{\theta_1^{د}}{\theta_2^{د}}$ (٣) $\frac{ل_1^2}{ل_2^2}$

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(٣٢) في الشكل المقابل :



نصف دائرة مركزها هـ

إذا كان : $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{٢}{٣}$

فإن : θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٠٥° (جـ) ١٠٨° (د) ١٢٠°

(٣٣) في الشكل المقابل :

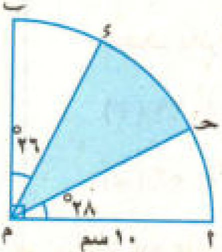


مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ π (د) ٦ π

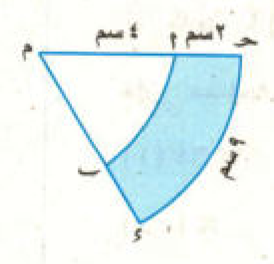
(٣٤) في الشكل المقابل : مساحة القطاع المظلل = ... سم^٢



(أ) ٣٠ π (ب) $\frac{٢٢٥}{\pi}$

(جـ) $\frac{٧٥}{٢\pi}$ (د) ٥٠ π

(٣٥) في الشكل المقابل :



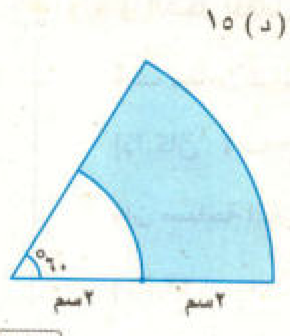
ربع دائرة مركزها م

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ١٠ π (ب) ٢٠ π

(جـ) ٣٠ π (د) ٤٠ π

(٣٦) في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز (م)

طولا نصفا قطريهما ٤ سم ، ٦ سم

وطول $\overset{\frown}{حـ ء}$ = ٩ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ١٠ (ب) ٩ π (جـ) ١٢ π (د) ١٥

(٣٧) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) π (ب) ٢ π

(جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ π

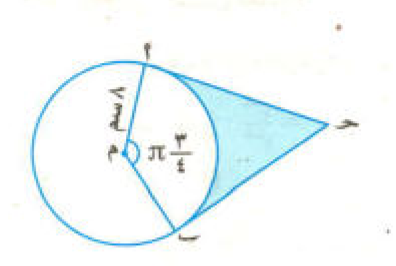
(٣٨) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{حـ أ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ب}$ مماسان للدائرة م

، طول نصف قطر الدائرة م = ٨ سم

فإذا كان : ق(∠ أ م ب) = $\frac{٣}{٤}$ π

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}



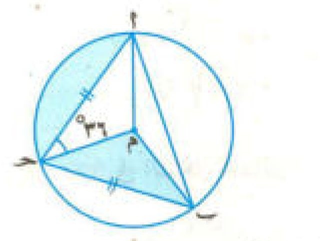
(أ) ٧٩,١ (ب) ٩٧,١ (جـ) ٧,٩١ (د) ٩,٧١

(٣٩) في الشكل المقابل :

دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، ب حـ = أ حـ ، ق(∠ أ حـ م) = ٣٦°

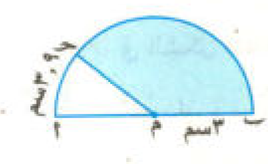
فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}



(أ) ٢٠ π (ب) ٣٠ π (جـ) ٤٠ π (د) ٥٠ π

(٤٠) في الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها م فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^{٢}



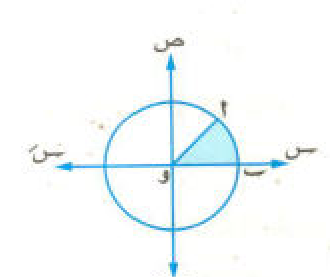
(أ) ٨,٢٩ (ب) ١٦,٦

(جـ) ٥,٥٢ (د) ١١,٠٤

(٤١) في الشكل المقابل :

إذا كانت : أ (٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$)

فإن : مساحة الجزء المظلل تساوى .... سم^{٢}



(أ) ٦٤ π (ب) ١٦ π

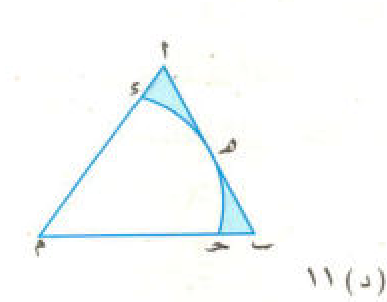
(جـ) ٤ π (د) ٨ π

(٤٢) في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م التي تمر بالنقط حـ ، ء ، هـ

إذا كان : أ ب = ٨ سم ، م ء = ١١ سم ، طول $\overset{\frown}{حـ هـ ء}$ = ٦ سم

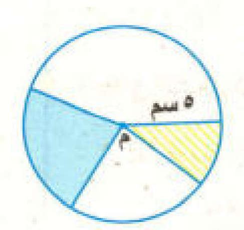
فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}



(أ) ٢٢ (ب) ١٨ (جـ) ١٢ (د) ١١



(٤٣) فى الشكل المقابل :

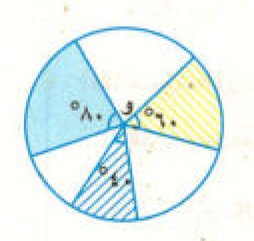


م مركز الدائرة ، محيط الجزء المظلل = ٤٥,٧ سم

فإن مساحة هذا الجزء = ... سم^{٢}

(أ) ١١٣,٢ (ب) ١٠١,١ (جـ) ٢٤ π (د) ٣٣ π

(٤٤) فى الشكل المقابل :



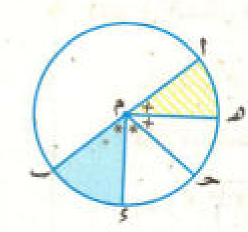
قطاعان دائريان فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

، مجموع محيطيهما ٣٠ سم فإن مجموع مساحتيهما

يساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٢ (د) ٢٠

(٤٥) فى الشكل المقابل :

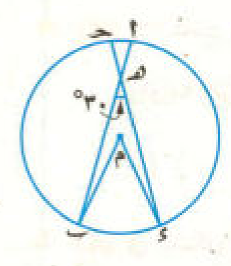


دائرة طول نصف قطرها ٧ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^{٢} $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١١ (ب) ٧٧ (جـ) ٥٣٧ (د) ٧٧٠

(٤٦) فى الشكل المقابل :



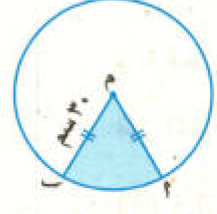
$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م طول نصف قطرها ٤ سم

، $\overrightarrow{مء}$ ينصف ∠ ب م جـ ، $\overrightarrow{مهـ}$ ينصف ∠ أ م جـ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٤ π (ب) ٣ π (جـ) ٢ π (د) π

(٤٧) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، ق $(\overset{\frown}{أجـ})$ = ٢٠°

، ق (∠ ء هـ ب) = ٣٠°

فإن مساحة القطاع ء م ب تساوى .... سم^{٢}

(أ) π (ب) $\frac{١}{٢}$ π (جـ) ٢ π (د) $\frac{٣}{٤}$ π

(٤٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overset{\frown}{أب}$: طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر = ١ : ٥

فإن مساحة القطاع المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٩٠ π (ب) ١٢٠ π (جـ) ١٥٠ π (د) ١٨٠ π

(٤٩) فى الشكل المقابل :

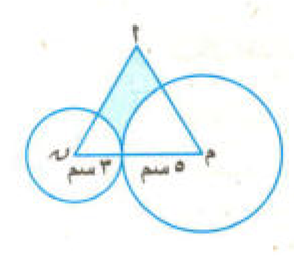


• إذا كان : $\frac{\text{مساحة القطاع الأصغر}}{\text{مساحة القطاع الأكبر}} = \frac{٢}{٧}$

فإن θ° = ...

(أ) $\frac{٢}{٩}\pi$ (ب) $\frac{٤}{٩}\pi$ (جـ) $\frac{٣}{٤}\pi$ (د) $\frac{٢}{٣}\pi$

(٥٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان : م أ : م ب : م حـ = ٤ : ٦ : ٩

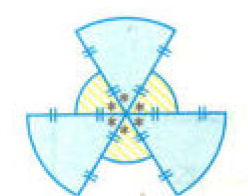
فإن : $\frac{\text{مساحة القطاع الأصغر م أ أَ}}{\text{مساحة القطاع الأصغر م حـ حـَ}} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١٦}{٨١}$

(٥١) دائرة طول نصف قطرها نق قسمت إلى ن من القطاعات الدائرية المتساوية فى المساحة فإن مساحة القطاع الواحد = ...

(أ) $\frac{ن}{٣٦٠}\pi$ نق^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} نق^{٢} (جـ) $\frac{١}{ن}\pi$ نق^{٢} (د) $\frac{ن}{\pi}$ نق^{٢}

(٥٢) فى الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متماستان من الخارج ، المثلث أ م ن متساوى الأضلاع

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ − $\frac{٢}{٣}\pi$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١٧}{٣}\pi$

(جـ) ١١ $\sqrt{٣}$ − ١٧ π (د) ٨ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١٧}{٣}\pi$

(٥٣) إذا كانت م مساحة قطاع دائرى فى دائرة فإذا نقص طول نصف قطر الدائرة إلى النصف دون تغيير زاويته المركزية فإن مساحة القطاع تنقص بمقدار .... المساحة الأصلية.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٥٤) فى الشكل المقابل :

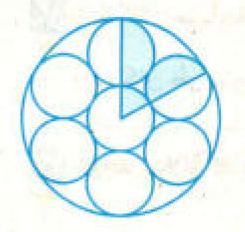
٣ قطاعات دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم

و ٣ قطاعات دائرية أخرى من دائرة طول نصف قطرها ٢ نق سم

فإن المساحة الكلية للشكل = ... سم^{٢}

(أ) ٣ π نق^{٢} (ب) ٥ π نق^{٢} (جـ) $\frac{٥}{٢}\pi$ نق^{٢} (د) $\frac{٣}{٢}\pi$ نق^{٢}

(٥٥) فى الشكل المقابل :



٧ دوائر متطابقة ومتماسة من الخارج

كما بالشكل طول نصف قطر كل منها نق سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ نق^{٢} (ب) $\frac{٧\pi}{٦}$ نق^{٢} (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ نق^{٢} (د) $\frac{٥}{٦}$ π نق^{٢}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة قطاع دائرى طول قوسه ١٢ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٨ سم «٤٨ سم^{٢}»

---

٢ قطاع دائرى طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم. أوجد مساحته. «٧٢ سم^{٢}»

---

٣ قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرته ٣,٥ سم

احسب لأقرب سم^{٢} مساحة القطاع. «٣ سم^{٢} تقريبًا»

---

٤ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠° «١٠٤,٧ سم^{٢} تقريبًا»

---

٥ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ٤٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم لأقرب سم^{٢}

«١٣ سم^{٢}»

---

٦ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ١,٢^{د} «٦٠ سم^{٢}»

---

٧ قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته. «٣١,٥ سم^{٢}»

---

٨ قطاع دائرى محيطه ٢٨ سم ، وطول نصف قطر دائرته ٧ سم أوجد مساحته وقياس زاويته المركزية بكلا القياسين الدائرى والستينى. «٤٩ سم^{٢} ، ٢^{د} ، ١١٤ ٣٥ °»

---

٩ قطاع دائرى مساحته تساوى ٢٧٠ سم^{٢} وطول نصف قطر دائرته يساوى ١٥ سم

أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان. «٣٦ سم ، ٢,٤^{د}»

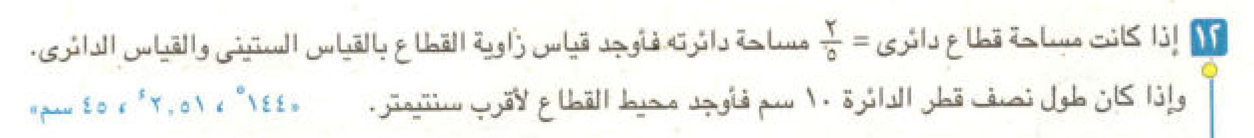
---

١٠ قطاع دائرى مساحته ٤٠ سم^{٢} ، وطول قوسه ٨ سم أوجد محيطه. «٢٨ سم»

---

١١ قطاع دائرى مساحته ٢٥ سم^{٢} ، وقياس زاويته المركزية ٠,٥^{د} احسب طول نصف قطر دائرته وطول قوسه.

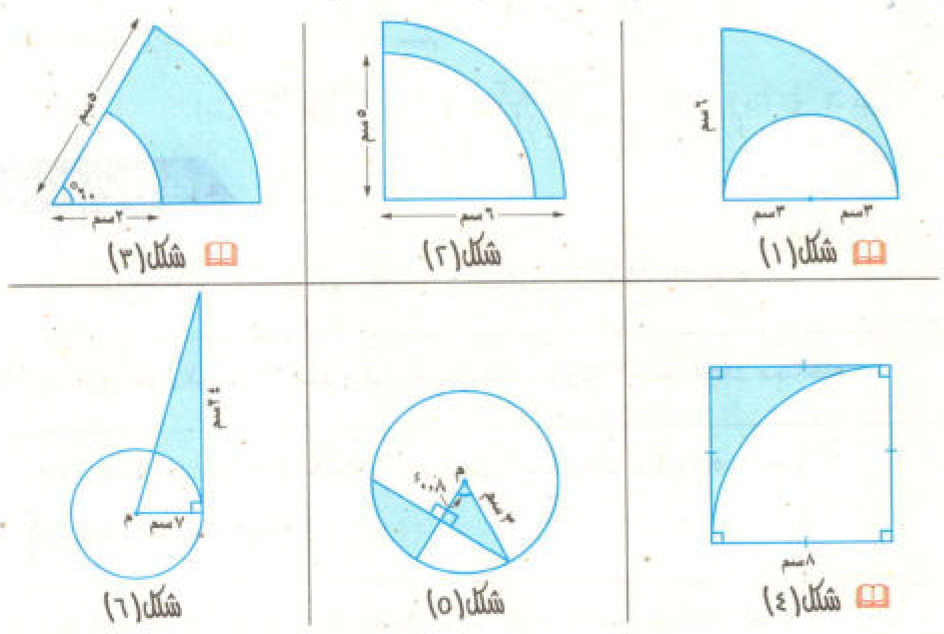
«١٠ سم ، ٥ سم»



١٢ إذا كانت مساحة قطاع دائرى = $\frac{٢}{٥}$ مساحة دائرته فأوجد قياس زاوية القطاع بالقياس الستينى والقياس الدائرى.
وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم فأوجد محيط القطاع لأقرب سنتيمتر. «١٤٤° ، $٢,٥١^{د}$ ، ٤٥ سم»

---

١٣ أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية :



---

١٤ دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥ سم ، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ بحيث : أ ب = ١٢ سم
أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سم² «٥٢ سم² تقريبًا»

---

١٥ ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هى رؤوس المثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوائر الثلاث. «٤ سم² تقريبًا»

---

١٦ أ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، م أ = ١٢ سم رسمت $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ مماستين للدائرة فى ب ، حـ
أوجد لأقرب سم² مساحة المنطقة المحصورة بين المماسين ، $\overset{\frown}{ب حـ}$ الأصغر. «٢٥ سم² تقريبًا»

---

١٧ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ $\sqrt{٣}$ سم ، رسم قوس دائرى مركزه أ ويمس $\overline{ب حـ}$ فى ء
ويقطع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ فى س ، ص أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة المنطقة
المحصورة بين $\overline{ب حـ}$ ، $\overset{\frown}{س ص}$ ($\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢) «٧,٧ سم² تقريبًا»

---

١٨ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ وتران فى دائرة م حيث : أ ب = أ حـ = ٨ سم فإذا كان ق (∠ أ) = ٦٠°
، فأوجد لأقرب سم² مساحة القطاع الأصغر م ب حـ «٢٢ سم² تقريبًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة ٣ س^٢ − ١٩ س + ١٣ = ٠ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها

فإن محيط القطاع الدائرى المرسوم على هذا القوس = ... سم

(أ) ١٩ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١٩}{٣}$ (د) $\frac{١٣}{٣}$

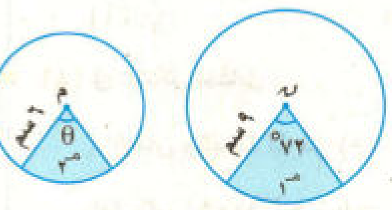
(٢) إذا كان جذرا المعادلة س^٢ − ١٣ س + ١٩ = ٠ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها

فإن مساحة القطاع الدائرى المرسوم على هذا القوس = ... سم^٢

(أ) ١٩ (ب) $\frac{١٩}{٢}$ (جـ) $\frac{١٣}{٤}$ (د) $\frac{١٩}{٤}$

(٣) فى الشكل المقابل :





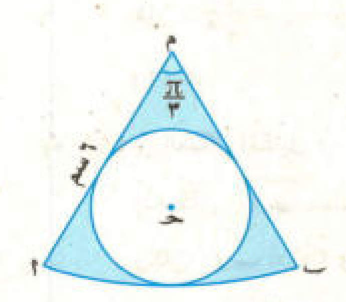
دائرتان م ، ن متباعدتان

إذا كان م$_١$ ، م$_٢$ هما مساحتا القطاعين

وكان : $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{٩}{٥}$ فإن : θ = ...

(أ) °٧٢ (ب) °٨٠ (جـ) °٩٠ (د) °١٠٠

(٤) فى الشكل المقابل :



م أ ب قطاع دائرى من دائرة مركزها (م)

، طول نصف قطرها ٦ سم ، ق (∠ أ م ب) = $\frac{\pi}{٣}$

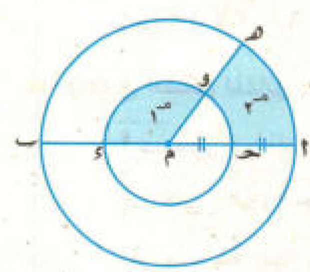
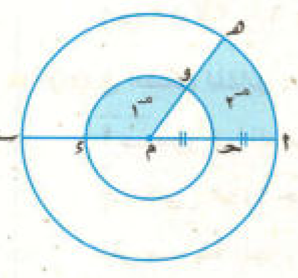
، ودائرة (ن) بداخل القطاع

تمس $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overset{\frown}{أ ب}$

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٥) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز (م) ، م جـ = جـ أ

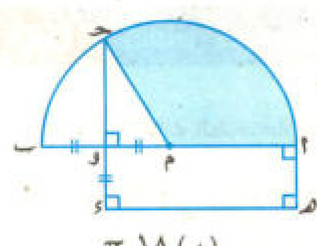
إذا كان م$_١$ ، م$_٢$ هما مساحتا المنطقتين المظللتين

وكان : م$_١$ = م$_٢$

فإن ق (∠ أ م هـ) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٦) فى الشكل المقابل :

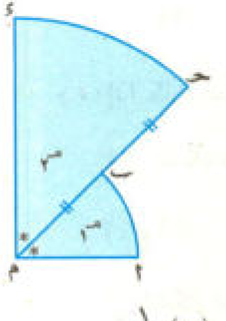


إذا كانت مساحة المستطيل أ هـ ء و = ٢٧ سم^2

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٩ π (ب) ١٢ π (جـ) ١٥ π (د) ١٨ π

(٧) فى الشكل المقابل :



$\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{جـ ء}$ قوسان فى دائرتين متحدتى المركز م

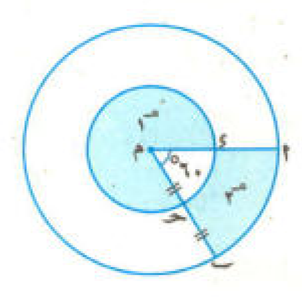
، م ب = ب جـ ، ق (∠ أ م ب) = ق (∠ جـ م ء)

إذا كان : م$_1$ ، م$_2$ مساحتى القطاعين

فإن : $\frac{م_1}{م_2}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٨) فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز (م)

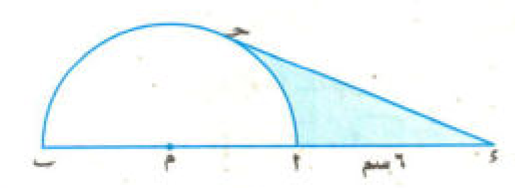
إذا كان : ق (∠ أ م ب) = ٦٠° ، م جـ = جـ ب

وكان م$_1$ ، م$_2$ مساحتى المنطقتين المظللتين

فإن : $\frac{م_1}{م_2}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{5}{3}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) ١

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{ء جـ}$ مماس لنصف دائرة (م)

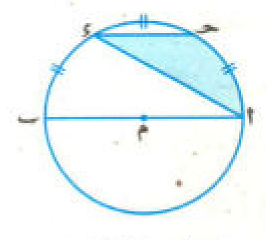
وكان : ء ب = $\sqrt{3}$ ء جـ ، أ ء = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٢ $\sqrt{3}$ (ب) ١٢ $\sqrt{3}$ − ٣ π

(جـ) ١٨ $\sqrt{3}$ − ٦ π (د) ١٨ $\sqrt{3}$ − ٨ π

(١٠) فى الشكل المقابل :

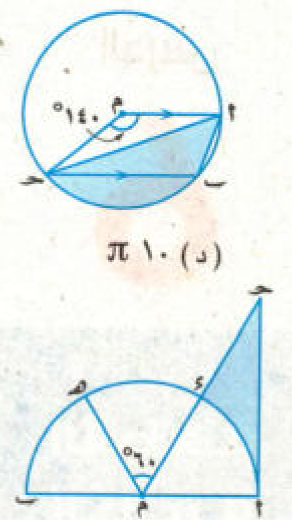


$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م طوله ١٢ سم

إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ء ب}$)

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٥ π (ب) ٦ π (جـ) ٨ π (د) ١٠ π



(١١) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها (م) ، $\overline{أم}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ أ م حـ) = ١٤٠°

، طول نصف قطر الدائرة = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ٥ π (ب) ٦ π (جـ) ٨ π (د) ١٠ π

(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كان طول القوس أ ء هـ = طول $\overline{أ حـ}$

، أ م = ١٢ سم ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ مماس للدائرة م عند أ

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم٢

(أ) ٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٤ π (د) ٣٦ π

(١٣) في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفي قطريهما ١٢ سم

، ١٨ سم إذا كان : ق (∠ أ م أَ) = ٣٠°

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم٢

(أ) ١٢٥ π (ب) ١٥٠ π (جـ) ١٦٥ π (د) ١٨٠ π

---

٢ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، رسم قوس من دائرة مركزها أ ويمس $\overline{ب حـ}$ عند ب ويقطع $\overline{أ حـ}$ في ء فأوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة الجزء المحصور بين $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overset\frown{ء ب}$ «٤,١ سم٢»

---

٣ م ، ن مركزا دائرتين متماستين من الخارج في أ ، المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس مشترك لهما يمس الأولى في ب والثانية في حـ فإذا كان طولا نصفي قطري الدائرتين ٥ سم ، ١٥ سم على الترتيب فأوجد لأقرب سم٢ مساحة المنطقة المحصورة بين المماس المشترك والدائرتين ($\sqrt{3}$ = ١,٧٣٢) «٢٩ سم٢ تقريبًا»

تطبيقات حياتية

١ الربط بالزراعة : حوض زهور على شكل قطاع دائري مساحته ٤٨ م٢ وطول قوسه ٦ م أوجد محيطه وطول نصف قطر دائرته. «٢٨ متر ، ١٦ متر»

---

٢ قطعة من الورق على شكل مربع قطع منها ربع دائرة مركزها أحد رؤوس المربع وطول نصف قطرها يساوي طول ضلع المربع فإذا كانت مساحة الجزء الباقي من المربع ٤٨,٢٨٥ سم٢ فأوجد طول ضلع المربع. «١٥ سم»



الدرس

6

القطعة الدائرية

تعريف

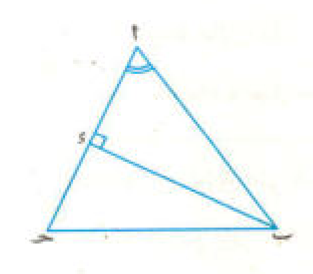
القطعة الدائرية هى جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس.



- فإذا رسمنا فى الدائرة م الوتر $\overline{\text{أب}}$ - كما فى الشكل المقابل
  فإن سطح الدائرة ينقسم بهذا الوتر إلى جزأين كل منهما يسمى **«قطعة دائرية»**.
- والزاوية المركزية التى تقابل قوس القطعة تسمى زاوية القطعة فالزاوية أ م ب فى الشكل هى زاوية القطعة الصغرى أ ى ب بينما $\angle$ أ م ب المنعكسة هى زاوية القطعة الكبرى أ ء ب
- وإذا كان $\overline{\text{ءى}}$ قطرًا عموديًا على الوتر $\overline{\text{أب}}$ بحيث : $\overline{\text{ءى}} \cap \overline{\text{أب}} = \{\text{هـ}\}$
  فإن ى هـ يسمى ارتفاع القطعة الصغرى.
- **ويلاحظ أن** مساحة القطعة الصغرى = مساحة القطاع م أ ى ب - مساحة Δ م أ ب
  ، مساحة القطعة الكبرى = مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة Δ م أ ب

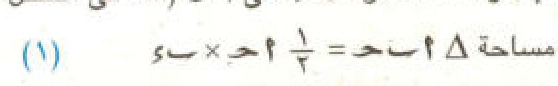
وعلى ذلك فإن مساحة القطعة الدائرية يتطلب حسابها إيجاد مساحة المثلث الذى قاعدته وتر القطعة ورأسه مركز الدائرة ، لذلك نمهد لمساحة القطعة بقانون يستفاد به فى إيجاد مساحة المثلث.

مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما :



نفرض أن لدينا Δ أ ب ح المعلوم فيه : طول $\overline{\text{أب}}$ ، طول $\overline{\text{أح}}$ ، ق ($\angle$ أ)

فإذا رسمنا العمود $\overline{\text{بء}}$ على $\overline{\text{أح}}$ (كما فى الشكل المقابل) فإن :



مساحة Δ أ ب ح = $\frac{1}{2}$ أ ح × ب ء (١)

ولكن من Δ أ ب ء القائم الزاوية فى ء :

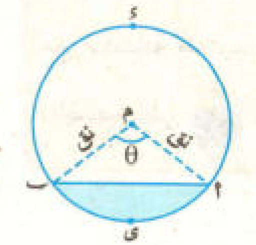
$\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}}$ = جا أ أى ب ء = أ ب جا أ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ × أ ب جا أ

وهذا القانون صحيح لأى مثلث

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

إيجاد مساحة القطعة الدائرية



نفرض أن المطلوب إيجاد مساحة القطعة الصغرى أ ى ب

من دائرة طول نصف قطرها «نق» وأن قياس الزاوية

المركزية للقطعة = θ بالقياس الدائرى.

لذلك نقول : مساحة القطاع م أ ى ب = $\frac{١}{٢}$ θ^{ء} نق^{٢}

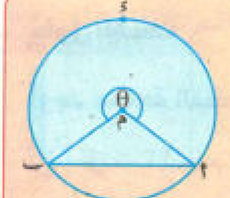
، مساحة Δ م أ ب = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا (∠ أ م ب) = $\frac{١}{٢}$ نق × نق جا θ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا θ

∴ مساحة القطعة أ ى ب = مساحة القطاع م أ ى ب − مساحة Δ م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ θ^{ء} نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا θ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} − جا θ)

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} − جا θ)

ملاحظات



١ مساحة القطعة الكبرى أ ء ب

= مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة Δ م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ θ^{ء} نق^{٢} + $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا (٢ π − θ)

= $\frac{١}{٢}$ θ^{ء} نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} جا θ (لأن جا (٢ π − θ) = − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} − جا θ)

٢ يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة.

٣ محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها

مثال ١

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°

الحل

∵ θ^{ء} = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ٢,٠٩٤٤^{ء}

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ٨^{٢} (٢,٠٩٤٤^{ء} − جا ١٢٠°) ≈ ٣٩,٣ سم^{٢}

ملاحظة

في المثال السابق : يمكن استخدام القياس الدائري للزاوية المركزية في حساب مساحة القطعة بدلاً من استخدام القياس الستيني فتكون :

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \times 8^2$ (٢,٠٩٤٤^د – جا ٢,٠٩٤٤) ≈ ٣٩,٣ سم^2

مع ملاحظة أنه يجب تحويل نظام الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل حساب المساحة وذلك بالضغط على



مثال ٢

أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١,٠٢^د مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^د$ – جا θ) = $\frac{1}{2} \times 10^2$ (١,٠٢^د – جا ١,٠٢^د)

≈ ٨,٣٩ سم^2

حاول بنفسك

أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها نق وقياس زاويتها المركزية θ إذا كان :

١ نق = ١٢ سم ، θ = ١٥٠°

٢ نق = ٨ سم ، $\theta^د$ = ٢,٠٢^د

مثال ٣

قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٢٦,١٩ سم

أوجد مساحة هذه القطعة.

الحل

∵ $\theta^د$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{26.19}{10}$ = ٢,٦١٩^د

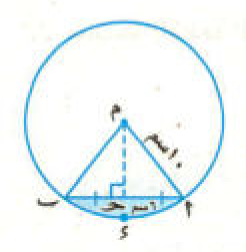
∴ مساحة القطعة = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^د$ – جا θ)

= $\frac{1}{2} \times (10)^2$ [٢,٦١٩^د – جا ٢,٦١٩^د] ≈ ١٠٥,٩٩ سم^2

مثال ٤

إذا كان طول وتر قطعة دائرية فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم يساوى ١٢ سم فأوجد مساحة هذه القطعة علمًا بأنها قطعة صغرى فى الدائرة.

الحل



نفرض أن $\overline{\text{أب}}$ هو وتر القطعة ، م هو مركز الدائرة

ونرسم $\overline{\text{مـحـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ فتكون حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

أى أ حـ = حـ ب = ٦ سم

ومن Δ أ م حـ يكون : م حـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم ، حا (∠ أ م حـ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

∴ ق (∠ أ م حـ) ≈ ٣٦ َ ٥٢ ْ٣٦   ∴ ق (∠ أ م ب) = ٢ × ٣٦ َ ٥٢ ْ٣٦ = ٤٤ َ ْ٧٣

∴ $\theta^{ء}$ = ٤٤ َ ْ٧٣ × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ ≈ ١,٢٨٦٩ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية أ ء ب = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ − حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (١,٢٨٦٩ ء − حا ٤٤ َ ْ٧٣) ≈ ١٦,٣٥ سم^٢

مثال ٥

أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى طول وترها ٢٤ سم ، وارتفاعها ٦ سم

الحل



نفرض أن : $\overline{\text{أب}}$ هو وتر القطعة فى دائرة م

ونرسم $\overline{\text{مـحـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ يقطع $\overline{\text{أب}}$ فى ء ويقطع الدائرة فى حـ

فيكون حـ ء هو ارتفاع القطعة   ∴ حـ ء = ٦ سم

، ∵ $\overline{\text{مء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ∴ أ ء = ء ب = ١٢ سم

، ∵ م حـ = م أ = نق   ∴ م ء = نق − ٦

∵ Δ أ ء م فيه ق (∠ أ ء م) = ْ٩٠   ∴ (أ م)^٢ = (أ ء)^٢ + (م ء)^٢

∴ نق^٢ = ١٤٤ + (نق − ٦)^٢ ∴ نق^٢ = ١٤٤ + نق^٢ − ١٢ نق + ٣٦

∴ ١٢ نق = ١٨٠   ∴ نق = ١٥ سم

> **لاحظ أن**
> ١٢ × ١٢ = ٦ × (٢ نق − ٦)
> ∴ نق = ١٥ سم

، ∵ جا(∠ أ م ء) $= \frac{\text{أء}}{\text{أم}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$ ∴ ق(∠ أ م ء) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ ق(∠ أ م ب) = ٢ × ٥٣° ٧َ ٤٨ً = ١٠٦° ١٥َ ٣٦ً

، ∵ $\theta^{ء}$ = ١٠٦° ١٥َ ٣٦ً × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = ١,٨٥ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية الصغرى = $\frac{١}{٢}$ × نق² ($\theta^{ء}$ − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥² (١,٨٥ ء − جا ١٠٦° ١٥َ ٣٦ً) = ١٠٠,١٢٥ سم²

حاول بنفسك

أوجد مساحة قطعة دائرية ارتفاعها ٣ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم

مثال ٦

دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ٦ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

الحل



بفرض أن الدائرتين متقاطعتان فى أ ، ب



∴ $\overline{\text{أب}}$ يقسم المنطقة المحصورة بين الدائرتين إلى قطعتين متساويتين فى المساحة.



، ∵ △ أ م ن متساوى الأضلاع فيه : م أ = م ن = أ ن = ٦ سم

، △ ب م ن متساوى الأضلاع فيه : م ب = م ن = ن ب = ٦ سم

∴ ق(∠ أ م ن) = ق(∠ ب م ن) = ٦٠° ∴ ق(∠ أ م ب) = ق(∠ أ ن ب) = ١٢٠°

، ∵ $\theta^{ء}$ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٢}{٣}\pi$

∴ مساحة القطعة الصغرى أ ن ب = $\frac{١}{٢}$ نق² ($\theta^{ء}$ − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦² ($\frac{٢}{٣}\pi$ − جا ١٢٠°) ≈ ٢٢,١١ سم²

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرتين = ٢ × ٢٢,١١ = ٤٤,٢٢ سم²

تمـارين 13 على القطعة الدائرية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠°
تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٩٥ (ب) ٥١ (جـ) ٨٣ (د) ٣٩

(٢) مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ١,٢ ^ء^
تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٨,٥٧ (ب) ٢,١٤ (جـ) ٤,٢٨ (د) ١,٠٧

(٣) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٥ سم
تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ١,٠٣ (ب) ٢,٠٦ (جـ) ٠,٠١ (د) ٠,٠٥

(٤) مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢ $\sqrt{3}$ سم
تساوى .... سم².

(أ) $\frac{\pi}{٢} + ٢$ (ب) $\pi - ٣$ (جـ) $\pi + ٣$ (د) $\frac{\pi}{٢} - ٢$

(٥) مساحة القطعة الدائرية المرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المحيطية ٦٠°
تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ١٨ (ب) ٥٥ (جـ) ٦١ (د) ٢٧

(٦) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٨ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٨ سم لأقرب سم²
تساوى .... سم²

(أ) ٢٩ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(٧) فى الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٧,١ (ب) ٢٨,٥
(جـ) ١٤,٣ (د) ٢,٠٢

أ ، ٤٥° ، م ، ب ، جـ ، ١٠ سم

(٨) مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها يساوى ١٢ سم ≃ .... سم²

(أ) ٤٣٩ (ب) ٣١٥ (جـ) ١٣٧ (د) ١٣

(٩) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم فإن مساحة القطعة الصغرى التى وترها $\overline{بحـ}$ ≃ .... سم²

(أ) ٣٥ (ب) ٧٢ (جـ) ٤٥ (د) ٥

(١٠) القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم² يكون طول نصف قطر دائرتها يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ٩,٩ (ب) ١٩,٨ (جـ) ٧ (د) ١٤

(١١) دائرة مساحتها ٧٠٦,٥ سم² فإن مساحة قطعة من هذه الدائرة قياس زاويتها المركزية ١٣٥° (π = ٣,١٤) تساوى .... سم² تقريبًا.

(أ) ٢٦٤,٩ (ب) ١٨٥,٥ (جـ) ١٢,٤ (د) ٣٤٤,٦

(١٢) مساحة القطعة الدائرية التى ارتفاعها ٥ سم وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٩,١ (ب) ١٢٢,٨ (جـ) ١٢,٣ (د) ٦١,٤

(١٣) مساحة قطعة دائرية طول وترها ٨ سم ، ويبعد عن مركز الدائرة ٥ سم تساوى تقريبًا .... سم²

(أ) ٤٨ (ب) ١٢١ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٤) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٦ سم ، وارتفاعها ٤ سم ≃ .... سم²

(أ) ١٤١ (ب) ٤٥ (جـ) ٧٩ (د) ١٠٧

(١٥) مساحة القطعة الدائرية تساوى مساحة القطاع الدائرى المشترك معها فى القوس إذا كان قياس زاويته المركزية يساوى ....°

(أ) ٩٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٧٠ (د) ٤٥

(١٦) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°

فإن مساحة المثلث = ... سم²

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(١٧) فى دائرة واحدة إذا كانت القطعة الدائرية تشترك مع القطاع الدائرى فى نفس القوس فيكون لها نفس المساحة إذا كان ....

(أ) ل = ٢ نق (ب) $\theta = \pi$ (جـ) $\theta = \frac{٣\pi}{٢}$ (د) ل = نق

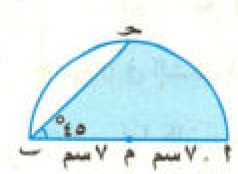
(١٨) قطعة دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم وطول وترها $\sqrt{2}$ نق سم

فإن مساحتها .... سم^2

(أ) نق^2 $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ (ب) $\frac{1}{4}$ نق^2 $(\pi - 2)$

(جـ) ٢ نق^2 $(\pi - 1)$ (د) $\frac{1}{4}$ نق^2 $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

(١٩) في الشكل المقابل :

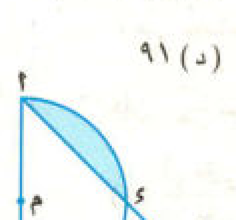


ق (∠ أ ب حـ) = ٤٥° ، $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م بحيث أ ب = ١٤ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2 حيث $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(أ) ٧٧ (ب) ٦٣ (جـ) ١٤ (د) ٩١

(٢٠) في الشكل المقابل :



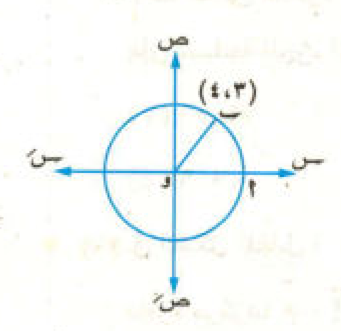
نصف دائرة م ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة م عند ب

، أ ب = ب حـ = ١٢ سم فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^2

(أ) ٢٠,٥٥ (ب) ٣,٤٢

(جـ) ١٠,٢٧ (د) ١,٤

(٢١) في الشكل المقابل :



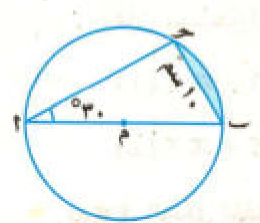
مساحة القطعة الدائرية الصغرى

التي وترها $\overline{أب}$ ≃ .... وحدة مربعة.

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦

(جـ) ١,٣ (د) ١,٦

(٢٢) في الشكل المقابل :



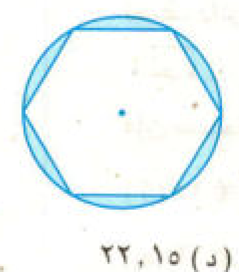
إذا كان $\overline{أب}$ قطر في دائرة م

فإن : مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^2

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٢٣) في الشكل المقابل :



دائرة طول نصف قطرها ٦ سم تمر برؤوس سداسي منتظم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^2

(أ) ١٦,٢٤ (ب) ١٩,٥٧ (جـ) ٢٠,٤١ (د) ٢٢,١٥

(٢٤) في الشكل المقابل :

دائرة طول نصف قطرها نق

فإن محيط القطعة الدائرية المظللة = ...

(أ) نق ($\theta^{ء}$ + حا θ°)
(ب) ٢ نق ($\frac{1}{2}\theta^{ء}$ + حا $\frac{1}{2}\theta^{\circ}$)
(جـ) ٢ نق ($\theta^{ء}$ + حا $\frac{1}{2}\theta^{\circ}$)
(د) نق ($\frac{1}{2}\theta^{ء}$ + حا θ°)

(٢٥) في الشكل المقابل :

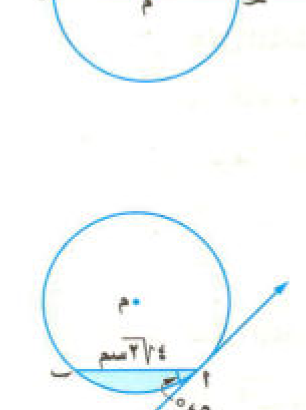
إذا كان : م$_1$ مساحة القطعة الدائرية التي وترها $\overline{أب}$

، م$_2$ مساحة القطعة الدائرية التي وترها $\overline{حـ ء}$

فإن : $\frac{م_1}{م_2}$ تساوي كل مما يأتي ما عدا ....

(أ) $\frac{ل_1 \, نق_2}{ل_2 \, نق_1}$
(ب) $\left(\frac{ل_1}{ل_2}\right)^2$
(جـ) $\left(\frac{نق_1}{نق_2}\right)^2$
(د) $\left(\frac{أب}{حـ ء}\right)^2$

(٢٦) في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، أحـ = ٣ سم ، ق(∠أ) = ٣٠°

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^2

(أ) ١٨,٥٦
(ب) ١٠,٤٩
(جـ) ٨,٩
(د) ٥,٥٣

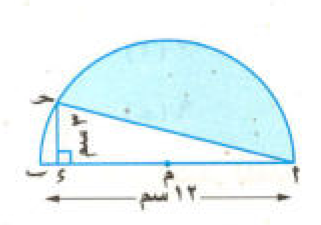
(٢٧) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة عند أ ، ق(∠ب أ حـ) = ٤٥°

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

(أ) ٤ π − ٦
(ب) ٤ π − ٨
(جـ) ٢ π − ٤
(د) ٢ π − ٦

(٢٨) في الشكل المقابل :



نصف دائرة م طول قطرها ١٢ سم

، $\overline{حـ ء} \perp \overline{أب}$ ، حـ ء = ٣ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

(أ) ١٥ π − ٩
(ب) ١٥ π − ١٨
(جـ) ١٢ π − ٩
(د) ١٢ π − ١٨



(٢٩) فى الشكل المقابل :

$\overset{\frown}{حـ هـ ء}$ ربع دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{أب}$ يمسها فى هـ



فإن مساحة القطعة الدائرية المظللة = ... سم^2

(أ) ٣٦ π (ب) ٧٢ π

(جـ) ٣٦ $(\pi - ٢)$ (د) ٧٢ $(\pi - ٢)$

(٣٠) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها (و) ، ق(∠ و) = ٦٠° ، أ حـ = ٢ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٤ π − ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{٨\pi}{٣} - \sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{٨\pi}{٣}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٢ $\pi - \sqrt{٣}$

(٣١) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

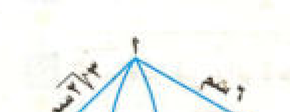
، قياس الزاوية بينهما ٣٠° ، أ ب = ٥ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ١,٩ (ب) ٢,٧ (جـ) ٣,٢ (د) ٦,٦

(٣٢) فى الشكل المقابل :





قطاعان دائريان من الدائرتين م ، ن اللتان طولا نصفا قطريهما ٦ سم

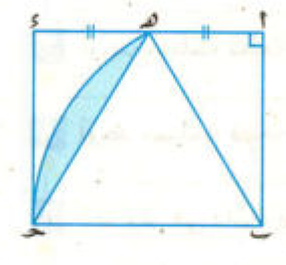
، ٣ $\sqrt{٢}$ سم على الترتيب ، فإذا كانت مساحة القطاع م أ ب = ٦ π سم^2

، مساحة القطاع ن أ ب = ٤,٥ π سم^2

فإن مساحة الشكل الرباعى أ م ب ن = ... سم^2

(أ) ١٠,٥ π (ب) ٩ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ π (د) ٩ + ٩ $\sqrt{٣}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه هـ منتصف $\overline{أء}$ ، أ هـ = هـ ء = ٦ سم

رسمت دائرة مركزها (ب) تمر بالنقطتين هـ ، حـ

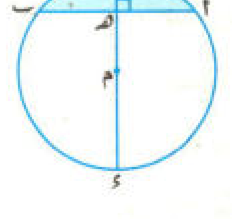
فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٩ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٨ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢٤ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٣٦ π − ٣٦ $\sqrt{٣}$



(٣٤) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها نق

إذا كان : ء هـ = ٣ هـ حـ

فإن مساحة المنطقة المظللة = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × ....

(أ) $\frac{\pi}{٦} - \frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣} - \frac{١}{٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي :

(١) طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها يساوي ٤ ,٩^{ء} «٣٠ سم^{٢} تقريبًا»

(٢) طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها يساوي ١٣٥° «٥٣ سم^{٢} تقريبًا»

٢ أوجد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٢٤َ ١١٥° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم

«٢٢٢ سم^{٢} تقريبًا»

٣ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٤ سم ، وطول قوسها ٢٢ سم. «٥٦ سم^{٢} تقريبًا»

٤ دائرة مساحتها $\frac{٧}{٨}$ ٤٩٠ سم^{٢} أوجد مساحة قطعة من هذه الدائرة طول قوسها ١٨ ,٢٦ سم «٩٦ سم^{٢}»

٥ $\overline{أب}$ وتر في دائرة طوله ١٠ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° أوجد مساحة القطعة الكبرى التي وترها $\overline{أب}$ «٣٠٥ سم^{٢}»

٦ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي :

(١) طول وترها ٦ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٥ سم «٤ سم^{٢} تقريبًا»

(٢) ارتفاعها ٥ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم «٦١ سم^{٢} تقريبًا»

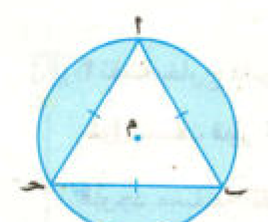
٧ أوجد مساحة قطعة دائرية طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ٦ سم «٣,٢٦ سم^{٢} تقريبًا»

٨ أوجد مساحة قطعة دائرية كبرى طول وترها ١٤ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠,٥ سم «٣٢١ سم^{٢}»

٩ وتر في دائرة طوله ٨ سم على بعد ٣ سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة. «١١ سم^{٢} تقريبًا»

١٠ في الشكل المرسوم :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨ سم ، أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة.



«٣٩ سم^2 تقريبًا»

---

١١ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة برؤوسه أوجد طول نصف قطر الدائرة ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الى وترها $\overline{\text{ب حـ}}$

«١١٨ سم^2»

---

١٢ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = أ حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ١٨ سم فأوجد مساحة كل من القطع الصغرى الثلاث التى أوتارها أضلاع المثلث أ ب حـ

«٣٩,٣ سم^2 ، ٣٩,٣ سم^2 ، ٨٩,٥ سم^2 تقريبًا»

---

١٣ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ وتران متساويا الطول فى دائرة م طول كل منهما ٦ $\sqrt{3}$ سم ، ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠°

أوجد مساحة الجزء من سطح الدائرة المحصور بين الوترين والقوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

«٦٩ سم^2»

---

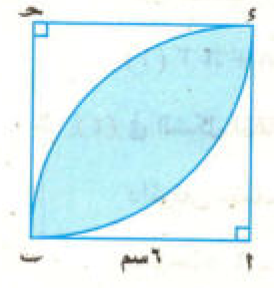
١٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم

رسم قوسان دائريان مركزاهما أ ، حـ

، وطول نصف قطر كل منهما = ٦ سم

أوجد مساحة الجزء المظلل.



«٢١ سم^2 تقريبًا»

---

١٥ دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ١٢ سم ، وتمر كل منهما بمركز الأخرى.

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

«١٧٧ سم^2 تقريبًا»

---

١٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم مرسوم داخل دائرة

أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة كل من القطع الثلاث الصغرى التى أوتارها أضلاع المثلث.

«٤ سم^2 ، ١١ سم^2 ، ٣٩ سم^2 تقريبًا»

---

١٧ في الشكل المقابل :

م ، ن ، هـ مراكز أنصاف دوائر

، أ حـ = ٨ سم ، حـ ب = ٦ سم

أوجد مساحة الجزء المظلل.



«٢٤ سم^2»

١٨ أ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسم من أ القطعتان المماستان $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ يمسانها في ب ، جـ فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، أ م = ١٠ سم

فأوجد مساحة القطعة الصغرى التي قوسها $\overset{\frown}{\text{بجـ}}$ «١٥,٣٥٥ سم²»

---

١٩ دائرتان طولا نصفي قطريهما ٦ سم ، ٨ سم ، والبعد بين مركزيهما ١٠ سم

أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين لأقرب جزء من عشرة. «٢٦,٦ سم²»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

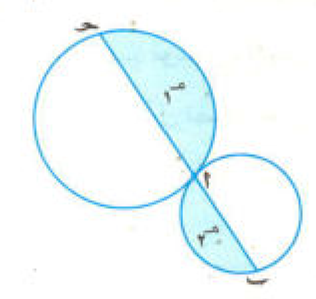
(١) في الشكل المقابل :

ربع دائرة م ، ق(∠ أ م جـ) = ٥٠° ، جـ د = جـ ب

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٣ π + ١٨ (ب) ١٦ π (جـ) ٩ + ٨ π (د) ١٢ π

(٢) في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الخارج في أ ، إذا كان : أ ب = ٤ سم

، أ جـ = ٦ سم وكانت م١ ، م٢ مساحتي الجزأين المظللين

فإن : $\frac{م_2}{م_1}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٢٥}$

(٣) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق($\overset{\frown}{\text{أجـب}}$) = ٣٠٠°

، محيط الشكل المظلل = (٣ π + ٩) سم

فإن مساحة الشكل المظلل = ... سم²

(أ) $\frac{٢٧}{٢}$ (٣ π − ٣ $\sqrt{٣}$) (ب) $\frac{٢٧}{٢}$ (٢ π − ٣ $\sqrt{٣}$)

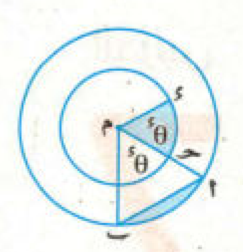
(جـ) $\frac{٢٧}{٤}$ (٣ π − ٣ $\sqrt{٣}$) (د) $\frac{٢٧}{٤}$ (٢ π − ٣ $\sqrt{٣}$)

---

٢ إذا كان وتر التقاطع لدائرتين متقاطعتين هو قطر إحداهما وطوله يساوي طول نصف قطر الدائرة الأخرى ويساوي ١٠ سم فأوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين. «٤٨,٣٣ سم²»



٣ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز في م فإذا كان نق هو طول

نصف قطر الدائرة الصغرى وكان م ء = نق ، م أ = ٢ نق

حيث أ تقع على الدائرة الكبرى ، ق (د أ م ب) = ق (د حـ م ء) = θ_1

أوجد النسبة بين θ_1 ، θ_2 إذا علم أن مساحتي الجزأين المظللين متساويتان. «٣ : ٤»

تطبيقات حياتية

١ زينة : حوض زهور على شكل دائرة طول نصف قطرها ٨ أمتار ، رسم في الدائرة وتر طوله ٨ أمتار.

احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى لأقرب رقم عشري واحد. «٥,٨ م^2»

---

٢ زراعة : حوض للزرع على شكل دائرة طول نصف قطرها ٤ أمتار ، قُسم إلى أربعة أجزاء بواسطة مثلث متساوي الأضلاع تقع رؤوسه على الدائرة.

احسب مساحة إحدى القطع الدائرية الصغرى لأقرب رقمين عشريين. «٩,٨٣ م^2»



الدرس

7

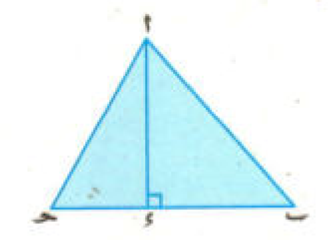
المساحات

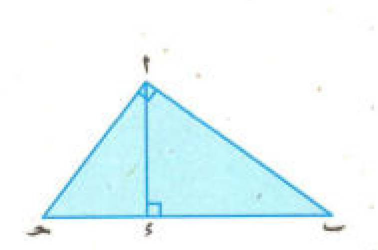
أولاً / مساحة المثلث

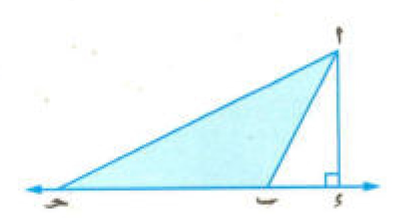
سبق أن درست مساحة المثلث وعلمت أن :

أولاً مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

أى أنه فى أى مثلث أ ب حـ إذا كان $\overline{أ ء} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$ فإن :







مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × أ ء

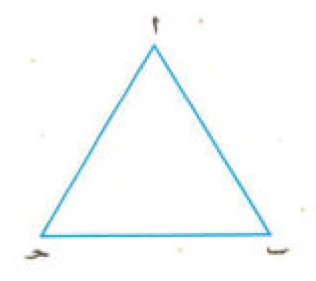
ثانياً مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

أى أنه فى أى مثلث أ ب حـ

مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × أ حـ × جا أ

= $\frac{1}{2}$ أ ب × ب حـ × جا ب

= $\frac{1}{2}$ أ حـ × ب حـ × جا حـ



مثال ١

احسب مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

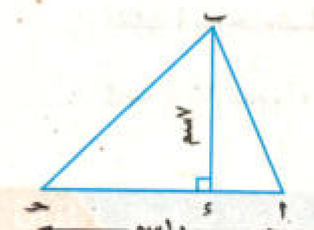
١ أ حـ = ١٠ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{\text{أ حـ}}$ يساوى ٧ سم

٢ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

٣ أ ب = ١١ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ق (∠ ب) = ٤٧° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ أ ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٧ سم ، أ حـ = ٢٦ سم

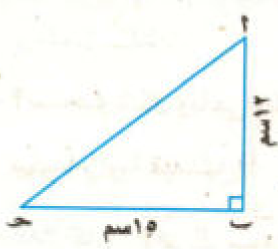
الحل



١ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ × ب ء

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٧

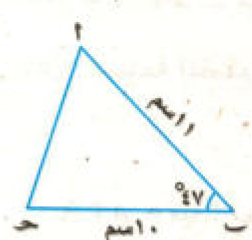
= ٣٥ سم²



٢ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ١٢

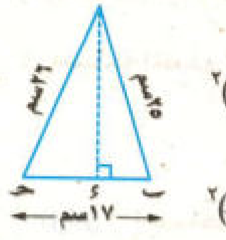
= ٩٠ سم²



٣ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × ب حـ × جا ب

= $\frac{1}{2}$ × ١١ × ١٠ × جا ٤٧°

≈ ٤٠,٢٢ سم²



٤ نرسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، نفرض أن ب ء = س سم

فيكون : ء حـ = (١٧ − س) سم

∵ Δ أ ب ء فيه : ق (∠ أ ء ب) = ٩٠° ∴ (أ ء)² = (أ ب)² − (ب ء)²

∴ (أ ء)² = ٦٢٥ − س² (١)

∵ Δ أ ء حـ فيه : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠° ∴ (أ ء)² = (أ حـ)² − (ء حـ)²

∴ (أ ء)² = ٦٧٦ − (١٧ − س)² (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ٦٢٥ − س² = ٦٧٦ − (٢٨٩ − ٣٤ س + س²)

∴ ٦٢٥ − س² = ٦٧٦ − ٢٨٩ + ٣٤ س − س² ∴ ٣٤ س = ٢٣٨ ∴ س = ٧ سم

بالتعويض فى (١) : ∴ (أ ء)² = ٦٢٥ − ٤٩ = ٥٧٦ ∴ أ ء = ٢٤ سم

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × أ ء = $\frac{1}{2}$ × ١٧ × ٢٤ = ٢٠٤ سم²

قاعدة هيرون لحساب مساحة المثلث

إذا رمزنا لمحيط المثلث أ ب حـ (مجموع أطوال أضلاع المثلث) بالرمز ٢ ع

فإن : مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{ع (ع - أ ب) (ع - ب حـ) (ع - أ حـ)}$

تأكد من الحل فى المثال السابق باستخدام قاعدة هيرون.

حاول بنفسك

احسب مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالتين الآتيتين مقربًا الناتج لرقمين عشريين :

١ المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٦ سم.

٢ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ ب) = ٦٢°

ثانيًا مساحة الشكل الرباعى المحدب

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى قطراه $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ متقاطعان فى م ويحصران بينهما زاوية قياسها θ

فإذا كان : $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ و} \perp \overline{ب ء}$



فإن : مساحة المضلع أ ب حـ ء = مساحة Δ أ ب ء + مساحة Δ ب حـ ء

$= \frac{١}{٢}$ ب ء × أ هـ + $\frac{١}{٢}$ ب ء × حـ و = $\frac{١}{٢}$ ب ء (أ هـ + حـ و)

∵ Δ أ هـ م فيه : ق (∠ أ هـ م) = ٩٠° ∴ جا θ = $\frac{أ هـ}{أ م}$ ∴ أ هـ = أ م جا θ

، Δ حـ و م فيه : ق (∠ حـ و م) = ٩٠° ∴ جا θ = $\frac{حـ و}{حـ م}$ ∴ حـ و = حـ م جا θ

∴ مساحة المضلع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ ب ء (أ م جا θ + حـ م جا θ) = $\frac{١}{٢}$ ب ء جا θ (أ م + حـ م)

$= \frac{١}{٢}$ ب ء جا θ × أ حـ = $\frac{١}{٢}$ ب ء × أ حـ × جا θ

أى أن مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة

إذا استخدمنا الزاوية ∠ أ م ء التى قياسها (١٨٠° − θ) أى الزاوية المكملة للزاوية ∠ أ م ب التى قياسها θ فإن مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء لا تتغير لأن : جا (١٨٠° − θ) = جا θ

مثال ٢

احسب مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٢°

الحل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٢ × جا ٦٢° ≈ ٥٢,٩٨ سم^2

ملاحظة

يمكن استخدام القانون السابق فى حساب مساحات بعض الأشكال الرباعية الخاصة مثل :



١ المربع :

فى الشكل المقابل : أ ب جـ د مربع

∴ أجـ = ب د ، $\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$

∴ مساحة المربع أ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ × أجـ × ب د × جا ٩٠°

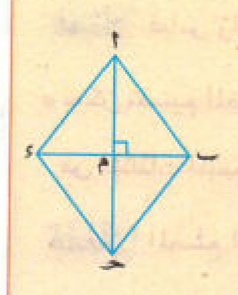
= $\frac{1}{2}$ × أجـ × أجـ × ١ = $\frac{1}{2}$ (أجـ)^2

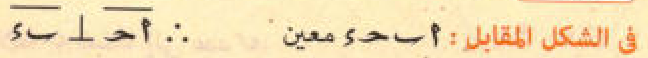
∴ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره

فمثلاً المربع الذى طول قطره ٦ سم تكون مساحته = $\frac{1}{2}$ × (٦)^2 = ١٨ سم^2



٢ المعين :





فى الشكل المقابل : أ ب جـ د معين ∴ $\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$

∴ مساحة المعين أ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ × أجـ × ب د × جا ٩٠°

= $\frac{1}{2}$ × أجـ × ب د



∴ مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه

فمثلاً المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تكون مساحته = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^2

حاول بنفسك

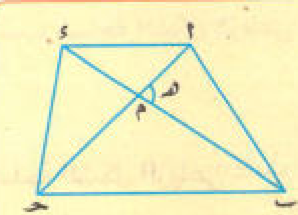
أوجد ما يأتى :

١ مساحة المربع الذى طول قطره ٨ سم

٢ مساحة المعين الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم

٣ مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

ملاحظة



في الشكل الرباعي : أ ب حـ ء إذا تقاطع قطراه في م

فإن : م (Δ أ ب م) × م (Δ ء حـ م) = م (Δ أ ء م) × م (Δ ب حـ م)

الإثبات

م (Δ أ ب م) × م (Δ ء حـ م) = [$\frac{1}{2}$ (م أ) (م ب) جا هـ] × [$\frac{1}{2}$ (م ء) (م حـ) جا هـ]

= [$\frac{1}{2}$ (م أ) (م ء) جا (180° − هـ)]

× [$\frac{1}{2}$ (م ب) (م حـ) جا (180° − هـ)]

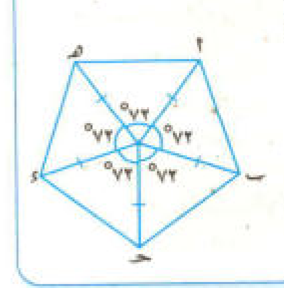
= م (Δ أ ء م) × م (Δ ب حـ م)

ثالثًا مساحة المضلع المنتظم

تذكر أن

- **المضلع المنتظم :** هو مضلع جميع زواياه الداخلة متساوية في القياس وجميع أضلاعه متساوية في الطول.
- قياس زاوية رأس المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن ضلعًا = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن}$

فمثلًا قياس زاوية رأس المضلع السداسي المنتظم = $\frac{(٦ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٦}$ = ١٢٠°





- يمكن تقسيم المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن ضلعًا إلى عدد ن

من المثلثات المتساوية الساقين والمتطابقة والتي قياس زاوية رأس كل منها = $\frac{٢\pi}{ن}$

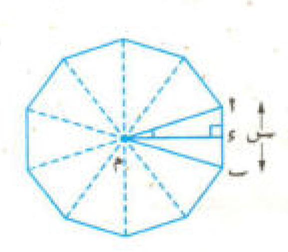


فمثلًا المضلع الخماسي المنتظم ينقسم إلى ٥ مثلثات متطابقة

كل منها متساوي الساقين وقياس زاوية رأسه = $\frac{٢\pi}{٥}$ = ٧٢°

- **مساحة المضلع المنتظم :**

في الشكل المقابل :



مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ضلعًا

وطول ضلعه = س وحدة طول.

فإن : مساحة المضلع = مساحة Δ أ م ب × ن



∵ Δ أ م ب متساوي الساقين فيه : م أ = م ب ، ق (∠ أ م ب) = $\frac{٢\pi}{ن}$

، ∵ $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ ∴ ق (∠ أ م ء) = $\frac{\pi}{ن}$

، ∵ ظا (∠ ؟ م ء) = $\frac{\text{م ء}}{\text{؟ ء}}$ ∴ ظا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{\text{م ء}}{\frac{1}{2}\text{ س}}$ ∴ م ء = $\frac{1}{2}$ س ظتا $\frac{\pi}{ن}$

، ∵ مساحة Δ ؟ م ب = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{2}$ × ؟ ب × م ء

= $\frac{1}{2}$ × س × $\frac{1}{2}$ س ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

∴ مساحة المضلع = $\left(\frac{1}{4}\text{ س}^2\text{ ظتا }\frac{\pi}{ن}\right)$ × ن = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

أى أن مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعًا وطول ضلعه س = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

مثال ٣

أوجد مساحة كل من :

١ شكل ثمانى منتظم طول ضلعه ٧ سم (لأقرب رقمين عشريين)

٢ مضلع منتظم عدد أضلاعه = ١٢ ضلعًا وطول ضلعه = ١٠ سم (لأقرب سنتيمتر مربع)

٣ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ٩ سم (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

الحل

١ مساحة المضلع الثمانى المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ٨ × ٧^2 × ظتا $\frac{\pi}{8}$

≈ ٢٣٦,٥٩ سم^2

٢ مساحة المضلع الذى عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{1}{4}$ × ١٢ × ١٠^2 × ظتا $\frac{\pi}{12}$ ≈ ١١٢٠ سم^2

٣ مساحة المثلث المتساوى الأضلاع = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ٣ × ٩^2 × ظتا $\frac{\pi}{3}$

≈ ٣٥,٠٧٤ سم^2

حل آخر:

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ٩ × ٩ × جا ٦٠° ≈ ٣٥,٠٧٤ سم^2

ملاحظتان

- المثلث المتساوى الأضلاع هو مضلع ثلاثى منتظم ولذلك يمكن استخدام قانون حساب مساحة المضلع المنتظم فى إيجاد مساحته كما فى المثال السابق ويكون :

مساحة المثلث المتساوى الأضلاع $= \frac{١}{٤} \times ٣ \times$ س$^٢ \times$ ظتا $\frac{\pi}{٣}$

$= \frac{٣}{٤}$ س$^٢ \times$ ظتا $°٦٠$

$= \frac{٣}{٤}$ س$^٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^٢

أى أن مساحة المثلث المتساوى الأضلاع $= \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^٢ حيث س طول ضلع المثلث

- وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مساحة السداسى المنتظم :

مساحة السداسى المنتظم $= \frac{١}{٤} \times ٦ \times$ س$^٢ \times$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$

$= \frac{٣}{٢}$ س$^٢ \times$ ظتا $°٣٠ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ س^٢

أى أن مساحة السداسى المنتظم $= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ س^٢ حيث س طول ضلعه

حاول بنفسك

استخدم قانون حساب مساحة المضلع المنتظم فى إيجاد مساحة كل من :

١ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٥ سم (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

٢ مربع طول ضلعه ٦ سم

٣ مضلع خماسى منتظم طول ضلعه ١٢ سم (مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية)

تمارين 14 على المساحات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى. • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٥٠°
تساوى .... سم²

(أ) ٢١,٤ (ب) ٤٢,٩ (جـ) ١٨ (د) ٣٣,٤

(٢) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس زاوية رأسه ٦٠°
تساوى .... سم²

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ٢٥ $\sqrt{3}$ (د) ٥٠

(٣) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول قاعدته ٦ سم ، طول أحد ساقيه ٥ سم تساوى .... سم²

(أ) ١٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٤) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم تساوى .... سم²

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٩ (د) ٩ $\sqrt{3}$

(٥) مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما ٣٠° تساوى .... سم²

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤ $\sqrt{3}$

(٦) الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم ومساحته تساوى ٣٠ سم² يكون قياس الزاوية الحادة بين قطريه ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٥°

(٧) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٤ سم تساوى .... سم²

(أ) ١٢ $\sqrt{3}$ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤

(٨) مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٠ سم ≃ .... سم²

(أ) ١٧٢,٠٥ (ب) ٩٠,٨٢ (جـ) ٦٨٨,١٩ (د) ١٣٧,٦٤

(٩) المعين الذى قياس إحدى زواياه ٥٠° وطول ضلعه ٦ سم تكون مساحته .... سم²

(أ) ١٣,٧٩ (ب) ١١٠,٣١ (جـ) ٢٧,٦ (د) ١١,٥٧

(١٠) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه س سم تساوى .... سم²

(أ) س² (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س² (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س² (د) $\frac{1}{2}$ س²

(١١) مساحة المربع الذى طول قطره $س$ سم تساوى .... سم^٢

(أ) $س^٢$ (ب) $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ (جـ) $\sqrt{٢}$ $س^٢$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ $س^٢$

(١٢) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه $س$ سم تساوى .... سم^٢

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ $س^٢$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ $س^٢$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $س^٢$ (د) $\frac{٣}{٢}$ $س^٢$

(١٣) مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه $س$ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٢ $س^٢$ ظتا ٤٥° (ب) ٢ $س^٢$ ظا ٤٥°

(جـ) ٨ $س^٢$ ظتا ٢٢,٥° (د) ٢ $س^٢$ ظتا ٢٢,٥°

(١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ب ء = ٦ سم

، مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(١٥) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ سم تساوى .... سم^٢

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٦}$ (جـ) $\sqrt{٣٠}$ (د) $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٣٠}$

(١٦) مثلث حاد الزوايا مساحته ١٤,٤ سم^٢ ، طولا ضلعين فيه ٦ سم ، ٨ سم فإن جيب تمام الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٧) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه ٤ سم ، ٦ سم ، ٨ سم ≃ .... سم^٢

(أ) ١٧٣,٩ (ب) ١١,٦ (جـ) ١٣,٩ (د) ٤١,٦

(١٨) أ ب جـ مثلث حاد الزوايا مساحته ٤٠,١٣ سم^٢ فإذا كان : أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٢ سم

فإن : ق (∠ ب) = ...° (لأقرب درجة)

(أ) ٣٢ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٨ (د) ٨٨

(١٩) طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢ يساوى .... سم

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

مساحته = ... سم^٢

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(٢١) مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٣ سم ، ويحصران زاوية جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٠ (ب) ٧٢ (جـ) ٦٠ (د) ١٤٤

(٢٢) إذا كانت مساحة شكل سداسى منتظم $٥٤\sqrt{٣}$ سم^{٢} ، فإن طول ضلعه يساوى .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $١٢\sqrt{٣}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :

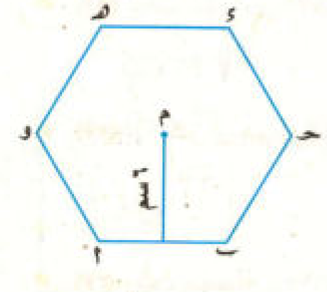
$\overline{بحـ}$ قطر فى دائرة م ، أحـ = ٦ سم ، ق(∠ أبحـ) = θ

فإن : مساحة Δ أبحـ = ... سم^{٢}

(أ) ٦ جا θ (ب) ٦ ظا θ (جـ) ١٨ ظا θ (د) ١٨ ظتا θ

(٢٤) إذا كان طول العمود المرسوم من مركز سداسى منتظم على أحد أضلاعه يساوى ٦ سم

فإن مساحة المسدس تساوى ....

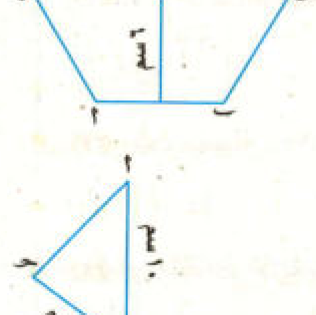


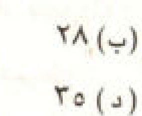
(أ) $٢٧\sqrt{٣}$ سم^{٢} (ب) $٣٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(جـ) $٥٤\sqrt{٣}$ سم^{٢} (د) $٧٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(٢٥) فى الشكل المقابل :

مساحة Δ أبحـ تساوى .... سم^{٢}





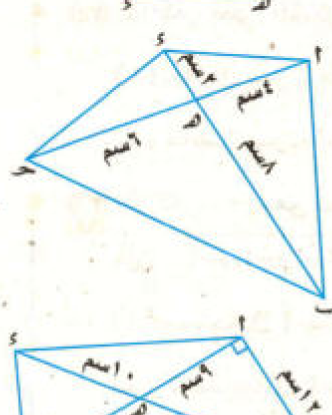
(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

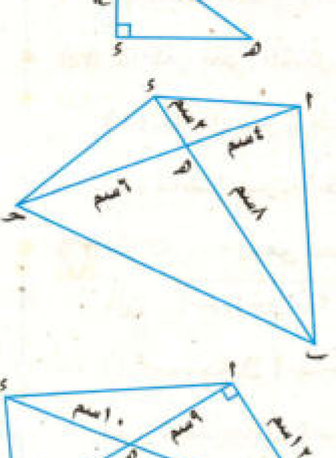
(جـ) ٣٢ (د) ٣٥

(٢٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل أبحـء = ٥٠ سم^{٢}

فإن : ق(∠ أهـب) = ...





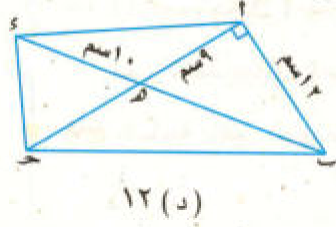
(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٧٥° (د) ٩٠°

(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل أبحـء = ١٩٠ سم^{٢}

فإن : طول $\overline{هـحـ}$ = ... سم



(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٢٨) فى Δ أ ب جـ : إذا رمزنا لنصف محيط المثلث بالرمز ع وكان ع − أ ب = ٦ سم ،
ع − ب جـ = ٨ سم ، ع − أ جـ = ١٠ سم فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^2

(أ) ٨ $\sqrt{٣٠}$ (ب) ٢٤ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣٠}$ (د) ٤٨ $\sqrt{٥}$

(٢٩) مضلع منتظم طول ضلعه ٦ سم وقياس الزاوية الخارجة عن أحد رؤوسه تساوى ٣٦°
فإن مساحته ≃ .... سم^2

(أ) ٢٧٧ (ب) ٢٢٤ (جـ) ٢١٨ (د) ١٩٦

(٣٠) أ ب جـ مثلث فيه : ب جـ = ٨ سم وكان طول المتوسط $\overline{أ ء}$ = ٤ سم فإن أكبر مساحة للمثلث أ ب جـ
تساوى .... سم^2

(أ) ٣٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(٣١) مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ٦ سم فإن مساحته .... سم^2

(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ $\sqrt{٢}$ (د) ١٨ $\sqrt{٢}$

(٣٢) إذا كان ل هو ارتفاع المثلث المتساوى الأضلاع فإن مساحته = ... سم^2

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل^2 (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ل^2 (جـ) $\sqrt{٣}$ ل^2 (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^2

(٣٣) مثلث محيطه ١٥٠ سم والنسبة بين أطوال أضلاعه ٥ : ١٢ : ١٣ فإن مساحته = ... سم^2

(أ) ٢٥٠ (ب) ٣٧٥ (جـ) ٥٠٠ (د) ٧٥٠

(٣٤) أى المثلثات الآتية يمكن إيجاد مساحته ؟

(أ) مثلث متساوى الساقين محيطه = ٣٠ سم (ب) مثلث قائم الزاوية محيطه = ٣٠ سم

(جـ) مثلث متساوى الأضلاع محيطه = ٣٠ سم (د) مثلث قائم الزاوية طول وتره = ٣٠ سم

(٣٥) إذا كان قطرا الشكل الرباعى متعامدان فإن مساحته = ...

(أ) حاصل ضرب طولا قطريه. (ب) $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه.

(جـ) حاصل ضرب أطوال أضلاعه. (د) $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أطوال أضلاعه.

(٣٦) إذا كان : س هو محيط المثلث أ ب جـ
فإن : $\sqrt{س (س - ٢ أ ب) (س - ٢ ب جـ) (س - ٢ أ جـ)}$ = ...

(أ) مساحة Δ أ ب جـ (ب) ٢ مساحة Δ أ ب جـ

(جـ) ٣ مساحة Δ أ ب جـ (د) ٤ مساحة Δ أ ب جـ

(٣٧) مساحة المعين الذى طول ضلعه ل سم وقياس إحدى زواياه الداخلة θ تساوى .... سم^2

(أ) ل^2 (ب) $\frac{١}{٢}$ ل^2 جا θ (جـ) ل^2 جا θ (د) ل^2 جتا θ



(٣٨) أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب ح = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم ، $\overline{أء}$ متوسط

فإن مساحة △ أ ب ء = ... سم²

(أ) $\frac{٣\sqrt{١٥}}{٢}$ (ب) $٢\sqrt{١٥}$ (جـ) $٣\sqrt{١٥}$ (د) $\frac{٥\sqrt{١٥}}{٢}$

(٣٩) في الشكل المقابل :

أ ب ح ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، هـ ∈ $\overline{بء}$ بحيث ب هـ = $٤\sqrt{٢}$ سم

فإن مساحة △ أ ب هـ = ... سم²

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) $١٢\sqrt{٢}$ (د) $٢٤\sqrt{٢}$

(٤٠) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{حء}$ وتران متقاطعان في هـ ، هـ ء = $٧\sqrt{٢}$ سم

، هـ ب = ٨ سم ، ق($\overset{\frown}{بء}$) = ٦٠° ، ق($\overset{\frown}{أح}$) = ٣٠°

فإن : مساحة △ ء هـ ب = ... سم²

(أ) $٢٨\sqrt{٢}$ (ب) ٢٨ (جـ) $١٦\sqrt{٢}$ (د) ١٦

(٤١) في الشكل المقابل :

أ ب ح ء مربع ، ء ح هـ مثلث متساوي الأضلاع

فإن مساحة △ أ ء هـ = ... سم²

(أ) ١٦ (ب) ٨



(جـ) ٤ (د) $٤\sqrt{٣}$

(٤٢) في الشكل المقابل :



شكل سداسي منتظم فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم²

(أ) ٢٤١,٦ (ب) ٢٤٦,١

(جـ) ٢٤٣,٦ (د) ٢٤٨,٣

(٤٣) في الشكل المقابل :

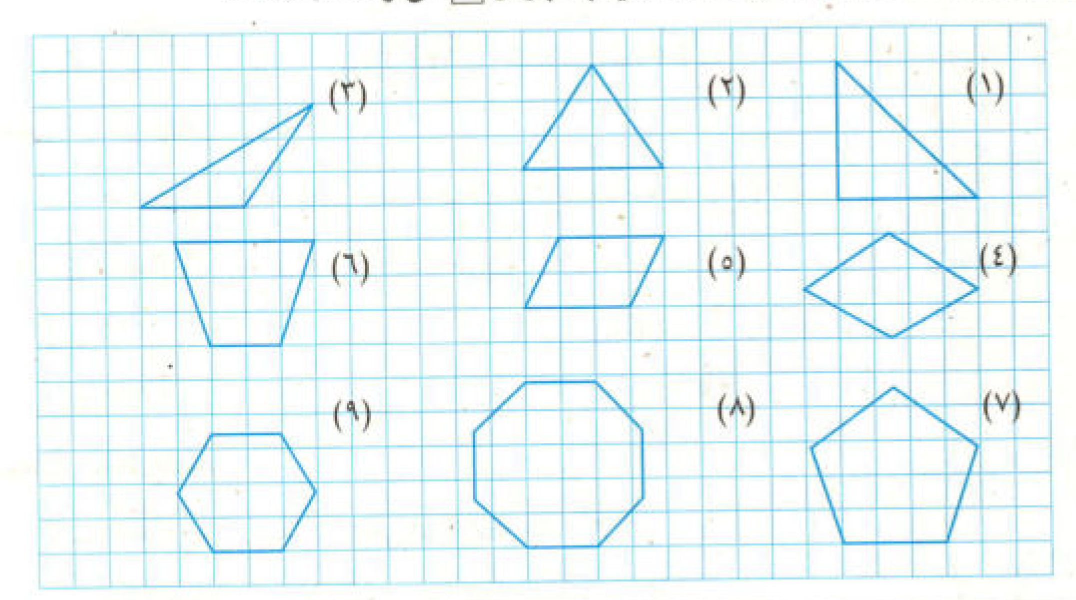
مساحة △ أ ب ح = ... سم²

(أ) $٦\sqrt{١٦}$ (ب) $١٢\sqrt{١١}$

(جـ) $١٨\sqrt{١١}$ (د) $٣٦\sqrt{١١}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة كل شكل من الأشكال الآتية باعتبار أن ☐ هى وحدة المساحة :



٢ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ب) = ٩٠° «٢٤ سم²»

(٢) أ حـ = ١٢ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{أحـ}$ يساوى ٧ سم «٤٢ سم²»

(٣) أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ب) = ٤٦° «١١٥ سم² تقريبًا»

٣ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : ب حـ = ١٦ سم ، ب أ = ٢٢ سم ، ق (∠ب) = ٦٣° مقربًا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. «١٥٦٫٨١٧ سم²»

٤ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٤° «٦٤٫٧ سم²»

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨° مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع. «٨٩ سم²»

٦ أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء فى كل من الحالات الآتية :

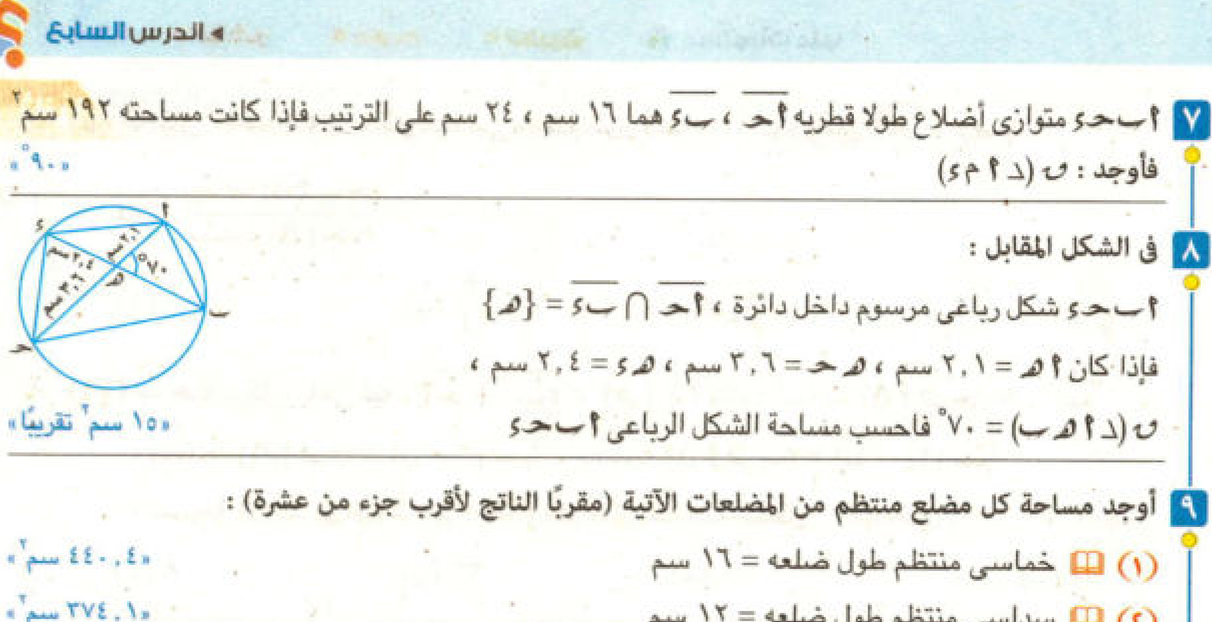
(١) متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ق (∠ب) = ٦٠° «٤٤ $\sqrt{3}$ سم²»

(٢) شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين $\overline{أء}$ ، $\overline{ب حـ}$ يساوى ٧ سم ، ١١ سم على الترتيب وطول العمود المرسوم من ء على $\overline{ب حـ}$ يساوى ٦ سم. «٥٤ سم²»

(٣) معين فيه أ ب = ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه يساوى ٥٨° «٥٤ سم²»

٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع طولا قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ هما ١٦ سم ، ٢٤ سم على الترتيب فإذا كانت مساحته ١٩٢ سم^2

فأوجد : ق(∠ أ م ء) «٩٠°»



٨ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{أحـ} \cap \overline{ب ء} = \{هـ\}$

فإذا كان أ هـ = ٢,١ سم ، هـ حـ = ٣,٦ سم ، هـ ء = ٢,٤ سم ،

ق(∠ أ هـ ب) = ٧٠° فاحسب مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء «١٥ سم^2 تقريبًا»

---

٩ أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية (مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة) :

(١) خماسى منتظم طول ضلعه = ١٦ سم «٤٤٠,٤ سم^2»

(٢) سداسى منتظم طول ضلعه = ١٢ سم «٣٧٤,١ سم^2»

(٣) ثمانى منتظم طول ضلعه = ٨ سم «٣٠٩ سم^2»

(٤) سباعى منتظم طول ضلعه = ١٠ سم «٣٦٣,٤ سم^2»

---

١٠ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة شكل منتظم ذو ١٢ ضلعًا وطول ضلعه ١٠ سم «١١١٩,٦ سم^2»

---

١١ احسب مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ حـ = ١١ سم «٢٨ سم^2 تقريبًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مثلث أ ب حـ محيطه = ١٤ سم ومساحته = $٢\sqrt{١٤}$ سم^2 وطول أحد أضلاعه ٣ سم

فإن الفرق بين طولى الضلعين الآخرين = ... سم

(أ) ١ (ب) $٢\frac{١}{٤}$ (جـ) ٧ (د) ١١

(٢) سداسى منتظم مساحته (م$_1$) مرسوم داخل دائرة مساحتها (م$_2$) فإن م$_2$: م$_1$ = ...

(أ) $\pi : \sqrt{٣}$ (ب) $٢\pi : \sqrt{٣}$ (جـ) $\pi : ٢\sqrt{٣}$ (د) $٢\pi : ٣\sqrt{٣}$

(٣) مضلعان منتظمان مرسومان داخل نفس الدائرة ، أحدهما مكون من ٦ أضلاع مساحته (م$_1$) والآخر مكون من ١٢ ضلعًا مساحته (م$_2$) فإن م$_1$: م$_2$ = ...

(أ) $١ : \sqrt{٢}$ (ب) ١ : ٢ (جـ) $\sqrt{٢} : ٣$ (د) $\sqrt{٣} : ٢$

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{أحـ} \cap \overline{ب ء} = \{هـ\}$

، مساحة (△ أ هـ ء) = ٩ سم^2 ، مساحة (△ أ هـ ب) = ١٨ سم^2

، مساحة (△ حـ هـ ب) = ١٦ سم^2

فإن مساحة △ ء هـ حـ = ... سم^2

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٥) إذا كان : أ ب حـ ء هـ شكل خماسى منتظم طول ضلعه = ل سم وطول $\overline{\text{أ حـ}}$ = م سم

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\triangle \text{ أ ب حـ})}{\text{مساحة } (\triangle \text{ أ حـ ء})}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ (ب) $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$ (جـ) $\frac{\text{٢ ل}}{\text{٣ م}}$ (د) $\frac{\text{٣ ل}}{\text{٢ م}}$

(٦) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب ء}}$ = {هـ} إذا كانت مساحة ($\triangle$ ء هـ حـ) = مـ سم^{٢}

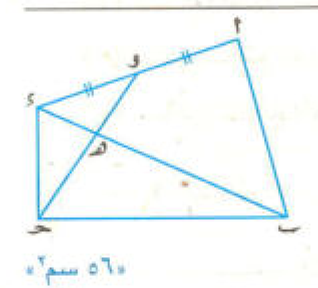
، مساحة ($\triangle$ أ هـ ء) = (مـ − ٢) سم^{٢} ، مساحة ($\triangle$ أ هـ ب) = (مـ + ١٠) سم^{٢}

، مساحة ($\triangle$ ب هـ حـ) = (مـ + ١٦) سم^{٢} فإن مساحة الشكل : أ ب حـ ء = ... سم^{٢}

(أ) ٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٥٦ (د) ٨٨

---

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة ($\triangle$ و هـ ء) = ٣ سم^{٢} ، مساحة ($\triangle$ ء هـ حـ) = ٨ سم^{٢}

، مساحة ($\triangle$ هـ ب حـ) = ٢٤ سم^{٢}

وكانت و منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء

«٥٦ سم^{٢}»

تطبيقات حياتية

١ **إنشاءات :** الشكل المقابل يرسم مجموعة من الدرجات تؤدى إلى مدخل مجمع سكنى على شكل شبه منحرف متساوى الساقين قاعدته الكبرى لأسفل وعرضها ٧ أمتار وقاعدته الصغرى لأعلى وعرضها ٣ أمتار ، ويميل كل من ساقيه على القاعدة السفلى بزاوية قياسها ٧٥° أوجد :

٣أمتار
٧٥° ٧٥°
٧أمتار



(١) طول قاعدته عند منتصف الساقين (القاعدة المتوسطة)

(٢) طول كل من ساقيه (لأقرب جزء من عشرة)

(٣) مساحة شبه المنحرف لأقرب متر مربع

«٥ م ، ٧,٧ م ، ٣٨ م^{٢}»

---

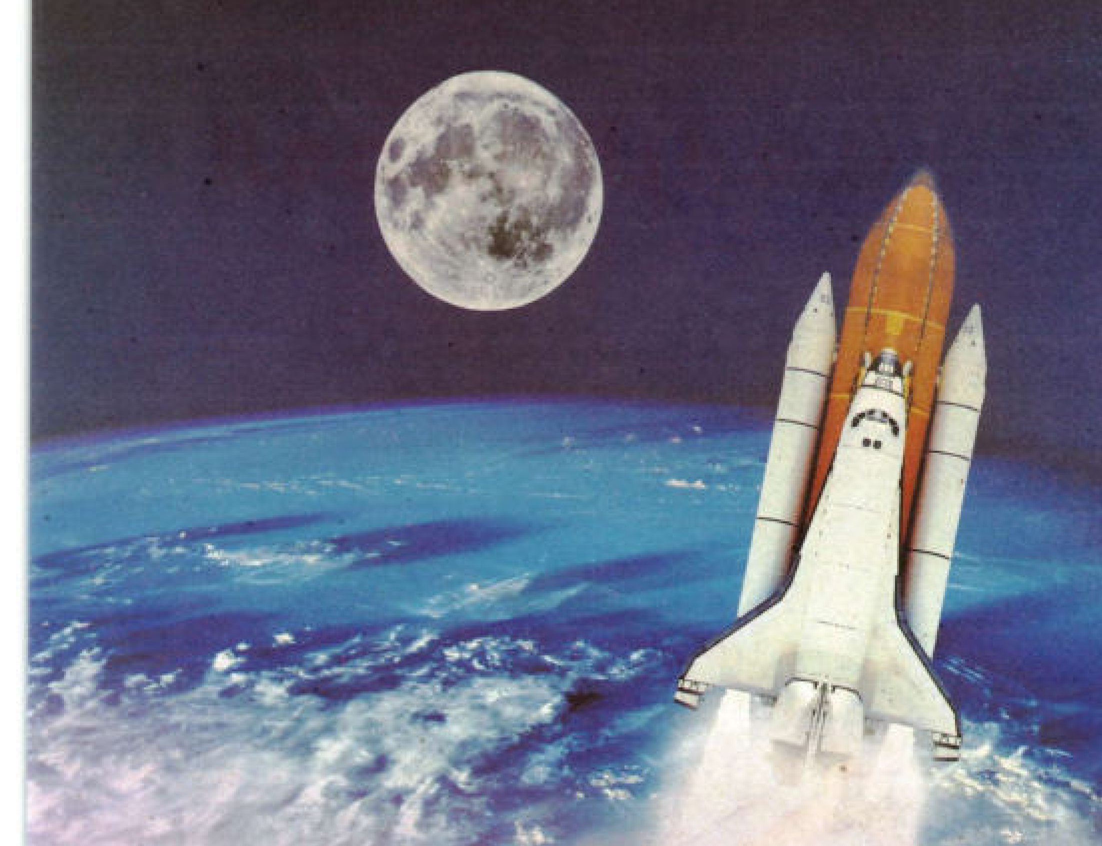
٢ **أحواض زينة :** صمم حوض لأسماك الزينة قاعدته على شكل خماسى منتظم طول قطره ٧٢ سم ، أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة قاعدته.

«٣٤٠٧ سم^{٢}»

---

٣ **زهور :** يصمم كريم حديقة لمنزله ، ويرغب أن يكون الجزء المخصص للزهور على شكل سداسى منتظم مساحته ٥٤ $\sqrt{٣}$ متر مربع. أوجد طول ضلعه.

«٦ م»



ثانيًا

الهندسة التحليلية

الوحدة 4 المتجهات.

الوحدة 5 الخط المستقيم.

الوحدة الرابعة

المتجهات



دروس الوحدة

الدرس	
1	الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.
2	المتجهات.
3	العمليات على المتجهات.
4	تطبيقات على المتجهات.

نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة ، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار المتجه ، والمتجه الصفرى.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.
- يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجهًا فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين.
- يثبت بعض النظريات الهندسية باستخدام المتجهات.
- يحل تطبيقات فيزيائية على المتجهات.



الدرس

1

الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

الكميات القياسية والكميات المتجهة

* **تنقسم الكميات التى نتعامل معها فى حياتنا إلى نوعين :**

١ **الكمية القياسية :** هى كمية تتعين تمامًا بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية.

ومن أمثلتها : الطول - الكتلة - الزمن - درجة الحرارة - الحجم - المسافة.

٢ **الكمية المتجهة :** هى كمية تتعين بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

ومن أمثلتها : القوة - الإزاحة - متجه السرعة.

ولتوضيح الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة نوضح على سبيل المثال الفرق بين المسافة ككمية قياسية والإزاحة ككمية متجهة :

١ **المسافة :** هى طول المسار الفعلى المقطوع أثناء الحركة من موضع إلى آخر.

وهى كمية قياسية لأنها تتعين تمامًا بمقدارها فقط وليس لها اتجاه.

٢ **الإزاحة :** هى أقصر بُعد بين نقطة البداية ونقطة النهاية ، وفى اتجاهٍ من نقطة البداية إلى نقطة النهاية ، أى أنها مسافة بين النقطتين فى اتجاه معين.

وهى كمية متجهة لأنها تتعين تمامًا بمقدارها بالإضافة إلى اتجاهها.

فمثلًا فى الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة (أ) مسافة ١٢ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٥ أمتار شمالاً ثم توقف عند النقطة (حـ)

فإن : المسافة التى قطعها الجسم أثناء الحركة = أب + ب حـ = ١٢ + ٥ = ١٧ مترًا

وتكون : الإزاحة الحادثة خلال الحركة هى طول $\overline{\text{أ حـ}}$ وفى الاتجاه من أ إلى حـ

أى أن الإزاحة = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$ = ١٣ مترًا فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$

الاتجـــــاه

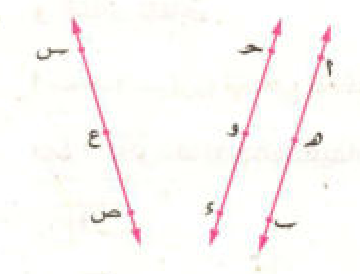
كل شعاع فى المستوى يعين اتجاهًا معينًا.



فمثلاً فى الشكل المقابل :

- $\overrightarrow{\text{وأ}}$ يحدد اتجاه الشرق.
- $\overrightarrow{\text{وهـ}}$ يحدد اتجاه الشمال الشرقى.
- $\overrightarrow{\text{ون}}$ يحدد اتجاه ٣٠° شمال الغرب.
- $\overrightarrow{\text{وم}}$ يحدد اتجاه ٣٥° شرق الجنوب.

لاحظ أنه فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ متوازيين وكل منهما لا يوازى $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

، هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$ ، و $\in$ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، ع $\in$ $\overline{\text{س ص}}$

فإن :
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وحـ}}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيمان متوازيان.



- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ فى اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيم واحد.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ء}}$ فى اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع س}}$ مختلفان فى الاتجاه ويحملهما مستقيمان غير متوازيين.

وبصفة عامة :
* الشعاعان المتحدان فى الاتجاه أو المتضادان فى الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.
* الشعاعان المختلفان فى الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

القطعة المستقيمة الموجهة

- إذا حددنا للقطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ نقطة بداية أ ونقطة نهاية ب فإنه يترتب على ذلك أن يصبح للقطعة المستقيمة اتجاه من أ إلى ب وتسمى قطعة مستقيمة موجهة ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\text{أب}}$ مع ملاحظة أن : $\overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{ب أ}}$ لاختلافهما فى نقطتى البداية والنهاية مما يؤدى إلى تضادهما فى الاتجاه.

- **مما سبق نرى أن القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد بثلاثة عناصر هى :**

١ نقطة البداية. ٢ نقطة النهاية. ٣ الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.





تعريف

١ **القطعة المستقيمة الموجهة :** هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه.

٢ **معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار $\overrightarrow{أب}$) :** هو طول $\overline{أب}$ ويرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{أب}\|$

ولاحظ أن $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{بأ}\| = أب$

٣ **تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين :** تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان :

(١) لهما نفس الطول (المعيار).　　(٢) لهما نفس الاتجاه.

مثال ١

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{أء}$.

أولًا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ :

١ $\overrightarrow{أب}$　　٢ $\overrightarrow{ءأ}$　　٣ $\overrightarrow{مب}$

٤ $\overrightarrow{أم}$　　٥ $\overrightarrow{أهـ}$　　٦ $\overrightarrow{مهـ}$

ثانيًا : بيِّن لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

١ $\overrightarrow{ءم}$ ، $\overrightarrow{ءب}$　　٢ $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{حـب}$　　٣ $\overrightarrow{أم}$ ، $\overrightarrow{حـم}$

الحل

أولًا : ١ $\overrightarrow{ءحـ}$　　٢ $\overrightarrow{حـب}$　　٣ $\overrightarrow{ءم}$

٤ $\overrightarrow{محـ}$　　٥ $\overrightarrow{هـء}$　　٦ لا يوجد.

ثانيًا : ١ لأن : $\|\overrightarrow{ءم}\| \neq \|\overrightarrow{ءب}\|$　　٢ لأن : $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{حـب}$ متضادتان فى الاتجاه.

٣ لأن : $\overrightarrow{أم}$ ، $\overrightarrow{حـم}$ متضادتان فى الاتجاه.

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{أء} \cap \overline{بحـ} = \{م\}$ ، م أ = م ء ، م ب = م حـ

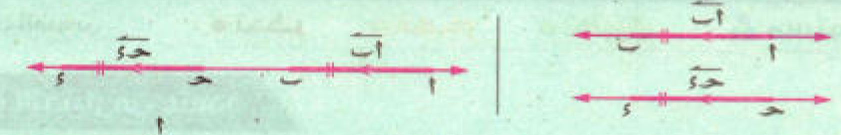
فأكمل ما يأتى بوضع «تكافئ» أو «لا تكافئ» مع ذكر السبب :

١ $\overrightarrow{أم}$ .... $\overrightarrow{مء}$ لأنهما ....　　٢ $\overrightarrow{مب}$ .... $\overrightarrow{محـ}$ لأنهما ....

٣ $\overrightarrow{أب}$ .... $\overrightarrow{حـء}$ لأنهما ....　　٤ $\overrightarrow{بم}$ .... $\overrightarrow{بحـ}$ لأنهما ....

ملاحظات

١ $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ لا يمكن أن تتكافئا إلا إذا كان يحملهما مستقيمان متوازيان أو مستقيم واحد كما بالشكلين الآتيين :



٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء لا تقع على استقامة واحدة

وكانت : $\overrightarrow{أب}$ تكافئ $\overrightarrow{ءحـ}$

فإن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

٣ من نقطة فى المستوى ولتكن حـ لا يمكن رسم

إلا قطعة مستقيمة موجهة وحيدة $\overrightarrow{حـ ء}$

تكافئ قطعة مستقيمة أخرى $\overrightarrow{أب}$ فى نفس المستوى.

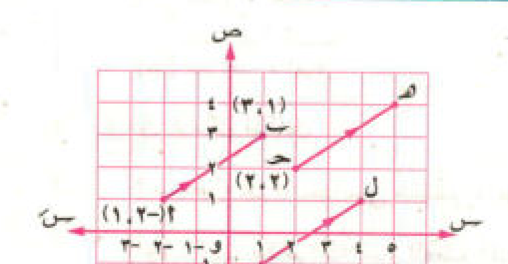
٤ يوجد عدد لا نهائى من القطع المستقيمة الموجهة التى يمكن رسمها فى المستوى وكل منها تكافئ قطعة مستقيمة موجهة أخرى.

مثال ٢

فى مستوى إحداثى متعامد عيِّن النقط : أ (−٢ ، ١) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٢) ، ء (١ ، −١)

ثم ارسم $\overrightarrow{حـ هـ}$ ، $\overrightarrow{ءل}$ كل منهما تكافئ $\overrightarrow{أب}$ ، أوجد إحداثيى كل من : هـ ، ل

الحل



لرسم $\overrightarrow{حـ هـ}$ تكافئ $\overrightarrow{أب}$ يجب أن تكون $\overrightarrow{حـ هـ}$ ، $\overrightarrow{أب}$

لهما نفس الاتجاه ونفس المعيار.

* نرسم $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ (ميل $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$)

* نحدد طول $\overline{حـ هـ}$ = طول $\overline{أب}$ باستخدام الفرجار

أو بحساب عدد المربعات الأفقية والرأسية فنجد أن : هـ = (٥ ، ٤)

* وبالمثل : نرسم $\overrightarrow{ءل}$ نجد أن : ل = (٤ ، ١)



حل آخر : ∵ الانتقال يحافظ على التوازى وأطوال القطع المستقيمة.

∴ النقطة حـ هى صورة أ بالانتقال [(٢ ، ٢) − (−٢ ، ١)] = (٤ ، ١)

ولرسم $\overrightarrow{حـ هـ}$ تكافئ $\overrightarrow{أب}$ نجد أن $\overrightarrow{حـ هـ}$ هى صورة $\overrightarrow{أب}$ بالانتقال (٤ ، ١)

∴ النقطة هـ هى صورة النقطة ب بالانتقال (٤ ، ١) ∴ النقطة هـ = (١ + ٤ ، ٣ + ١) = (٥ ، ٤)

وبالمثل يمكن إيجاد إحداثيى النقطة ل

تمـارين 1 على الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى مما يأتى يمثل كمية متجهة ؟

(أ) الزمن. (ب) درجة الحرارة. (جـ) الإزاحة. (د) الكتلة.

(٢) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م فإن :

أولًا $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{م ء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ء م}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{م ب}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ب م}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ م}}$

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء ، هـ ب حـ و متوازيى أضلاع

فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ تكافئ كلًا من ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ و}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ و}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

(٤) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم ، مركزه النقطة م فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ تكافئ كلًا من القطع المستقيمة الموجهة الآتية ماعدا ....

(أ) $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و م}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{م ء}}$ تكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ م}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{هـ و}}$ (د) $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$

(٥) أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م ، فإن أزواج القطع المستقيمة الموجهة الآتية متكافئة ما عدا ....

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ء}}$

(٦) إذا كان أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى (ن) أى من القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة ؟

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ون}}$　　(ب) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـء}}$　　(جـ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{نحـ}}$　　(د) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{نء}}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}$ فإن : ....

(أ) ب منتصف $\overline{\text{أحـ}}$　　(ب) حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

(جـ) ب تنطبق على حـ　　(د) أ تنطبق على حـ

(٨) إذا كان حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ فأى مما يأتى يكون صحيح ؟

(١) $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{بحـ}}$　　(٢) $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\| = \|\overrightarrow{\text{بحـ}}\|$　　(٣) $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{حـب}}$

(أ) (١) فقط.　　(ب) (١) ، (٢) فقط.　　(جـ) (٢) ، (٣) فقط.　　(د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{مأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{مب}}$ أنصاف أقطار فى دائرة (م)

فأى مما يأتى صحيح ؟

(١) $\overrightarrow{\text{مأ}} = \overrightarrow{\text{مب}}$　　(٢) $\|\overrightarrow{\text{مأ}}\| = \|\overrightarrow{\text{مب}}\|$　　(٣) $\overrightarrow{\text{مأ}} = -\overrightarrow{\text{مب}}$

(أ) (١) فقط.　　(ب) (٢) فقط.　　(جـ) (١) ، (٢) فقط.　　(د) (٢) ، (٣) فقط.

(١٠) إذا تحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب فإن المسافة التى قطعها تكون ....

(أ) $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$　　(ب) أقل من $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$

(جـ) أكبر من أو يساوى $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$　　(د) $\overrightarrow{\text{أب}}$

(١١) إذا تحرك جسم من نقطة أ إلى نقطة ب ثم إلى نقطة حـ فإن ....

(أ) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

(ب) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}}$

(جـ) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| + \|\overrightarrow{\text{بحـ}}\|$

(د) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

(١٢) فى الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة أ شرقًا إلى النقطة حـ

ثم عاد غربًا إلى النقطة ب فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... سم.

(أ) ٦　　(ب) ٩　　(جـ) ١٥　　(د) ٢١

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٩ سم فى اتجاه أب ← (ب) ٦ سم فى اتجاه حـب ←

(جـ) ٩ سم فى اتجاه ب أ ← (د) ٢١ سم فى اتجاه أب ←

(١٣) فى الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة أ مسافة ٤٨ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٢٠ مترًا شمالاً ثم توقف عند النقطة حـ فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... مترًا

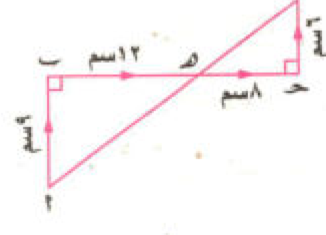
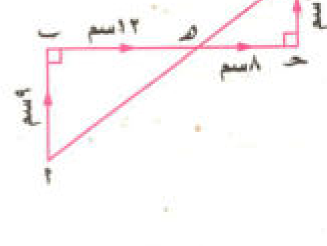
(أ) ٥٢ (ب) ٦٨ (جـ) ٤٨ (د) ٢٨

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٦٨ متر فى اتجاه أحـ ← (ب) ٦٨ متر فى اتجاه حـأ ←

(جـ) ٥٢ متر فى اتجاه أحـ ← (د) ٥٢ متر فى اتجاه حـأ ←

(١٤) فى الشكل المقابل :

إذا كانت كل من : ءحـ ، أب عمودية على بحـ

وإذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب ثم حـ

وتوقف عند النقطة ء فإن :


أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... سم

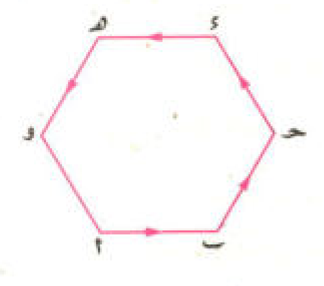
(أ) ٢٥ (ب) ٣٥ (جـ) ٢٩ (د) ٢٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٣٥ سم فى اتجاه أء ← (ب) ٣٥ سم فى اتجاه ءأ ←

(جـ) ٢٥ سم فى اتجاه أء ← (د) ٢٥ سم فى اتجاه ءأ ←

(١٥) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٨ أمتار

، إذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب

ثم حـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند النقطة و فإن :

أولًا : المسافة التى قطعها الجسم = ... متر.

(أ) ٨ (ب) ٤٨ (جـ) ٣٢ (د) ٤٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٨ متر فى اتجاه $\overleftarrow{أو}$ (ب) ٤٠ متر فى اتجاه $\overleftarrow{وأ}$

(جـ) ٨ متر فى اتجاه $\overleftarrow{وأ}$ (د) ٤٠ متر فى اتجاه $\overleftarrow{أو}$

(١٦) سيارة قطعت ٢٠ متر فى اتجاه الشمال ثم قطعت نفس المسافة فى اتجاه الغرب فإن إزاحة السيارة هى ....

(أ) ٤٠ متر فى اتجاه الغرب. (ب) ٤٠ متر فى اتجاه الشمال الغربى.

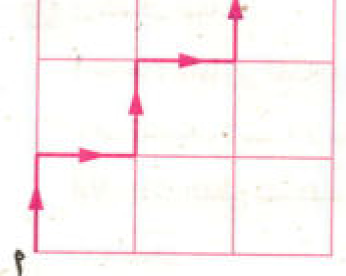
(جـ) ٢٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه الشمال الغربى. (د) ٢٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه الجنوب الغربى.

(١٧) فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت : أ (١ ، ٣) ، ب (−٣ ، ١) ، حـ (٠ ، ٤)

وكان : $\overleftarrow{أب}$ يكافئ $\overleftarrow{حـ ء}$ فإن : ء = ...

(أ) (−٤ ، ٢) (ب) (٤ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ١) (د) (−٤ ، −٢)

(١٨) **فى الشكل المقابل :**



حديقة مربعة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع تم عمل مسارات مستقيمة للترجل بها حتى لا تؤذى النباتات فقسمت تلك المسارات الحديقة إلى ٩ مربعات متطابقة كما بالشكل فإذا تحرك شخص من نقطة أ إلى ب متخذًا المسار الموضح بالشكل فإن :

أولًا : المسافة المقطوعة = ... متر.

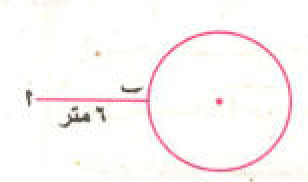
(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة = ...

(أ) ٦٠ متر فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) ٣٠ متر فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

(جـ) ٣٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (د) ٦٠ متر فى اتجاه $\overleftarrow{بأ}$

(١٩) **فى الشكل المقابل :**

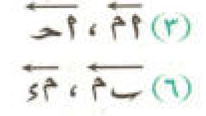


تحرك رجل من نقطة أ إلى نقطة ب ثم تحرك على مسار دائرى طول نصف قطره ٧ متر فإن أقصى معيار إزاحة للرجل = ... متر.

(أ) ١١ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٥ (د) ٥٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في الشكل المقابل :

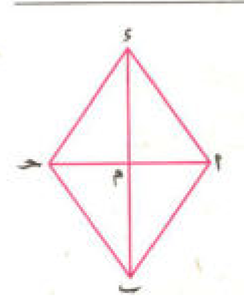


أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه في م ، هـ ∈ $\overline{\text{أء}}$

بيّن ما إذا كان الشعاعان في كل مما يأتي متحدين في الاتجاه أو متضادين في الاتجاه أو مختلفي الاتجاه :

(١) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حء}}$	(٢) $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$	(٣) $\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$
(٤) $\overrightarrow{\text{بم}}$ ، $\overrightarrow{\text{محـ}}$	(٥) $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حب}}$	(٦) $\overrightarrow{\text{بم}}$ ، $\overrightarrow{\text{مء}}$

٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء معين فيه : $\overline{\text{أحـ}} \cap \overline{\text{بء}} = \{\text{م}\}$

اكتب القطع المستقيمة الموجهة والتي تكافئ كلًا مما يأتي :

(١) $\overline{\text{مأ}}$	(٢) $\overline{\text{مء}}$
(٣) $\overline{\text{أء}}$	(٤) $\overline{\text{بأ}}$

٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : $\overline{\text{أحـ}} \cap \overline{\text{بء}} = \{\text{م}\}$

، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

أولًا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ :

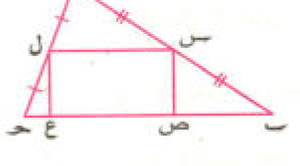
(١) $\overline{\text{بهـ}}$	(٢) $\overline{\text{مب}}$	(٣) $\overline{\text{مهـ}}$
(٤) $\overline{\text{أحـ}}$	(٥) $\overline{\text{أب}}$	(٦) $\overline{\text{بحـ}}$

ثانيًا : بيّن لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

(١) $\overline{\text{مهـ}}$ ، $\overline{\text{بو}}$	(٢) $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{محـ}}$
(٣) $\overline{\text{وب}}$ ، $\overline{\text{وحـ}}$	(٤) $\overline{\text{بأ}}$ ، $\overline{\text{حء}}$



٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : س منتصف $\overline{\text{أب}}$

، ل منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، س ص ع ل مستطيل

اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ كلًا مما يأتي :

(١) $\overline{\text{سص}}$	(٢) $\overline{\text{سل}}$	(٣) $\overline{\text{أل}}$
(٤) $\overline{\text{بس}}$	(٥) $\overline{\text{بص}}$	



٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ

، س ، ص ، ع منتصفات أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب.

أولًا : أي العبارات التالية صحيحة :

(١) ‖ س ص ‖ = ‖ ع ص ‖ (٢) س ص تكافئ ع ص (٣) ب ص تكافئ ع س

ثانيًا : اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتى تكافئ كلاً من :

(١) ب س	(٢) أ ع	(٣) س ع
(٤) حـ ص	(٥) س ص	(٦) ع ص

---

٦ في مستوى إحداثى متعامد : إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (-٣ ، ١) ، حـ (٥ ، -١)

(١) ارسم حـ ء تكافئ أ ب وعين إحداثيي النقطة ء

(٢) عين إحداثيي النقطة م منتصف ب حـ ثم حدد القطع المستقيمة الموجهة التى تكافئ :

(أ) ب م (ب) أ م (جـ) أ حـ (د) ء ب

(٣) هل الشكل أ حـ ء ب متوازى أضلاع ؟ فسر إجابتك.

---

٧ في مستوى إحداثى متعامد : إذا كانت أ (٤ ، -٣) ، ب (٤ ، ٤) ، حـ (-٣ ، -١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة ب أ ، حـ ء ، و م ، ن و متكافئة حيث و نقطة الأصل. **أوجد إحداثيى كل من : ء ، م ، ن**

---

٨ في مستوى إحداثى متعامد :

إذا كانت أ (٣ ، -٢) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (١ ، ٣) ، ء (٤ ، ٧)

(١) أوجد من الرسم : ‖ أ ب ‖ ، ‖ حـ ء ‖

(٢) أثبت أن : أ ب تكافئ حـ ء

(٣) إذا كانت القطع المستقيمة الموجهة ب حـ ، أ م ، ن ء ، و ى متكافئة.

أوجد إحداثيى كل من : م ، ن ، ى حيث و نقطة الأصل.

---

٩ أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) نقطة الأصل وعيِّن عليه النقط :

أ (-٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٠) ، حـ (٢ ، -٣) ، ن (-٣ ، ١) ، ط (٤ ، ١)

ثم ارسم القطع المستقيمة الموجهة : حـ ء ، و هـ ، ن ل ، ق ط كل منها تكافئ أ ب

وعيِّن من الرسم إحداثيات : ء ، هـ ، ل ، ق

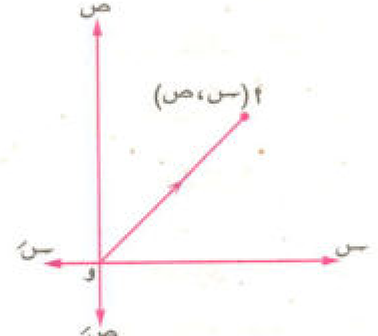


الدرس

2

المتجهات

متجه الموضع



نعلم أن كل نقطة ؟ فى المستوى الإحداثى المتعامـد تُعين بزوج مرتب وحيد (س ، ص) ولذلك يكون لها موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و يتحدد بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{و؟}}$ التى تُسمى متجه الموضع لنقطة ؟

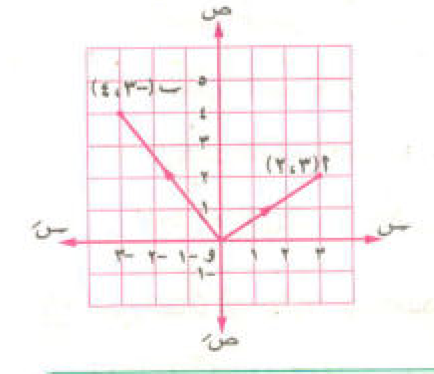
ويُكتب : $\overrightarrow{\text{و؟}}$ = (س ، ص)

تعريف

متجه الموضع لنقطة معلومة ؟ بالنسبة لنقطة الأصل و :

هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{و؟}}$ التى بدايتها نقطة الأصل و ونهايتها النقطة المعلومة ؟

فمثلًا فى الشكل المقابل



* $\overrightarrow{\text{و؟}}$ هو متجه الموضع لنقطة ؟ بالنسبة لنقطة الأصل و

ويُكتب : $\overrightarrow{\text{و؟}}$ = (٣ ، ٢)

* $\overrightarrow{\text{وب}}$ هو متجه الموضع لنقطة ب بالنسبة لنقطة الأصل و

ويُكتب : $\overrightarrow{\text{وب}}$ = (-٣ ، ٤)

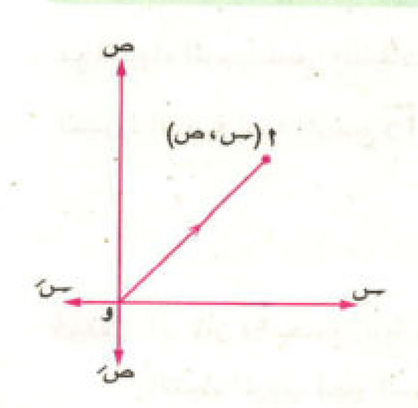
ملاحظة

نظرًا لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية «و» لذلك نرمز لمتجه الموضع «$\overrightarrow{\text{و؟}}$» بالرمز «$\overrightarrow{\text{؟}}$»

ففى الشكل السابق : نكتب : $\overrightarrow{\text{؟}}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٣ ، ٤)

معيار المتجه

هو طول القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه.



فإذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| =$ طول $\overline{وأ}$

وإذا استخدمنا قانون البعد بين نقطتين لإيجاد طول $\overline{وأ}$

فإن : طول $\overline{وأ} = \sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

$\therefore \boxed{\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

فمثلًا

- إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٤)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢} = ٥$ وحدة طول.
- إذا كان : $\overrightarrow{ب} = (-٣ ، ٣\sqrt{٣})$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + (٣\sqrt{٣})^٢} = ٦$ وحدة طول.
- إذا كان : $\overrightarrow{ج} = (-٣ ، ك)$ وكان $\|\overrightarrow{ج}\| = ٣\sqrt{٢}$ فإن : $\sqrt{(-٣)^٢ + ك^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$\therefore ٩ + ك^٢ = ١٨$ $\therefore ك^٢ = ٩$ $\therefore ك = \pm ٣$

متجه الوحدة

هو متجه معياره الواحد الصحيح.

فمثلًا $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ متجه وحدة لأن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = ١$ وحدة طول.

المتجه الصفرى

هو متجه معياره يساوى الصفر ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{٠}$ حيث $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$ وهو متجه غير معين الاتجاه.

تحقق من فهمك

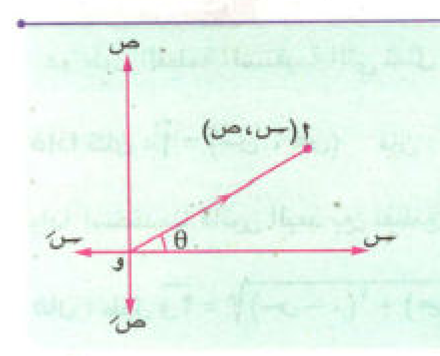
١ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٦ ، -٨)$ فأوجد : $\|\overrightarrow{أ}\|$

٢ هل $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ متجه وحدة أم لا ؟ ولماذا ؟

٣ إذا كان : $\left(ك ، \frac{-٣}{٥}\right)$ متجه وحدة فأوجد قيمة : ك



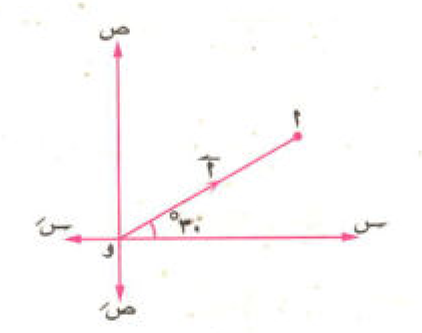
الصورة القطبية لمتجه الموضع



إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{وأ}$ يصنع زاوية قياسها θ

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن:

الصورة القطبية لمتجه الموضع $\overrightarrow{وأ} = (\|\overrightarrow{وأ}\| ، θ)$

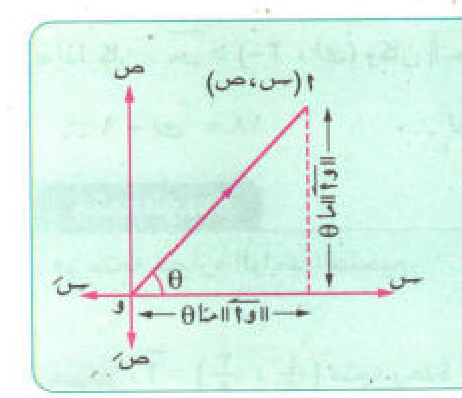


فمثلًا إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ يصنع زاوية قياسها °٣٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ٦ وحدة طول

فإن : الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{وأ}$ = (٦ ، °٣٠)

أى أن $\overrightarrow{وأ} = (٦ ، \frac{\pi}{٦})$

ملاحظة



إذا كان : متجه موضع النقطة أ (س ، ص)

على الصورة القطبية $\overrightarrow{وأ} = (\|\overrightarrow{وأ}\| ، θ)$ فإن :

$س = \|\overrightarrow{وأ}\| جتا θ$ ، $ص = \|\overrightarrow{وأ}\| جا θ$ حيث $ظا θ = \frac{ص}{س}$

وتكون الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{وأ}$ هى :

$$\overrightarrow{وأ} = (\|\overrightarrow{وأ}\| جتا θ ، \|\overrightarrow{وأ}\| جا θ)$$

مثال ١

إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل

فأوجد إحداثيي النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

١ $\overrightarrow{وأ} = (١٠\sqrt{٣} ، °٦٠)$ ٢ $\overrightarrow{وأ} = (٦\sqrt{٢} ، °١٣٥)$ ٣ $\overrightarrow{وأ} = (٨ ، \frac{٤\pi}{٣})$

الحل

١ $س = ١٠\sqrt{٣}$ جتا °٦٠ $= ٥\sqrt{٣}$ ، $ص = ١٠\sqrt{٣}$ جا °٦٠ = ١٥   ∴ أ = $(٥\sqrt{٣} ، ١٥)$

٢ $س = ٦\sqrt{٢}$ جتا °١٣٥ = −٦ ، $ص = ٦\sqrt{٢}$ جا °١٣٥ = ٦   ∴ أ = (−٦ ، ٦)

٣ س = ٨ جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ = −٤ ، ص = ٨ جا $\frac{٤\pi}{٣}$ $= -٤\sqrt{٣}$ ∴ أ = $(-٤ ، -٤\sqrt{٣})$

مثـال ٢

إذا كان $\overrightarrow{و أ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل

أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{و أ}$ فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ $\overrightarrow{و أ} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$ ٢ $\overrightarrow{و أ} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$

الحـل

١ ∵ $\overrightarrow{و أ} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$

∴ $\|\overrightarrow{و أ}\| = \sqrt{(٤)^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$

= ٨ وحدة طول.

، $ظا \theta = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\sqrt{٣}$

هى : $ظا^{-١}(\sqrt{٣}) = ٦٠^\circ$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠   ∴ $\theta = ٦٠^\circ$ ∴ $\overrightarrow{و أ} = (٨ ، ٦٠^\circ)$

الربع الثانى	الربع الأول
س < ٠ ، ص > ٠	س > ٠ ، ص > ٠
$(١٨٠^\circ - \theta)$	θ
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$(١٨٠^\circ + \theta)$	$(٣٦٠^\circ - \theta)$
س < ٠ ، ص < ٠	س > ٠ ، ص < ٠

٢ ∵ $\overrightarrow{و أ} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$ ∴ $\|\overrightarrow{و أ}\| = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^٢ + (-٥)^٢} = ١٠$ وحدة طول.

، $ظا \theta = \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ هى $ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = ٣٠^\circ$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠   ∴ $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$ ∴ $\overrightarrow{و أ} = (١٠ ، ٣٣٠^\circ)$

حاول بنفسك

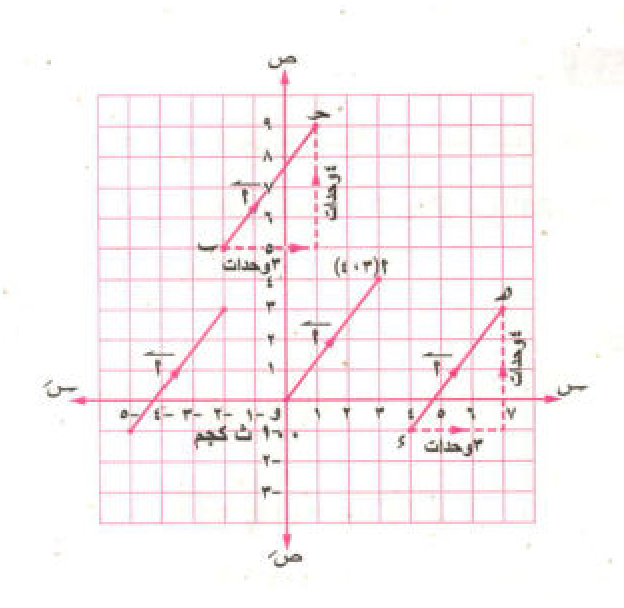
١ إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{و أ} = (٥\sqrt{٢} ، ٢٢٥^\circ)$ فأوجد إحداثيى النقطة أ

٢ اكتب بالصورة القطبية متجه الموضع $\overrightarrow{و أ} = (-١٢\sqrt{٣} ، ١٢)$

المتجهات المتكافئة

كل متجه $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ يمكن تمثيله هندسيًا بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة والتى كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

ففى الشكل المقابل



$\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٤)$ هو متجه الموضع للنقطة أ

، $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{ء هـ} = \dots = \overrightarrow{و أ}$

لأن $\|\overrightarrow{ب حـ}\| = \|\overrightarrow{ء هـ}\| = \dots = \|\overrightarrow{و أ}\|$

$= \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = ٥$ وحدة طول

، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{ء هـ}$ ، ... ، $\overrightarrow{و أ}$ فى نفس الاتجاه

ولذلك يعتبر كلٌ من :

$\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{ء هـ}$ ، ... تمثيلًا هندسيًا للمتجه $\overrightarrow{أ}$

أى أن $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{ء هـ} = \dots = \overrightarrow{و أ} = (٣ ، ٤)$

- **نلاحظ مما سبق :** ارتباط المتجهات بالأزواج المرتبة أى بعناصر ح × ح أى ($ح^٢$)

ولذلك يمكن استنتاج تعريف المتجهات بمفهومها الرياضى أو الجبرى كالآتى :

تعريف

عناصر المجموعة $ح^٢$ مع عمليتى الجمع والضرب فى عدد حقيقى المعرفتين عليها تسمى متجهات ويرمز لها بأحد الرموز : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ، ...

حيث إن المجموعة $ح^٢$ = مجموعة الأزواج المرتبة لحاصل الضرب الديكارتى ح × ح

$= \{(س ، ص) : س \in ح ، ص \in ح\}$

جمع متجهين جبريا

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١) \in ح^٢$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_٢ ، ص_٢) \in ح^٢$

فإن : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (س_١ + س_٢ ، ص_١ + ص_٢)$

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ١)$ **فإن :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (٣ + ٢ ، ٥ + ١) = (٥ ، ٦)$

خواص جمع المتجهات

١ **خاصية الانغلاق :** لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} \in ح^٢$ **يكون :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \in ح^٢$

٢ **خاصية الإبدال :** لأى متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ **يكون :** $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$

٣ خاصية الدمج أو التجميع : لأى ثلاثة متجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ يكون :

$$\overleftarrow{أ} + (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{حـ}) = (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) + \overleftarrow{حـ} = \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{حـ}$$

٤ خاصية وجود العنصر المحايد : لأى متجه $\overleftarrow{أ}$ يوجد متجه صفرى $\overleftarrow{و} = (٠ ، ٠)$

حيث : $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{و} = \overleftarrow{و} + \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{أ}$

٥ خاصية توفر المعكوسات الجمعية : لكل متجه $\overleftarrow{أ}$ (س ، ص) يوجد متجه $(-\overleftarrow{أ}) = (-س ، -ص)$

حيث : $\overleftarrow{أ} + (-\overleftarrow{أ}) = (-\overleftarrow{أ}) + \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{و}$ (المتجه الصفرى) والمتجه $(-\overleftarrow{أ})$ يسمى المعكوس الجمعى للمتجه $\overleftarrow{أ}$

٦ خاصية الحذف : لأى ثلاثة متجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ **إذا كان :** $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{حـ}$ **فإن :** $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{حـ}$

ضرب متجه فى عدد حقيقى

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (س ، ص) \in ع^٢$ ، ك $\in$ ع **فإن :** ك $\overleftarrow{أ}$ = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)

فمثلاً **إذا كان :** $\overleftarrow{أ} = (٢ ، -٥)$ **فإن :** $٣ \overleftarrow{أ} = ٣ (٢ ، -٥) = (٦ ، -١٥)$

خواص ضرب المتجه فى عدد حقيقى

١ خاصية التوزيع :

(أ) لأى متجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، ك $\in$ ع **يكون :** ك $(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب})$ = ك $\overleftarrow{أ}$ + ك $\overleftarrow{ب}$

(ب) لأى متجه $\overleftarrow{أ}$ ، $ك_١$ ، $ك_٢ \in$ ع **يكون :** $(ك_١ + ك_٢) \overleftarrow{أ} = ك_١ \overleftarrow{أ} + ك_٢ \overleftarrow{أ}$

٢ خاصية الدمج أو التجميع : لأى متجه $\overleftarrow{أ}$ ، $ك_١$ ، $ك_٢ \in$ ع

يكون : $(ك_١ ك_٢) \overleftarrow{أ} = ك_١ (ك_٢ \overleftarrow{أ})$

٣ خاصية الحذف : لأى متجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، ك $\in$ ع* **إذا كان :** ك $\overleftarrow{أ}$ = ك $\overleftarrow{ب}$ **فإن :** $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ب}$

مثال ٣

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (-٤ ، ٢)$

فأوجد كلاً من المتجهات الآتية :

١ $٢ \overleftarrow{أ} - ٣ \overleftarrow{ب}$

٢ $\frac{١}{٢} (٤ \overleftarrow{أ} + ٢ \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{حـ})$

٣ $٢ \overleftarrow{و} - ٣ (\overleftarrow{حـ} + \overleftarrow{أ})$ حيث $\overleftarrow{و}$ المتجه الصفرى.

الحـل

١ $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} = ٢(٣ ، -١) - ٣(٢ ، ٥) = (٦ ، -٢) + (-٦ ، -١٥) = (٠ ، -١٧)$

٢ $\frac{١}{٢}(٤\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}) = ٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \frac{١}{٢}\overrightarrow{حـ} = ٢(٣ ، -١) + (٢ ، ٥) - \frac{١}{٢}(-٤ ، ٢)$

$= (٦ ، -٢) + (٢ ، ٥) + (٢ ، -١) = (١٠ ، ٢)$

٣ $٢\overrightarrow{و} - ٣(\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{أ}) = ٢(٠ ، ٠) - ٣[(-٤ ، ٢) + (٣ ، -١)]$

$= (٠ ، ٠) - ٣(-١ ، ١) = (٠ ، ٠) + (٣ ، -٣) = (٣ ، -٣)$

مثـال ٤

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٦ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ٢)$ فأوجد : $\|\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}\|$

الحـل

$\because \overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب} = (٦ ، ١) - ٢(١ ، ٢) = (٦ ، ١) - (٢ ، ٤) = (٤ ، -٣)$

$\therefore \|\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول.

حاول بنفسك

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، -٥)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-٥ ، ٥)$

فاكتب على الصورة القطبية المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}$

تساوى متجهين

لأى متجهين $\overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_٢ ، ص_٢)$ يكون : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

إذا وفقط إذا كان : $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

فمثلًا **إذا كان :** $\overrightarrow{أ} = (س ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٥ ، ص)$ **وكان :** $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

فإن : $س = -٥$ ، $ص = ٣$

مثـال ٥

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٥)$ عبر عن $\overrightarrow{حـ} = (١٢ ، ١)$ بدلالة : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحـل

نفرض أن : $\overrightarrow{حـ} = ك\overrightarrow{أ} + ل\overrightarrow{ب}$ حيث : ك ، ل $\in$ ح

$\therefore \overrightarrow{حـ} = ك(٢ ، -٣) + ل(٣ ، ٥) = (٢ك ، -٣ك) + (٣ل ، ٥ل)$

$= (٢ك + ٣ل ، -٣ك + ٥ل)$

∴ $(2ك + 3ل ، -3ك + 5ل) = (12 ، 1)$

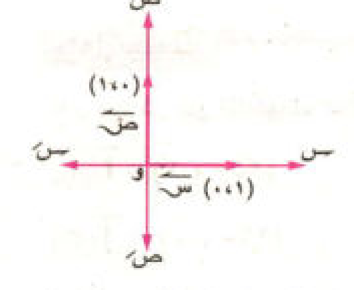
∴ $2ك + 3ل = 12$ وبضرب المعادلة × 3   ∴ $6ك + 9ل = 36$ (1)

، $-3ك + 5ل = 1$ وبضرب المعادلة × 2   ∴ $-6ك + 10ل = 2$ (2)

بجمع المعادلتين (1) ، (2) : ∴ $19ل = 38$ ∴ $ل = 2$

وبالتعويض فى (1) : ∴ $6ك = 18$ ومنها $ك = 3$ ∴ $\overrightarrow{ح} = 3\overrightarrow{أ} + 2\overrightarrow{ب}$

متجها الوحدة الأساسيان $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$



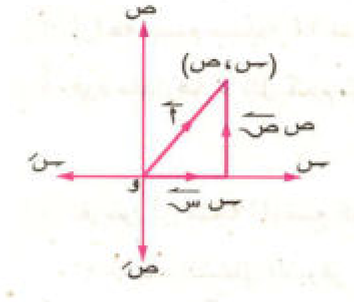
إذا كان لدينا نظام إحداثى متعامد فى المستوى ، (و) نقطة الأصل فإن :

1 متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{س} = (1 ، 0)$ هو متجه الموضع للنقطة $(1 ، 0)$ ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.

2 متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ص} = (0 ، 1)$ هو متجه الموضع للنقطة $(0 ، 1)$ ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

* **لاحظ أن** $\|\overrightarrow{س}\| = \|\overrightarrow{ص}\| = 1$

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :



إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجهًا فى المستوى حيث $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$

فإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين كالتالى :

$\overrightarrow{أ} = (س ، ص) = (س ، 0) + (0 ، ص)$ (من تعريف الجمع)

$= س (1 ، 0) + ص (0 ، 1)$ (من تعريف الضرب فى عدد حقيقى)

∴ $\boxed{\overrightarrow{أ} = س\,\overrightarrow{س} + ص\,\overrightarrow{ص}}$

وتستخدم هذه القاعدة مباشرة للتعبير عن الزوج المرتب الذى يمثل $\overrightarrow{أ}$ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$

فمثلًا $\overrightarrow{أ} = (2 ، 3) = 2\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = (-5 ، 1) = -5\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

مثال 6

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

1 $\overrightarrow{أ} = (-8 ، 6)$

2 $\overrightarrow{ل} = (0 ، -2)$

3 $\overrightarrow{م} = (\frac{3}{2} ، 0)$

4 $\overrightarrow{ح} = (2 ، -6)$

الحل

١ $\overrightarrow{أ}$ = −٨ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ∴ ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = $\sqrt{(-٨)^٢ + (٦)^٢}$ = ١٠ وحدة طول.

٢ $\overrightarrow{ل}$ = −٢ $\overleftarrow{ص}$ ∴ ‖$\overrightarrow{ل}$‖ = $\sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢}$ = ٢ وحدة طول.

٣ $\overrightarrow{م}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{س}$ ∴ ‖$\overrightarrow{م}$‖ = $\sqrt{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ + (٠)^٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ وحدة طول.

٤ $\overleftarrow{حـ}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٦ $\overleftarrow{ص}$ ∴ ‖$\overleftarrow{حـ}$‖ = $\sqrt{(٢)^٢ + (-٦)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

حاول بنفسك

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

١ $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، −٢٤)

٢ $\overleftarrow{ء}$ = (−٦ ، ٠)

٣ $\overrightarrow{ل}$ = (٠ ، −١٢)

٤ $\overleftarrow{هـ}$ = (−١٢ ، −١٦)

مثال ٧

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

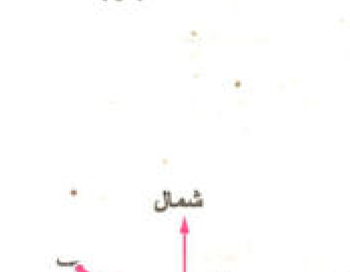
١ قوة مقدارها ١٢ نيوتن تؤثر فى اتجاه الشمال الشرقى.

٢ سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٨ أمتار كل ثانية فى اتجاه °٣٠ شمال الغرب.

٣ إزاحة جسم مسافة ٢٤ مترًا فى اتجاه الشمال.

٤ قوة مقدارها ٤ ثقل كجم تؤثر فى اتجاه °٣٠ شرق الجنوب.

الحل



١ نفرض أن متجه الموضع للقوة = $\overrightarrow{أ}$

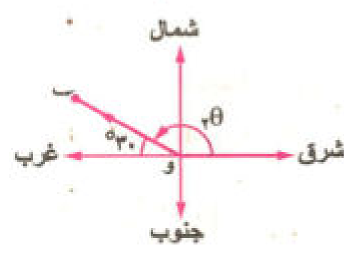
∵ اتجاه الشمال الشرقى ينصف الزاوية بين الشمال والشرق.

∴ $\theta_١$ = $\frac{°٩٠}{٢}$ = °٤٥

* الصورة القطبية $\overrightarrow{أ}$ = (١٢ ، °٤٥)

* الصورة الإحداثية $\overrightarrow{أ}$ = (١٢ جتا °٤٥ ، ١٢ جا °٤٥) = (٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$)

* $\overrightarrow{أ}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{ص}$



٢ نفرض أن متجه الموضع للسرعة = $\overleftarrow{ب}$

$\theta_٢$ = °١٨٠ − °٣٠ = °١٥٠

* الصورة القطبية $\overleftarrow{ب}$ = (٨ ، °١٥٠)

* الصورة الإحداثية $\overleftarrow{ب}$ = (٨ جتا °١٥٠ ، ٨ جا °١٥٠) = (−٤ $\sqrt{٣}$ ، ٤)

* $\overleftarrow{ب}$ = −٤ $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$



[٣] نفرض أن متجه الموضع للإزاحة = $\overrightarrow{ح}$ ∴ $\theta_3 = ٩٠°$

* الصورة القطبية $\overrightarrow{ح}$ = (٢٤ ، ٩٠°)
* الصورة الإحداثية $\overrightarrow{ح}$ = (٢٤ حتا ٩٠° ، ٢٤ حا ٩٠°) = (صفر ، ٢٤)
* $\overrightarrow{ح}$ = ٢٤ $\overrightarrow{ص}$

[٤] نفرض أن متجه الموضع للقوة = $\overrightarrow{ء}$

∴ $\theta_4 = ٢٧٠° + ٣٠° = ٣٠٠°$

* الصورة القطبية $\overrightarrow{ء}$ = (٤ ، ٣٠٠°)
* الصورة الإحداثية $\overrightarrow{ء}$ = (٤ حتا ٣٠٠° ، ٤ حا ٣٠٠°) = (٢ ، −٢ $\sqrt{٣}$)
* $\overrightarrow{ء}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

حاول بنفسك

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

[١] قوة مقدارها ٦٣ نيوتن تؤثر على الجسم فى اتجاه الشرق.

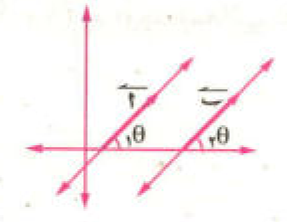
[٢] إزاحة جسم مسافة ٣ أمتار فى اتجاه الجنوب.

[٣] سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٥٠ مترًا كل ثانية فى اتجاه الشمال الغربى.

توازى متجهين وتعامدهما

* لكل $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين حيث : $\overrightarrow{أ}$ = (س$_1$ ، ص$_1$) ، $\overrightarrow{ب}$ = (س$_2$ ، ص$_2$)

[١] إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$



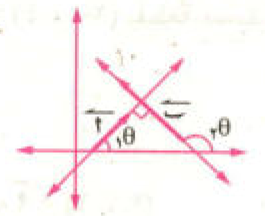
فإن : طا θ_1 = طا θ_2

∴ $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$

∴ س$_1$ ص$_2$ − س$_2$ ص$_1$ = ٠

والعكس صحيح.

[٢] إذا كان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$



فإن : طا θ_1 × طا θ_2 = −١

∴ $\frac{ص_1}{س_1} \times \frac{ص_2}{س_2} = -١$

∴ س$_1$ س$_2$ + ص$_1$ ص$_2$ = ٠

والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٨ ، −٦) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٩ ، ١٢)

فإن : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ لأن : [٣ × ٨ + ٤ × (−٦) = صفر]

، $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{جـ}$ لأن : [٣ × ١٢ − ٤ × ٩ = صفر]

* **لاحظ أن** ميل $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ميل $\overrightarrow{ب}$ = $\frac{-٦}{٨}$ = $\frac{-٣}{٤}$

، ميل $\overrightarrow{جـ}$ = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ميل $\overrightarrow{أ}$ = ميل $\overrightarrow{جـ}$

∴ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{جـ}$ ، ميل $\overrightarrow{أ}$ × ميل $\overrightarrow{ب}$ = −١ ∴ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص)

فإن : ميل $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{ص}{س}$

مثال ٨

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، م) أوجد قيمة م فى كل مما يأتى :

١ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ٢ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

الحل

١ ∵ $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ∴ −٢ م −٣ (−٤) = ٠

∴ ٢ م = ١٢ ∴ م = ٦

٢ ∵ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ (−٢) (−٤) + ٣ × م = ٠

∴ ٣ م = −٨ ∴ م = $\frac{-٨}{٣}$

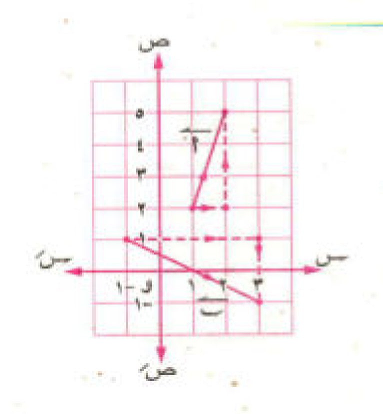
مثال ٩

أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) هى نقطة الأصل ثم مثل عليه كلاً مما يأتى :

١ المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٣) بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (١ ، ٢)

٢ المتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −٢) بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (−١ ، ١) ثم أوجد إحداثيى نقطة النهاية فى كل حالة.

الحل



١ لتمثيل المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٣)

* نبدأ من النقطة (١ ، ٢) ثم نتحرك يمينًا وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأعلى ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

∴ نقطة النهاية = (٢ ، ٥)

٢ لتمثيل المتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −٢)

* نبدأ من النقطة (−١ ، ١) ثم نتحرك يمينًا ٤ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأسفل وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.

∴ نقطة النهاية = (٣ ، −١)

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{م}$ متجهًا غير صفرى ، ك ≠ ٠ فإن : $\overrightarrow{م}$ // ك $\overrightarrow{م}$ ويكون ‖ك $\overrightarrow{م}$‖ = |ك| . ‖$\overrightarrow{م}$‖

حيث اتجاه ك $\overrightarrow{م}$ هو نفس اتجاه $\overrightarrow{م}$ لكل ك > ٠ ، اتجاه ك $\overrightarrow{م}$ هو عكس اتجاه $\overrightarrow{م}$ لكل ك < ٠

فمثلًا • $\overrightarrow{م}$ ، ٢ $\overrightarrow{م}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه.

• $\overrightarrow{م}$ ، −$\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{م}$ متوازيان وفى اتجاهين متضادين.

مثال ١٠

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى أوجد قيمة ك فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ ك ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ‖−٢ $\overrightarrow{أ}$‖

٢ ‖٢ ك $\overrightarrow{أ}$‖ = ‖−٣ $\overrightarrow{أ}$‖

الحل

١ ∵ ك ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ‖−٢ $\overrightarrow{أ}$‖ ∴ ك ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ٢ ‖$\overrightarrow{أ}$‖ ∴ ك = ٢

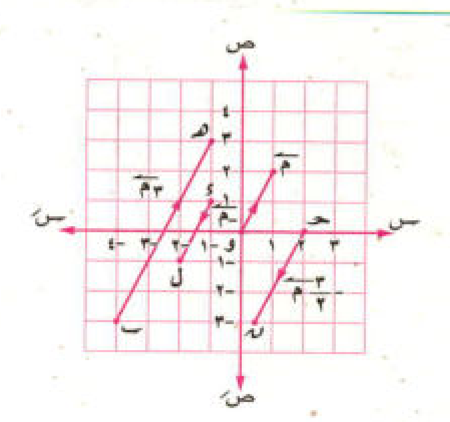
٢ ∵ ‖٢ ك $\overrightarrow{أ}$‖ = ‖−٣ $\overrightarrow{أ}$‖ ∴ |٢ ك| ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ٣ ‖$\overrightarrow{أ}$‖ ∴ ٢ |ك| = ٣

∴ |ك| = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ك = ± $\frac{٣}{٢}$

مثال ١١

ارسم المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٢) ثم ارسم من النقط : ب(−٤ ، −٣) ، حـ(٢ ، ٠) ، ء(−١ ، ١) القطع المستقيمة الموجهة والتى تكافئ ٣ $\overrightarrow{م}$ ، −$\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{م}$ ، −$\overrightarrow{م}$ على الترتيب.

الحل



١ نرسم المتجه $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٢) بداية من النقطة (٠ ، ٠)

٢ نرسم المتجه ٣ $\overrightarrow{م}$ = ٣ (١ ، ٢) = (٣ ، ٦)

بداية من النقطة ب (−٤ ، −٣)

٣ نرسم المتجه −$\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{م}$ = $\frac{-٣}{٢}$ (١ ، ٢) = ($\frac{-٣}{٢}$ ، −٣)

بداية من النقطة حـ (٢ ، ٠)

٤ نرسم المتجه −$\overrightarrow{م}$ = (−١ ، −٢) بداية من النقطة ء (−١ ، ١)

مثال ١٢

الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة ، عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$:

١ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$	٢ $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$	٣ $\overrightarrow{\text{حـ هـ}}$
٤ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$	٥ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$	٦ $\overrightarrow{\text{ك حـ}}$
٧ $\overrightarrow{\text{ء ل}}$	٨ $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$	٩ $\overrightarrow{\text{ل أ}}$

الحل

١ ٤ $\overrightarrow{\text{م}}$	٢ −٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$	٣ − $\overrightarrow{\text{م}}$
٤ ٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$	٥ −٤ $\overrightarrow{\text{م}}$	٦ ٢ $\overrightarrow{\text{ن}}$
٧ −٣ $\overrightarrow{\text{م}}$	٨ −٢ $\overrightarrow{\text{ن}}$	٩ −٥ $\overrightarrow{\text{ن}}$

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين وكان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، ك ≠ صفر فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$

فمثلًا إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١٥ ، ١٠)

∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٥ (٣ ، ٢) = ٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$

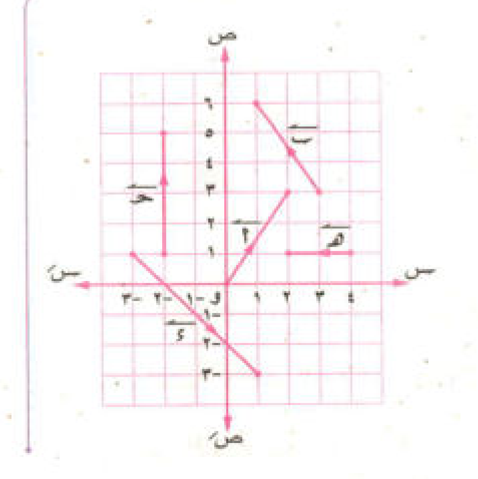
حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

تمثيل لبعض المتجهات فى المستوى المتعامد

اكتب كلًا من المتجهات الآتية بدلالة متجهى

الوحدة الأساسيين :



١ $\overrightarrow{\text{أ}}$	٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$	٣ $\overrightarrow{\text{حـ}}$ 
٤ $\overrightarrow{\text{ء}}$	٥ $\overrightarrow{\text{هـ}}$	

تمارين 2 على المتجهات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، −١٢) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) ١٣ (ب) −٧ (جـ) ١٧ (د) ٧

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١٢ ، ١٨) فإن : $\frac{٢}{٣}\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) (٨ ، ١٢) (ب) (١٢ ، ٨) (جـ) (٦ ، ٤) (د) (١٨ ، ٢٧)

(٣) كل المتجهات الآتية هى متجهات وحدة ما عدا ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠,٦ ، ٠,٨) (جـ) (٠ ، −١) (د) (١ ، ١)

(٤) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهين متعامدين فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٨ (د) −٤,٥

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (−٣ ، ك) متوازيين فإن : ك = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢٠ ، ١٦) فإن : المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان. (جـ) متكافئان. (د) غير ذلك.

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ وكان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ±١ (د) صفر

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، −٢) فإن : $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ٦) فإن : $\|-٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٠) إذا كان : أ = (−٣ ، ٤) ، ب = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{حـ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{حـ}$ = ...

(أ) (−١ ، ٥) (ب) (−٤ ، ٩) (جـ) (١ ، ٦) (د) (١ ، ٥)

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (٨ ، ١٦) ، $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، ١٢) فإن : $\|\overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $٨\sqrt{٥}$

(١٢) إذا كان : ٢ (٣ ، ص) + ٣ (س ، -٢) = (٣ ، ٢) فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) إذا كان : $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٤ ، ٣) ، ٢ $\overrightarrow{أ}$ - ٣ $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{حـ}$ فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ٧

(١٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، -٦) ، ٣ ($\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$) = ٧ $\overrightarrow{ب}$ - ٢ $\overrightarrow{أ}$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) (٢ ، -٣) (ب) (-٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، -٣) (د) (٢ ، ٣)

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ٨) ، - $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ٤) فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) (٢ ، -٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(١٦) إذا كان : ٧ $\overrightarrow{أ}$ + ٥ $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٣٣ $\overrightarrow{ص}$ ، ٣ $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = -٩ $\overrightarrow{س}$ + ١١ $\overrightarrow{ص}$

فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ...

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤٢}$

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ وكان : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ٥ فإن : ك = ...

(أ) ٤ فقط (ب) -٤ فقط (جـ) ± ٤ (د) ٢

(١٨) إذا كان : ‖٣ ك $\overrightarrow{أ}$‖ = ‖-١٥ $\overrightarrow{أ}$‖ فإن : ك = ... حيث ‖$\overrightarrow{أ}$‖ ≠ ٠

(أ) ٥ فقط (ب) -٥ فقط (جـ) ± ٥ (د) ١٥

(١٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، م) ، $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{ب}$ فإن : ك + م = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ٣

(٢٠) إذا كان : ك ‖٤ $\overrightarrow{أ}$‖ = ‖-٣ $\overrightarrow{أ}$‖ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٤}$ (د) ± $\frac{٣}{٤}$

(٢١) إذا كان : ‖ك (٣ ، ٤)‖ = ١ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٢٥}$ (جـ) ± $\frac{١}{٥}$ (د) ± ٥

(٢٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = -٧ $\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$

(ب) $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ وفى اتجاهين متضادين.

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ وفى نفس الاتجاه.

(د) ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = -٧ ‖$\overrightarrow{ب}$‖

(٢٣) إذا كان : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ٣ ، -١ ≤ ك ≤ ٢ فإن : ‖ك $\overrightarrow{أ}$‖ ∈ ....

(أ) [-٣ ، ٦] (ب) [٠ ، ٦] (جـ) [١ ، ٢] (د) [٣ ، ٦]

(٢٤) $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها θ حيث ....

(أ) ظا θ = $\frac{٢}{٣}$ (ب) ظا θ = $\frac{٣}{٢}$ (جـ) جا θ = $\frac{٢}{٣}$ (د) ظا θ = $\frac{-٢}{٣}$

(٢٥) إذا كان : $\vec{أ}$ = $(٦\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤})$ متجه موضع فى الصورة القطبية لنقطة أ فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، –٦) (ب) (–٦ ، ٦) (جـ) (٦ ، ٦) (د) (–٦ ، –٦)

(٢٦) الصورة القطبية للمتجه $\vec{أ}$ = –٣ $\vec{ص}$ هى ....

(أ) $(-٣ ، \frac{\pi}{٢})$ (ب) $(٣ ، \frac{\pi}{٢})$ (جـ) $(-٣ ، \frac{٣\pi}{٢})$ (د) $(٣ ، \frac{٣\pi}{٢})$

(٢٧) الصورة القطبية للمتجه $(٦ ، ٦\sqrt{٣})$ هى ....

(أ) $(١٢ ، \frac{\pi}{٣})$ (ب) $(١٢ ، \frac{\pi}{٦})$ (جـ) $(٦ ، \frac{\pi}{٣})$ (د) $(٦ ، \frac{\pi}{٦})$

(٢٨) إذا كان : $\vec{أ}$ = (١٠ ، θ) حيث جا θ = $\frac{٣}{٥}$ متجه موضع لنقطة أ فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، ٨) أ، (٦ ، –٨) (ب) (٨ ، ٦) أ، (–٨ ، ٦)

(جـ) (٦ ، ٨) أ، (٨ ، ٦) (د) (–٨ ، ٦) ، (٦ ، –٨)

(٢٩) فى الشكل المقابل :

$\|\vec{أ}\|$ = ٤ وحدة طول

فإن : $\vec{أ}$ = ... (بالصورة الإحداثية)

(أ) $(٢ ، ٢\sqrt{٣})$ (ب) $(٢\sqrt{٣} ، ٢)$

(جـ) $(٤ ، \sqrt{٣})$ (د) $(\sqrt{٣} ، ٢)$

ص
$\vec{أ}$
°٣٠
س
سَ
و
صَ

(٣٠) إذا كان معيار المتجه $\vec{أ}$ يساوى ٧ فإن معيار المتجه – ٢ $\vec{أ}$ يساوى ....

(أ) ٧ (ب) –٢ (جـ) ١٤ (د) –١٤

(٣١) إذا كان : $\vec{أ}$ = $(٣ ، \frac{\pi}{٤})$ فإن : ٢ $\vec{أ}$ = ...

(أ) $(٦ ، \frac{\pi}{٢})$ (ب) $(٦ ، \frac{\pi}{٤})$ (جـ) $(٣ ، \frac{\pi}{٢})$ (د) $(٣ ، \frac{\pi}{٤})$

(٣٢) إذا كان : $\vec{ل}$ = (٢ ، –٣) ، $\vec{ك}$ = (٣ ، ١ – س) متوازيين فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١١}{٢}$ (جـ) –١ (د) –٩

(٣٣) إذا كان : $\vec{أ}$ = (س ، ٤) ، $\vec{ب}$ = (٢ ، ص) وكان : $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ فإن : ....

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س = ٢ ص (جـ) س ص = ٨ (د) س ص = –٨

(٣٤) إذا كان : $\vec{أ}$ = (ك + ١ ، ١) ، $\vec{ب}$ = (٢ ، ك) فإن قيم ك التى تجعل $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ هى ....

(أ) –٢ ، –١ (ب) ١ ، ٢ (جـ) –٢ ، ١ (د) –١ ، ٢

(٣٥) إذا كان : $\vec{أ}$ = (٢ ، –١) ، $\vec{ب}$ = (٣ ، ٤) ، $\vec{جـ}$ = (ك ، ١٥) والمتجهان $\vec{جـ}$ ، $\vec{ب}$ – $\vec{أ}$ متوازيين

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كان المتجهان $\overrightarrow{أ}$ = (ﻫ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = ﻫ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ متعامدين فإن : ﻫ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) −٤

(٣٧) أى أزواج المتجهات الآتية تكون متعامدة ؟

(أ) (٣ ، ٠) ، (٢ ، −١) (ب) (−٢ ، ٥) ، (٤ ، −١٠)

(جـ) (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢) (د) (١ ، −٤) ، (٢ ، −٨)

(٣٨) أى من أزواج المتجهات الآتية ليسا متضادين ؟

(أ) $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٥ ، ٠) (ب) $\overrightarrow{أ}$ = (−٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −١)

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، −٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، −٥) (د) $\overrightarrow{أ}$ = (٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، −١)

(٣٩) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى ، ك ∈ ح* وكان : ‖ك $\overrightarrow{أ}$‖ = ١ فإن : ك = ...

(أ) ‖$\overrightarrow{أ}$‖ (ب) ١ (جـ) ± $\frac{١}{‖\overrightarrow{أ}‖}$ (د) $\frac{١}{‖\overrightarrow{أ}‖}$

(٤٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{جـ}$ حيث $\overrightarrow{جـ}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فإن : ك = ...

(أ) ± ١ (ب) ‖$\overrightarrow{أ}$‖ (جـ) ± ‖$\overrightarrow{أ}$‖ (د) $\frac{\overrightarrow{أ}}{‖\overrightarrow{أ}‖}$

(٤١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، ٣) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (م ، −٤)

وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{جـ}$ فإن : $\frac{ك}{م}$ = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٥ ، $\frac{\pi}{١٨}$)

فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ + ‖$\overrightarrow{ب}$‖ + ‖$\overrightarrow{جـ}$‖ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٤٣) المتجه الذى يعبر عن إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الجنوب الشرقى هو ....

(أ) ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ (ب) −٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) −٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ − ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ − ٢٠ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

(٤٤) إذا كان معيار القوة $\overrightarrow{ق}$ = ١٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق فإن : $\overrightarrow{ق}$ = ...

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ − ٥ $\overrightarrow{ص}$ (ب) ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) ٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ (د) −٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$

(٤٥) سفينة تقطع مسافة ١٠ $\sqrt{٣}$ كم شمالًا ثم ١٠ كم غربًا فإن الإزاحة = ... فى الصورة القطبية.

(أ) (٢٠ ، $\frac{\pi}{٦}$) (ب) (٢٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$) (جـ) (٢٠ ، $\frac{٥\pi}{٦}$) (د) (٢٠ ، $\frac{٧\pi}{٦}$)

(٤٦) إذا كان : $\vec{أ} = (ك ، ك + ٣)$ ، $\|\vec{أ}\| = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طولية فإن إحدى قيم ك هى ....

(أ) −٣ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

(٤٧) إذا كان : $\vec{أ} = (س_{1} ، ص_{1})$ ، $\vec{ب} = (س_{2} ، ص_{2})$

فإن المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متعامدان إذا كان : ....

(أ) $س_{1}\, ص_{2} - س_{2}\, ص_{1} = ٠$ (ب) $س_{1}\, س_{2} - ص_{1}\, ص_{2} = ٠$

(جـ) $\frac{س_{1}\, س_{2}}{ص_{1}\, ص_{2}} = -١$ (د) $\frac{س_{1}\, ص_{2}}{س_{2}\, ص_{1}} = ١$

(٤٨) إذا كان : $\vec{أ} = (س_{1} ، ص_{1})$ ، $\vec{ب} = (س_{2} ، ص_{2})$ ، $\vec{جـ} = (س_{3} ، ص_{3})$

وكان : $س_{1}\, س_{2} + ص_{1}\, ص_{2} = س_{1}\, س_{3} + ص_{1}\, ص_{3} =$ صفر فإن : $س_{2}\, ص_{3} =$ ....

(أ) صفر (ب) $س_{1}\, ص_{3}$ (جـ) $ص_{2}\, س_{3}$ (د) $س_{3}\, ص_{1}$

(٤٩) إذا كان : $\vec{أ} = (-١ ، ٢)$ ، $\vec{ب} = (٣ ، ٧)$ ، $\vec{جـ} = (٧ ، ١٢)$ فإن : $\vec{جـ} =$ ....

(أ) $٢\vec{أ} - \vec{ب}$ (ب) $\vec{أ} + ٢\vec{ب}$ (جـ) $٢\vec{ب} - \vec{أ}$ (د) $٣\vec{أ} + ٢\vec{ب}$

(٥٠) إذا كان : $\vec{أ} = \left(٢\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right)$ ، $\vec{ب} = \left(٢\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi\right)$ فإن : $\vec{أ} + \vec{ب} =$ ....

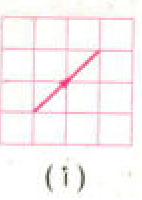
(أ) $(٤\sqrt{٢} ، \pi)$ (ب) $(٤ ، ٤)$ (جـ) $(٤ ، ٠)$ (د) $\left(٤ ، \frac{\pi}{٢}\right)$

(٥١) المتجهان $\left(٤\sqrt{٣} ، \frac{\pi}{٦}\right)$ ، $\left(٤\sqrt{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right)$ يكونان ....

(أ) متكافئان. (ب) متوازيان.

(جـ) متعامدان. (د) متساويان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه.

(٥٢) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء هـ ك سداسى منتظم مركزه نقطة الأصل

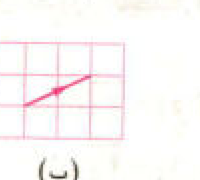
وطول ضلعه ٥ وحدات طولية

فإن : $\vec{وهـ} =$ ....

(أ) $\left(-٥ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ (ب) $\left(-٥ ، \frac{٤}{٣}\pi\right)$

(جـ) $\left(٥ ، \frac{٤}{٣}\pi\right)$ (د) $\left(٥ ، \frac{\pi}{٣}\right)$

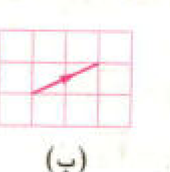
(٥٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل $\vec{أ}$



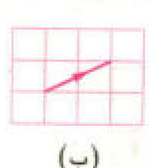
أى الأشكال الآتية يمثل المتجه $-\frac{١}{٢}\vec{أ}$



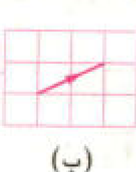
(أ)



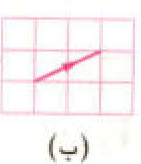
(ب)



(جـ)



(د)

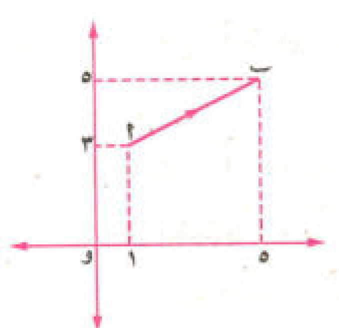


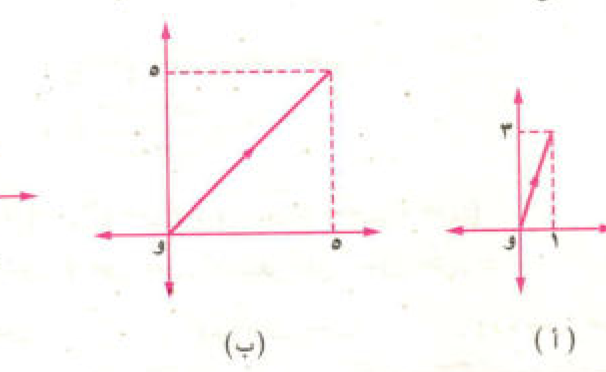
(٥٤) فى الشكل المقابل :

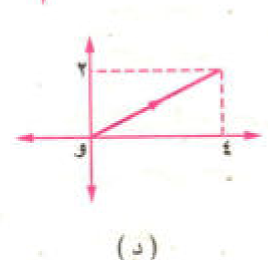
أ = (١ ، ٣) ، ب = (٥ ، ٥)

فإن الشكل الذى يمثل $\overrightarrow{أب}$

هو ....







(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ أوجد :

(١) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ (٢) $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ (٣) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

(٤) $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب}$ (٥) $\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$ (٦) $-٣\overrightarrow{أ}$

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٧ ، ١)$ فأوجد :

(١) $\|\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{جـ}\|$ «١٧» (٢) $\|٥\overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{أ}\|$ «$\sqrt{١٩٧}$»

(٣) $\|\overrightarrow{أ} - \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب}\|$ «$٤\sqrt{٢}$» (٤) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{جـ}\|$ «١٣»

٣ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ، ثم أوجد معيار كل منها :

(١) $\overrightarrow{م} = (-٤ ، -٣)$ (٢) $\overrightarrow{ن} = (٨ ، -٦)$ (٣) $\overrightarrow{ق} = (-٥ ، -١٢)$

(٤) $\overrightarrow{أ} = (٠ ، ٢\sqrt{٢})$ (٥) $\overrightarrow{ب} = (-٣\sqrt{٣} ، ٠)$ (٦) $\overrightarrow{جـ} = (\sqrt{٢} ، -٣\sqrt{٢})$

٤ أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات الآتية :

(١) $\overrightarrow{م} = ٨\sqrt{٣}\,\overrightarrow{س} + ٨\,\overrightarrow{ص}$ (٢) $\overrightarrow{ن} = ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{ص}$

(٣) $\overrightarrow{وأ} = (٥ ، ٥\sqrt{٣})$ (٤) $\overrightarrow{ب} = (٧\sqrt{٣} ، -٧)$

(٥) $\overrightarrow{جـ} = -٤\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$

٥ إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل فى الصورة القطبية فأوجد إحداثيى النقطة أ فى كل مما يأتى :

(١) $\overrightarrow{وأ} = (١٢\sqrt{٢} ، ٦٠^\circ)$ (٢) $\overrightarrow{وأ} = (٥\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤})$

(٣) $\overrightarrow{وأ} = (٢٤ ، ١٥٠^\circ)$ (٤) $\overrightarrow{وأ} = (٦ ، \frac{٥\pi}{٣})$

٦ أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى :

(١) س (-٦ ، ص) = (٣ ، ٥)

(٢) (س ، -٣) - (٥ ، ٠) = (٢ ، ص)

(٣) (٣ ، ص) + س (١ ، -٢) - (-٤ ، ١) = $\overrightarrow{0}$

(٤) س (٢ ، ٣) + ص (-٣ ، ١) = (-٤ ، ٥)

---

٧ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، -٨) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٩ ، ١٢) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (-٤ ، -٣)

(١) أثبت أن : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ⊥ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ⊥ $\overrightarrow{أ}$

(٢) أوجد : ٢ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ - ٢ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ - ٣ $\overrightarrow{حـ}$

---

٨ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ $\sqrt{٣}$ ، -٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، $\sqrt{٣}$)

اذكر العلاقة بين المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ مع ذكر السبب.

---

٩ إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ن}$ = -٨ $\overrightarrow{س}$ - ١٢ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ل}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ١٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

(١) أثبت أن : $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ن}$

(٢) أوجد : أ ∈ ح إذا كان : $\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{ل}$

(٣) أوجد قيمة : ٤ $\overrightarrow{م}$ + $\overrightarrow{ن}$ ، ٤ ($\overrightarrow{م}$ + $\overrightarrow{ن}$)

(٤) أوجد : ب ∈ ح إذا كان : $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overrightarrow{ن}$

(٥) هل : $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overrightarrow{م}$ ؟ فسر إجابتك.

---

١٠ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، -٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٠ ، ١١)

(١) اكتب كلًا من المتجهات التالية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

٢ $\overrightarrow{ب}$ ، ٣ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{حـ}$ ، $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$)

(٢) عبر عن $\overrightarrow{حـ}$ بدلالة : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

---

١١ إذا كان : $\overrightarrow{حـ}$ = (٤ ، -١) ، $\overrightarrow{ء}$ = (-٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (-٥ ، ١)

أوجد المتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى يحقق المعادلة : ٢ $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{حـ}$ - ٣ $\overrightarrow{ء}$ + ٢ $\overrightarrow{هـ}$ «($\frac{٧}{٢}$ ، -٣)»

---

١٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، -٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{حـ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

(١) أثبت أن : المتجه $\overrightarrow{ل}$ = ٢ $\overrightarrow{حـ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{أ}$ يوازى المتجه $\overrightarrow{م}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٨ $\overrightarrow{ص}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{ل}$ = ك $\overrightarrow{م}$ أوجد : ك «-٣»

---

١٣ فى مستوى إحداثى متعامد ، إذا كان : $\overrightarrow{ل}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{م}$ = - $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ن}$ = -٢ $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ أوجد $\overrightarrow{حـ}$ فى الصورة القطبية حيث : $\overrightarrow{حـ}$ = $\overrightarrow{ل}$ + $\overrightarrow{م}$ + ٣ $\overrightarrow{ن}$ «(٤ ، ٢٤٠°)»

---

١٤ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

(١) قوة مقدارها ٣٧ نيوتن تؤثر على جسم وتعمل فى اتجاه الشمال.

(٢) 📖 سرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س فى اتجاه الغرب.

(٣) إزاحة جسم مسافة ٢٥ مترًا فى اتجاه الجنوب.

(٤) متجه معياره ٦ وحدات ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٥) إزاحة جسم مسافة ١٥٠ سم فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

(٦) 📖 قوة مقدارها ٢٠ ث كجم تؤثر على جسم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٧) 📖 إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الشمال الغربى.

---

١٥ أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على استقامة واحدة مرتبه من اليمين إلى اليسار حيث أب : ب حـ : حـ ء = ٢ : ٣ : ٥

ضع العدد المناسب مكان النقط فيما يلى علمًا بأن الرمز « = » يعنى تكافئ :

(١) $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ... $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ = ... $\overleftarrow{\text{أب}}$	(٣) $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ = ... $\overleftarrow{\text{أب}}$
(٤) $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ = ... $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$	(٥) $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ = ... $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$	(٦) $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ = ... $\overleftarrow{\text{أحـ}}$
(٧) $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ... $\overleftarrow{\text{ب أ}}$	(٨) $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ = ... $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$	(٩) $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = ... $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$

---

١٦ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ أوجد :

(١) قيمة ك التى تجعل المتجه ($\overleftarrow{\text{أ}}$ + ك $\overleftarrow{\text{ب}}$) يوازى المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$

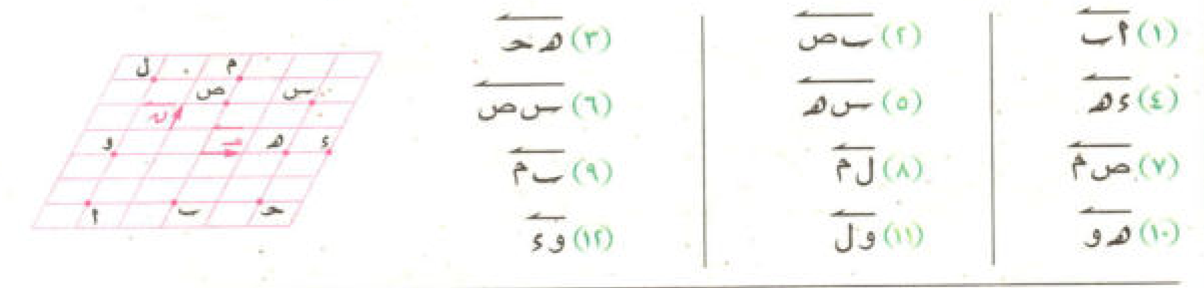
(٢) قيمة ل التى تجعل المتجه (ل $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$) يوازى المتجه $\overleftarrow{\text{ص}}$

«$-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$»

---

١٧ 📖 الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة.

عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ن}}$:



(١) $\overleftarrow{\text{أب}}$	(٢) $\overleftarrow{\text{ب ص}}$	(٣) $\overleftarrow{\text{هـ حـ}}$
(٤) $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$	(٥) $\overleftarrow{\text{س هـ}}$	(٦) $\overleftarrow{\text{س ص}}$
(٧) $\overleftarrow{\text{ص م}}$	(٨) $\overleftarrow{\text{ل م}}$	(٩) $\overleftarrow{\text{ب م}}$
(١٠) $\overleftarrow{\text{هـ و}}$	(١١) $\overleftarrow{\text{و ل}}$	(١٢) $\overleftarrow{\text{و ء}}$

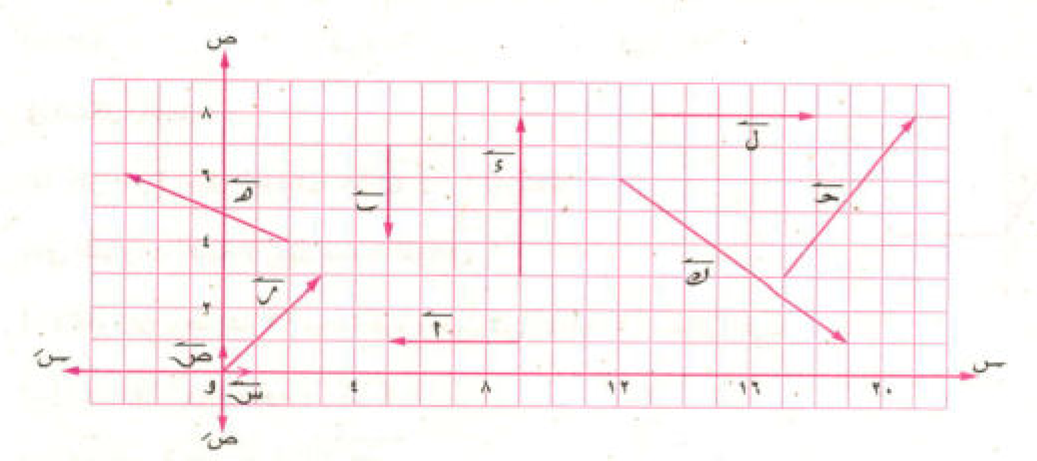
---

١٨ أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة فى المستوى حيث (و) هى نقطة الأصل وعيّن عليه متجه الموضع الممثل للمتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ = (٢ ، ٣) ثم ارسم :

(١) قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة أ = (–٣ ، –٢) تمثل المتجه ٢ $\overleftarrow{\text{م}}$ وأوجد إحداثيى نقطة النهاية.

(٢) قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة ب = (٤ ، ٥) تمثل المتجه – $\overleftarrow{\text{م}}$ وأوجد إحداثيى نقطة النهاية.

١٩ يبين الشكل تمثيلًا لبعض المتجهات فى المستوى الإحداثى المتعامد :



اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٤$ فأى من المتجهات الآتية يكون متجه وحدة ؟

(أ) $\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ}$ (ب) $-\overrightarrow{أ}$ (جـ) $-\frac{١}{٤}\overrightarrow{أ}$ (د) $\frac{٣}{٤}\overrightarrow{أ}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٧\overrightarrow{س} + ٢٤\overrightarrow{ص}$

فإن : المتجه الذى له نفس معيار $\overrightarrow{ب}$ ويوازى المتجه $\overrightarrow{أ}$ هو ....

(أ) $٥\overrightarrow{س} + ٢٠\overrightarrow{ص}$ (ب) $١٥\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص}$

(جـ) $٢٠\overrightarrow{س} + ١٥\overrightarrow{ص}$ (د) $١٥\overrightarrow{س} + ٢٠\overrightarrow{ص}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$

وكان $\overrightarrow{أ} \perp (ك\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ})$ فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيح ؟

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ (ب) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ فإن : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

(جـ) إذا كان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{ب}$ (د) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

(٥) قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ} = ٦\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ هو ....

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = −٤ $\overrightarrow{س}$ تساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{و أ}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق}$ ، $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ١٢ وحدة

فأى العبارات الآتية لا يمثل متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ؟

(أ) القوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها ١٢ وحدة قوة وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب

(ب) $\overrightarrow{ق}$ = (١٢ وحدة قوة ، ١٢٠°)

(جـ) $\overrightarrow{ق}$ = − ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

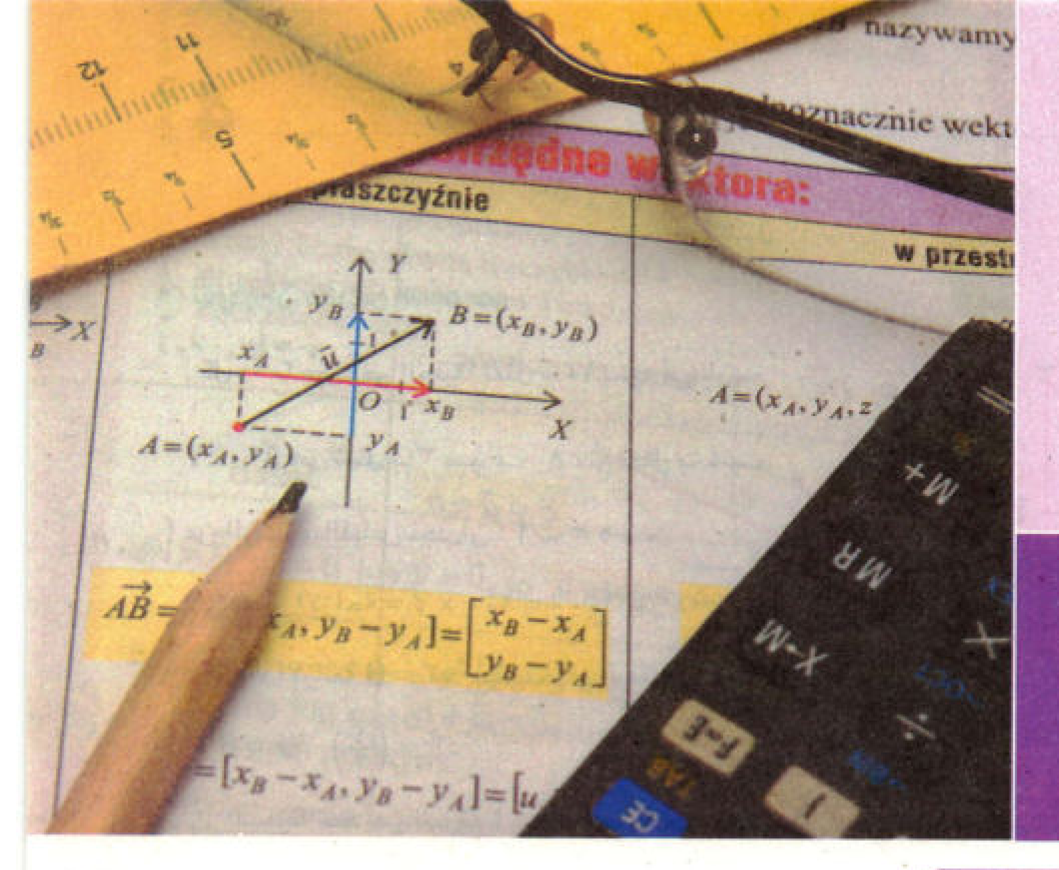
(د) القوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها ١٢ وحدة قوة وتعمل فى اتجاة يصنع ٣٠° مع الشمال

(٨) إذا كانت الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $\left(١٢ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$ فإن الصورة القطبية للمتجه − $\overrightarrow{أ}$ هى ....

(أ) $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٦}\right)$ (ب) $\left(١٢ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$ (جـ) $\left(٦ ، \frac{٤\pi}{٣}\right)$ (د) $\left(١٢ ، \frac{٥\pi}{٣}\right)$

(٩) إذا دار متجه الموضع $\overrightarrow{أ}$ = $\left(\sqrt{٣} ، ١\right)$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٤٥° فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ بعد دورانه هى ....

(أ) (٢ ، ٣٠°) (ب) (٢ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٧٥°) (د) (٤ ، ٧٥°)



الدرس

3

العمليات على المتجهـــات

أولًا / جمع المتجهات هندسيًا

الطريقة الأولى (قاعدة المثلث «علاقة شال») :

إذا كان $\overrightarrow{أب}$ تمثل المتجه $\vec{م}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ تمثل المتجه $\vec{ن}$

حيث إن نقطة النهاية (ب) للمتجه الأول $\vec{م}$ هى

نفسها نقطة البداية للمتجه الثانى $\vec{ن}$

فإن $\overrightarrow{أجـ}$ تمثل المتجه $\vec{م} + \vec{ن}$

أى أن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أجـ}$

أى أن الإزاحة $\overrightarrow{أب}$ متبوعة بإزاحة أخرى $\overrightarrow{بجـ}$ تكافئ إزاحة وحيدة $\overrightarrow{أجـ}$

مثـــال ١

إذا تحركت سفينة من الموقع (أ) فى الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السفينة ($\overrightarrow{أب}$)

إذا كانت الاتجاهات هى :

١ مسافة ٦٠٠ متر شرقًا ثم مسافة ٨٠٠ متر شمالاً.

٢ مسافة ٢٠ كم غربًا ثم مسافة ٣٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب.

الحـــل

١ نفرض أن مقياس الرسم هو :

كل «٢٠٠ متر» فى الحقيقة تمثل بـ «١ سم» فى الرسم

∴ ٦٠٠ متر تمثل بـ ٣ سم ، ٨٠٠ متر تمثل بـ ٤ سم

من الرسم وبالقياس نجد أن : أب = ٥ سم

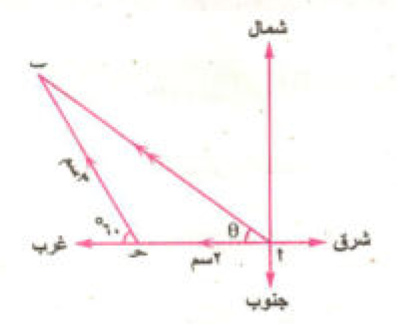
∴ معيار الإزاحة = ٥ × ٢٠٠ = ١٠٠٠ متر

، اتجاه الإزاحة θ = ٥٣° (باستخدام المنقلة)

أ، θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$ ≈ ٥٣°

∴ السفينة تبعد عن الموقع أ مسافة ١٠٠٠ متر فى اتجاه ٥٣° شمال الشرق.

٢ نفرض أن مقياس الرسم هو :



كل «١٠ كم» فى الحقيقة تمثل بـ «١ سم» فى الرسم

∴ ٢٠ كم تمثل بـ ٢ سم ، ٣٠ كم تمثل بـ ٣ سم

ومن الرسم وبالقياس نجد أن : أب ≈ ٤,٤ سم

∴ معيار الإزاحة = ٤,٤ × ١٠ = ٤٤ كم

، اتجاه الإزاحة θ ≈ ٣٧° (باستخدام المنقلة)

∴ السفينة تبعد عن الموقع أ مسافة ٤٤ كم

فى اتجاه ٣٧° شمال الغرب.

حاول بنفسك

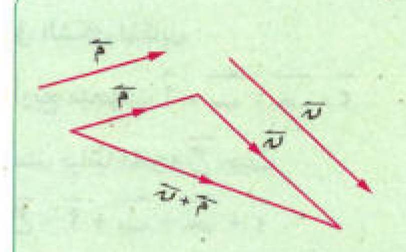
إذا تحركت سيارة من الموقع (أ) فى الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السيارة ($\overleftarrow{\text{أب}}$) إذا كانت الاتجاهات هى :

١ مسافة ١٢٠٠ متر شرقًا ثم مسافة ١٦٠٠ متر شمالاً.

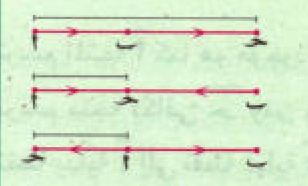
٢ مسافة ٢٥ كم شرقًا ثم ٣٠ كم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

٣ مسافة ٥٠ كم غربًا ثم مسافة ٤٠ كم فى اتجاه الشمال الغربى.

ملاحظات هامة



١ أي متجهين $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ يمكن جمعهما (إيجاد محصلتهما) بإنشاء متجهين متتاليين ومكافئين للمتجهين $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ كما فى الشكل المقابل.



٢ قاعدة شال لجمع متجهين صحيحة إذا كانت النقط ا ، ب ، حـ تنتمى إلى مستقيم واحد.

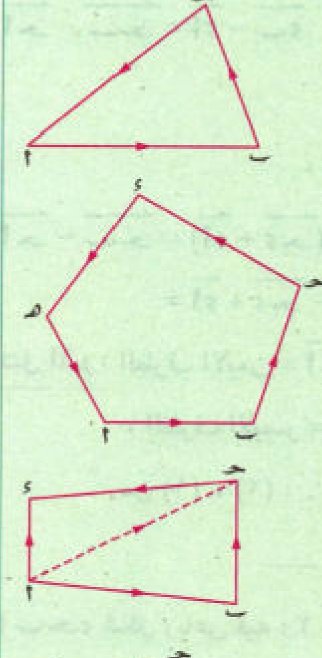
ففى الأشكال الثلاثة المقابلة يكون :

$$\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{احـ}$$

٣ $\overrightarrow{اب} = -\overrightarrow{با}$ **حيث إن :** $\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{با} = \overrightarrow{و}$ «المتجه الصفرى»

٤ **فى أى مثلث ا ب حـ يكون :** $\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{حـا} = \overrightarrow{و}$

لأن : $(\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ}) + \overrightarrow{حـا} = \overrightarrow{احـ} + \overrightarrow{حـا} = \overrightarrow{و}$



ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأى مضلع :

فمثلًا فى الشكل الخماسى ا ب حـ ء هـ يكون :

$$\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{حـء} + \overrightarrow{ءهـ} + \overrightarrow{هـا} = \overrightarrow{و}$$

٥ فى أى شكل رباعى يكون :

$$\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{حـء} = \overrightarrow{اء}$$

لأن $(\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ}) + \overrightarrow{حـء}$

$= \overrightarrow{احـ} + \overrightarrow{حـء} = \overrightarrow{اء}$

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأى مضلع :

فمثلًا فى الشكل الخماسى ا ب حـ ء هـ يكون :

$$\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{حـء} + \overrightarrow{ءهـ} = \overrightarrow{اهـ}$$

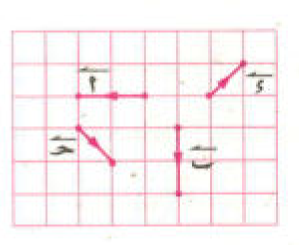
مثال ٢

في الشكل المقابل :

أربع متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{ء}$

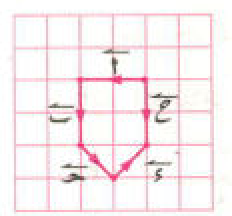
مثل بيانيًا المتجه $\overrightarrow{ح}$ حيث

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{ء}$



الحل

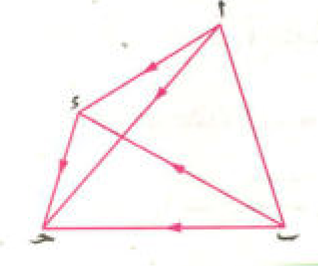
نرسم المتجه $\overrightarrow{أ}$ كما هو موجود ثم من نهايته نرسم متجه يكافئ $\overrightarrow{ب}$ ومن نهايته نرسم متجه يكافئ $\overrightarrow{حـ}$ ومن نهايته نرسم متجه يكافئ $\overrightarrow{ء}$ ثم نرسم متجه من نقطة بداية $\overrightarrow{أ}$ إلى نقطة نهاية $\overrightarrow{ء}$ فيكون المتجه $\overrightarrow{ح}$ هو محصلة المتجهات .



مثال ٣

في أي شكل رباعي أ ب حـ ء أثبت أن :

$\overrightarrow{أحـ} - \overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{أء} - \overrightarrow{بء}$



الحل

$\overrightarrow{أحـ} - \overrightarrow{بحـ} = (\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءحـ}) - (\overrightarrow{بء} + \overrightarrow{ءحـ})$

$= \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءحـ} - \overrightarrow{بء} - \overrightarrow{ءحـ} = \overrightarrow{أء} - \overrightarrow{بء}$

حل آخر: الطرف الأيمن $= \overrightarrow{أحـ} - \overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{حـب} = \overrightarrow{أب}$ (١)

، الطرف الأيسر $= \overrightarrow{أء} - \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءب} = \overrightarrow{أب}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ الطرفان متساويان.

مثال ٤

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : $٢ \overrightarrow{بحـ} = ٣ \overrightarrow{أء}$ أثبت أن :

[١] أ ب حـ ء شبه منحرف.

[٢] $\overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{بء} = \frac{٥}{٢} \overrightarrow{أء}$

الحل

[١] ∵ $\overrightarrow{بحـ} = \frac{٣}{٢} \overrightarrow{أء}$ ∴ $\overline{بحـ} // \overline{أء}$ ، $بحـ = \frac{٣}{٢} أء$

أي أن $بحـ \neq أء$

∴ الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

> **تذكر أن**
> لإثبات أن الشكل الرباعي شبه منحرف نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيان وغير متساويين في الطول.

٢ في Δ أءحـ : $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءحـ}$ (١)

، في Δ ءبحـ : $\overrightarrow{بء} = \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{حـء}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\therefore \overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{ءحـ} + \overrightarrow{حـء}$

$= \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{ءحـ} - \overrightarrow{ءحـ}$

$= \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{أء} + \frac{٣}{٢} \overrightarrow{أء}$

$= \frac{٥}{٢} \overrightarrow{أء}$

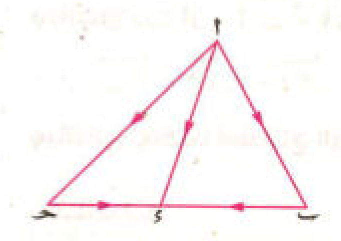
مثال ٥

أبحـ مثلث ، ء $\in \overline{بحـ}$ بحيث ٣ $\overline{بء}$ = ٤ $\overline{ءحـ}$ أثبت أن : $٣ \overrightarrow{أب} + ٤ \overrightarrow{أحـ} = ٧ \overrightarrow{أء}$

الحل

$\because \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أء}$ $\therefore ٣ \overrightarrow{أب} + ٣ \overrightarrow{بء} = ٣ \overrightarrow{أء}$ (١)

، $\because \overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{حـء} = \overrightarrow{أء}$ $\therefore ٤ \overrightarrow{أحـ} + ٤ \overrightarrow{حـء} = ٤ \overrightarrow{أء}$ (٢)



ويجمع (١) ، (٢) :

$\therefore ٣ \overrightarrow{أب} + ٤ \overrightarrow{أحـ} + ٣ \overrightarrow{بء} + ٤ \overrightarrow{حـء} = ٧ \overrightarrow{أء}$

$\therefore ٣ \overrightarrow{أب} + ٤ \overrightarrow{أحـ} + ٣ \overrightarrow{بء} - ٤ \overrightarrow{ءحـ} = ٧ \overrightarrow{أء}$

لكن : $٣ \overrightarrow{بء} = ٤ \overrightarrow{ءحـ}$ $\therefore ٣ \overrightarrow{أب} + ٤ \overrightarrow{أحـ} = ٧ \overrightarrow{أء}$

مثال ٦

إذا كان : $٤ \overrightarrow{م} - ٣ \overrightarrow{سص} = ٤ \overrightarrow{عص} + ٧ \overrightarrow{صس}$ أثبت أن : $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{عس}$

الحل

$٤ \overrightarrow{م} = ٤ \overrightarrow{عص} + ٧ \overrightarrow{صس} + ٣ \overrightarrow{سص} = ٤ \overrightarrow{عص} + ٧ \overrightarrow{صس} - ٣ \overrightarrow{صس}$

$= ٤ \overrightarrow{عص} + ٤ \overrightarrow{صس} = ٤ (\overrightarrow{عص} + \overrightarrow{صس}) = ٤ \overrightarrow{عس}$

$\therefore \overrightarrow{م} = \overrightarrow{عس}$

حاول بنفسك

١ أبحـء شكل رباعي فإذا كان : $\overrightarrow{أب} = \frac{٥}{٣} \overrightarrow{ءحـ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{أء} - \overrightarrow{بحـ} = \frac{٢}{٣} \overrightarrow{ءحـ}$

٢ إذا كان : $٥ \overrightarrow{ن} - ٤ \overrightarrow{بأ} = ٩ \overrightarrow{أب} + ٥ \overrightarrow{بحـ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أحـ}$

الطريقة الثانية (قاعدة متوازى الأضلاع) :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ تمثل المتجه $\vec{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ تمثل المتجه $\vec{\text{ن}}$

حيث إن المتجهين $\vec{\text{م}}$ ، $\vec{\text{ن}}$ لهما نفس نقطة البداية (أ)



* لإيجاد $\vec{\text{م}} + \vec{\text{ن}}$ نكمل متوازى الأضلاع أ ب حـ ء ونرسم قطره $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ فيكون $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ تمثل المتجه $\vec{\text{م}} + \vec{\text{ن}}$

أى أن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}$

وذلك لأن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = \overrightarrow{\text{أحـ}}$ (**لاحظ أن :** $\overrightarrow{\text{أء}}$ يكافئ $\overrightarrow{\text{بحـ}}$)

* في الشكل المقابل :

إذا كانت : م هى نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع فإن : $\overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالتالى يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أم}}$



ويمكننا أن نصل إلى نفس هذه النتيجة إذا لاحظنا أن :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بم}} = \overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءم}} = \overrightarrow{\text{أم}}$

وبالجمع نجد أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{بم}} + \overrightarrow{\text{ءم}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أم}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{بم}} = \overrightarrow{\text{مء}} = -\overrightarrow{\text{ءم}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} - \overrightarrow{\text{ءم}} + \overrightarrow{\text{ءم}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أم}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أم}}$



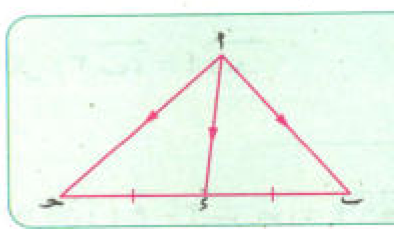
وبالتالى يمكننا استنتاج الملاحظة التالية :

ملاحظة

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ متوسطًا في $\triangle$ أ ب حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أء}}$

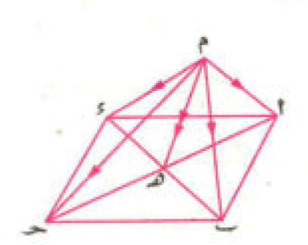


مثال ٧

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة ما فى مستويه ، هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} + \overrightarrow{\text{مء}} = ٤\ \overrightarrow{\text{مهـ}}$

الحل



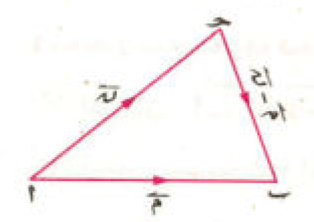
$\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} + \overrightarrow{\text{مء}} = (\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{محـ}}) + (\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مء}})$

ولكن $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{محـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{مهـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، $\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مء}} = ٢\ \overrightarrow{\text{مهـ}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{بء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} + \overrightarrow{\text{مء}} = ٢\ \overrightarrow{\text{مهـ}} + ٢\ \overrightarrow{\text{مهـ}} = ٤\ \overrightarrow{\text{مهـ}}$

ثانيًا طرح متجهين هندسيًا



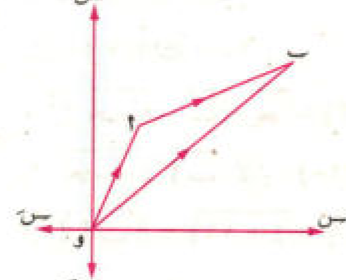
إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{ن}$

فإن : $\overrightarrow{جـ ب}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$

أى أن $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ ب}$

وذلك لأن $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{جـ أ} = \overrightarrow{جـ أ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـ ب}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها



إذا كانت : أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ **فإن :** $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{و ب} - \overrightarrow{و أ}$

حيث $\overrightarrow{و ب}$ ، $\overrightarrow{و أ}$ متجها موضع للنقطتين ب ، أ على الترتيب.

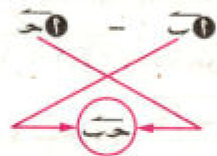
∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

فمثلًا إذا كانت : أ (٥ ، ٣) ، ب (−٢ ، ٤)

فإن : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٤) − (٥ ، ٣) = (−٧ ، ١)

تذكر أن

◂ **عند تطبيق قاعدتى الجمع والطرح السابقتين على قطعتين مستقيمتين موجهتين يجب مراعاة :**





١ فى حالة الجمع تكون نقطة البداية للقطعة الثانية هى نقطة النهاية للقطعة الأولى.

٢ فى حالة الطرح يكون للقطعتين نفس نقطة البداية.

مثال ٨

أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٢ ، −٢) ، ب (٤ ، −٢) ، جـ (٢ ، ٣)

أوجد إحداثيى النقطة ء

الحل

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع. ∴ $\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{ب جـ}$ ∴ $\overrightarrow{ء} - \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$

∴ $\overrightarrow{ء} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −٢) + (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) = (٠ ، ٣) ∴ النقطة ء هى (٠ ، ٣)

حاول بنفسك

إذا كان : أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (س ، ١) ، ب = (٥ ، ٢)

، جـ = (−٣ ، −٤) ، ء = (٢ ، ص) **أوجد قيمتى :** س ، ص

مثال ٩

أ ب حـ ؛ شبه منحرف فيه : أ(−١ ، ١) ، ب(٣ ، ٣) ، حـ(٥ ، −١) ، ؛(−٥ ، ك)

١ إذا كان : $\overrightarrow{أب} // \overrightarrow{؛حـ}$ فأوجد قيمة : ك ٢ أثبت أن : $\overrightarrow{حـب} \perp \overrightarrow{أب}$

٣ أوجد : مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ؛

الحل

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٣ ، ٣) - (−١ ، ١) = (٤ ، ٢)$

، $\overrightarrow{؛حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{؛} = (٥ ، −١) - (−٥ ، ك) = (١٠ ، −١ − ك)$

، ∵ $\overrightarrow{أب} // \overrightarrow{؛حـ}$ ∴ ٤ (−١ − ك) − ٢ × ١٠ = ٠

∴ −٤ − ٤ك = ٢٠ ∴ −٤ك = ٢٤ ∴ ك = −٦ (المطلوب أولًا)

، ∵ $\overrightarrow{حـب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ} = (٣ ، ٣) - (٥ ، −١) = (−٢ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{أب} = (٤ ، ٢)$

∴ $\overrightarrow{حـب} \perp \overrightarrow{أب}$ لأن : (−٢) × ٤ + ٤ × ٢ = ٠ (المطلوب ثانيًا)

∵ $\| \overrightarrow{أب} \| = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ∵ ك = −٦ ∴ $\overrightarrow{؛حـ} = (١٠ ، ٥)$

∴ $\| \overrightarrow{؛حـ} \| = \sqrt{١٠٠ + ٢٥} = ٥\sqrt{٥}$ وحدة طول.

∵ $\| \overrightarrow{حـب} \| = \sqrt{٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ؛ $= \frac{\| \overrightarrow{أب} \| + \| \overrightarrow{؛حـ} \|}{٢} \times \| \overrightarrow{حـب} \|$

$= \frac{٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥}}{٢} \times ٢\sqrt{٥} = ٣٥$ وحدة مربعة. (المطلوب ثالثًا)

ب(٣،٣) ، أ(−١،١) ، حـ(٥،−١) ، ؛(−٥،−٦)

حاول بنفسك

أ ب حـ مثلث فيه : أ(٣ ، ٢) ، ب(٢ ، −١) ، حـ(−٤ ، ١)

١ أثبت أن : $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{ب حـ}$ ٢ أوجد : مساحة Δ أ ب حـ

ملاحظة

فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يمثلان ضلعان متجاوران

فى متوازى الإضلاع فإن : $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ ، $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

يمثلان قطرى متوازى الأضلاع وبالتالى يكون



$\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \| = \| \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} \|$ إذا كان الشكل مستطيل أى أن $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

تمـارين 3 على العمليات على المتجهات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ...

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٢ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، -٤)

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

(أ) (١ ، -٧) (ب) (٧ ، ٣) (جـ) (-١ ، ٧) (د) (٣ ، ٧)

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ب = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ...

(أ) ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ (ب) -٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ (د) ٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٧ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ($٥\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) $\sqrt{٢٩}$

(٦) $\overrightarrow{\text{أب}}$ - $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و}}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ص}}$ فإن : $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|$ = ...

(أ) ٦ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ = (-٣ ، ٥) فإن : $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ...

(أ) (٥ ، -٢) (ب) (-٨ ، ١) (جـ) (-٢ ، ٥) (د) (٢ ، ٥)

(٩) إذا كان : أ(٢ ، ٣) ، ب(٥ ، ٦) فإن إحداثي نقطة حـ حيث ٢ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ هو ....

(أ) (-٣ ، ٤) (ب) (-٣ ، -٤) (جـ) (٣ ، -٤) (د) (٣ ، ٤)

(١٠) إذا كان : ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (-٣ ، ١٠) فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ...

(أ) (٢ ، -١) (ب) (-١ ، ٢) (جـ) (٢ ، -٣) (د) (-٢ ، ٣)

(١١) إذا كان : أ = (٣ ، −٥) ، ب = (−١ ، ٥) وكان : $\overrightarrow{م}$ = (٦ ، ك) وكان $\overrightarrow{أب}$ // $\overrightarrow{م}$

فإن : ك = ...

(أ) −١٥ (ب) −١٠ (جـ) −٥ (د) ٥

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، ٦) ، $\overrightarrow{أحـ}$ = (−٢ ، ٩) فإن : ‖$\overrightarrow{بحـ}$‖ = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٣) إذا كانت : م منتصف $\overline{سص}$ فإن : $\overrightarrow{سم}$ + $\overrightarrow{صم}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{سم}$ (ب) $\overrightarrow{سص}$ (جـ) $\overrightarrow{و}$ (د) $\overrightarrow{صس}$

(١٤) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{حـأ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{و}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(١٥) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{أحـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{و}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(١٦) إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{حـء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{أحـ}$ (ب) $\overrightarrow{أء}$ (جـ) $\overrightarrow{و}$ (د) ٢ $\overrightarrow{أء}$

(١٧) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\overrightarrow{بأ}$ − $\overrightarrow{بحـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{حـب}$ (جـ) $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(١٨) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإن : $\overrightarrow{أب}$ − $\overrightarrow{حـء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{حـء}$ (ب) $\overrightarrow{و}$ (جـ) −٢ $\overrightarrow{أب}$ (د) ٢ $\overrightarrow{أب}$

(١٩) أى مما يأتى يكافئ المتجه الصفرى ....

(أ) $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{حـء}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{حـء}$ − $\overrightarrow{ءك}$ − $\overrightarrow{كحـ}$

(جـ) $\overrightarrow{كى}$ − $\overrightarrow{كء}$ − $\overrightarrow{ىء}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$ − $\overrightarrow{أن}$ − $\overrightarrow{حـن}$

(٢٠) أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، $\overline{أحـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = {م} فإن : $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{أء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{حـأ}$ (ب) $\overrightarrow{بء}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{مـحـ}$ (د) ٢ $\overrightarrow{ءم}$

(٢١) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع قطراه متقاطعان فى م

فإن جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{أحـ}$ عدا العبارة ....

(أ) $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بء}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{أم}$ (جـ) $\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ءحـ}$ (د) $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{ءحـ}$

(٢٢) فى المثلث أ ب حـ : إذا كانت ء منتصف $\overline{بحـ}$ فإن : $\overrightarrow{بأ}$ + $\overrightarrow{حـأ}$ + $\overrightarrow{أء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{ءأ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{ءأ}$ (د) $\overrightarrow{حـب}$

(٢٣) في متوازي الأضلاع المرسوم أمامك

$\overrightarrow{\text{وم}} + \overrightarrow{\text{ون}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب}}$

(جـ) $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$) (د) $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$)

(٢٤) إذا كان : أ ب حـ ء مستطيل فإن : $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{بء}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{حـء}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{بأ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{بحـ}}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{حـء}}$ حيث $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٦ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (−١ ، ٣) فإن : $\overrightarrow{\text{ء}}$ = ...

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (−٥ ، −٧) (جـ) (−٥ ، ٧) (د) (٧ ، ٧)

(٢٦) أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ = (٧ ، −٢) ، ب = (١٥ ، ٤) ، حـ = (٩ ، ٦)

فإن نقطة ء = ...

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (٠ ، −١)

(٢٧) إذا كان : أ ب حـ ء هـ شكل خماسي فإن : $\overrightarrow{\text{ءهـ}} + \overrightarrow{\text{هـأ}} - \overrightarrow{\text{بأ}}$ = ...

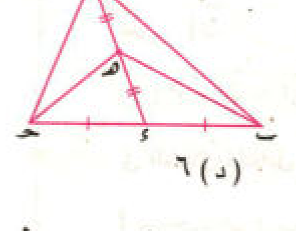
(أ) $\overrightarrow{\text{ءب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أء}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{حـهـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{بء}}$

(٢٨) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ فإن : ....

(أ) Δ أ ب حـ قائم الزاوية. (ب) ب منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{حـب}}$ (د) حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$


(٢٩) في الشكل المقابل :

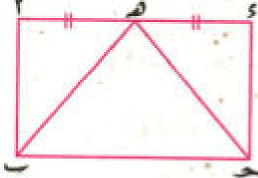


أ ب حـ مثلث ، إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أء}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ... $\overrightarrow{\text{أهـ}}$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٦

(٣٠) في الشكل المقابل :



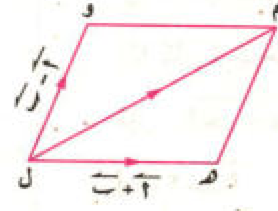
أ ب حـ ء مستطيل ، هـ منتصف $\overline{\text{أء}}$

، $\overrightarrow{\text{هـب}} + \overrightarrow{\text{بأ}} - \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{هـب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{بهـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{هـحـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{حـهـ}}$

(٣١) في الشكل المقابل :

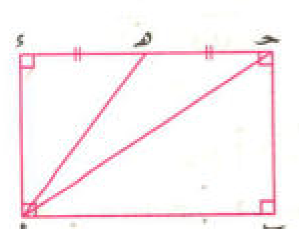
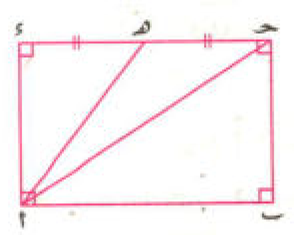
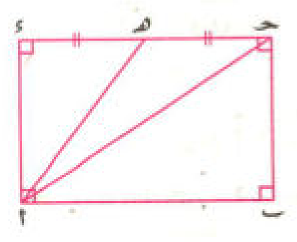
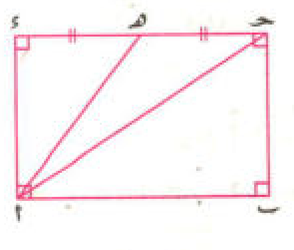


$\overrightarrow{\text{لم}}$ متجه يمثل ....

(أ) ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$

(جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

(٣٢) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه : هـ منتصف $\overline{حـ ء}$ فإن :

أولًا : $\overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{ءهـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{أب}$ (ب) $\overrightarrow{أحـ}$

(جـ) ٢ $\overrightarrow{أء}$ (د) $\overrightarrow{حـ أ}$

ثانيًا : $\overrightarrow{أء}$ − ٢ $\overrightarrow{أهـ}$ + $\overrightarrow{أب}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{أء}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{حـ ب}$ (جـ) $\overrightarrow{حـ ب}$ (د) ٢ $\overrightarrow{أء}$



(٣٣) أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{ب حـ}$ فإذا كان : $\overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{حـ ب} + \overrightarrow{ء ب}$ = ك $\overrightarrow{أب}$

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



(٣٤) في △ أ ب حـ إذا كان : ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب وكان $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{ن}$



فإن : $\overrightarrow{ءهـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن}$ (ب) $\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$) (د) − $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$)

(٣٥) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{ن}$ ، $\overrightarrow{حـ ء} = \overrightarrow{ك}$

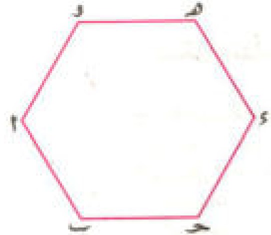
فإن : $\overrightarrow{أهـ}$ = ... (بدلالة $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ ، $\overrightarrow{ك}$)



(أ) $\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن} + \overrightarrow{ك}$ (ب) $\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن} + \overrightarrow{ك}$ (جـ) $\overrightarrow{ن} + \overrightarrow{ك}$ (د) $\overrightarrow{ك} - \overrightarrow{م}$



(٣٦) في الشكل المقابل :



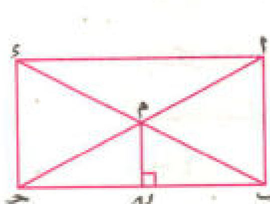
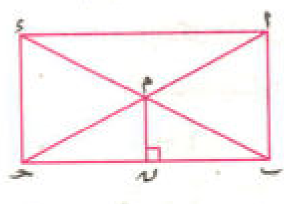
أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم فإن :

($\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{حـ ب}$) + $\overrightarrow{أو} + \overrightarrow{ءهـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{وهـ}$ (ب) $\overrightarrow{أهـ}$

(جـ) $\overrightarrow{أء}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$

(٣٧) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ ء مستطيل ، $\overline{م ن} \perp \overline{ب حـ}$

فإن : $\overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{ء ب}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{ب أ}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{أء}$

(جـ) ٤ $\overrightarrow{م ن}$ (د) $\overrightarrow{صفر}$

(٣٨) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، وكان : $\overleftrightarrow{\text{ء و}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ب}} = \{\text{هـ}\}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ء و}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أ و}} + \overrightarrow{\text{ب و}}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{و هـ}}$ (د) ٢ $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$

(٣٩) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} =$ ك $\overrightarrow{\text{ص س}}$

فإن قيمة : ك = ... حيث ك ∈ ح

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(٤٠) إذا كان : أ = (٢ ، ٢) ، ب = (٤ ، -٢) ، حـ = (-٢ ، ٠) ، ء = (١ ، ك)

وكان : $\overrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overrightarrow{\text{حـ ب}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) ٢

(٤١) إذا كان أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، أ(١ ، ٢) ، ب(س ، -٣) ، حـ(-٣ ، ٥) ، ء(-٧ ، ص)

فإن : $\overrightarrow{\text{ب ء}} =$ ....

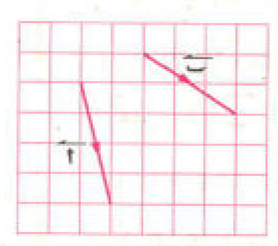
(أ) (-٢ ، ٧) (ب) (-١٢ ، -١٣) (جـ) (٤ ، -٣) (د) (-١٢ ، ١٣)

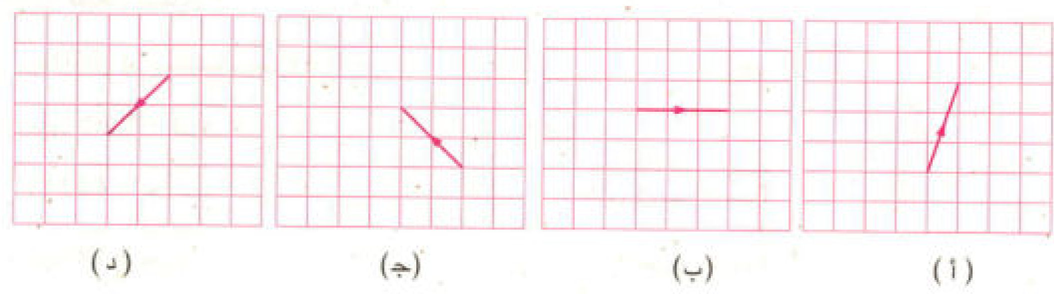
(٤٢) إذا كانت : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (-١ ، م) ، $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\| = ٤$ وحدة طول فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) -١ (د) -٥

(٤٣) الشكل المقابل يمثل متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

أي الأشكال الآتية يمثل المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ ؟





(٤٤) فى الشكل المقابل :

$\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ} \| = $ ....

(حيث طول كل ضلع فى شبكة المربعات يمثل وحدة الأطوال)

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٥ (د) ٤



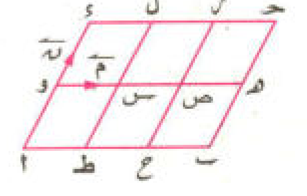
(٤٥) الشكل المقابل يوضح متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ، $\overrightarrow{ء}$

أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{جـ}$ (ب) $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$

(جـ) $\overrightarrow{ء} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$ (د) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ء} = ٢\overrightarrow{ب}$

(٤٦) فى الشكل المقابل ستة متوازيات أضلاع متطابقة :



إذا كان : $\overrightarrow{وس} = \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{وء} = \overrightarrow{ن}$

فإن : $\overrightarrow{ءع} = $ .... (بدلالة $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$)

(أ) $\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن}$ (ب) $٢\overrightarrow{م} + ٢\overrightarrow{ن}$

(جـ) $٢\overrightarrow{م} - ٢\overrightarrow{ن}$ (د) $٢\overrightarrow{ن} - ٢\overrightarrow{م}$

(٤٧) فى الشكل المقابل :

أبجـء متوازى أضلاع ، س منتصف $\overline{أب}$



فإن : $\overrightarrow{هـس} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٢} (\overrightarrow{ن} + ٢\overrightarrow{ص})$ (ب) $\frac{١}{٢} (٢\overrightarrow{ن} - \overrightarrow{ص})$

(جـ) $\frac{١}{٢} (\overrightarrow{ص} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ن})$ (د) $\frac{٢}{٣} (\overrightarrow{ن} - ٢\overrightarrow{ص})$

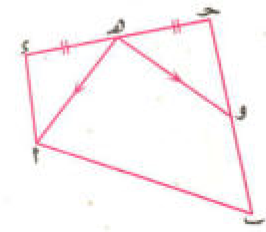
(٤٨) إذا كان $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أبجـ حيث أ (٩ ، ٦) ، ء (-١ ، ٠)

فإن : $\| \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} \| = $ .... وحدة طول.

(أ) $٢\sqrt{٣٤}$ (ب) $٤\sqrt{٣٤}$ (جـ) $٨\sqrt{١٧}$ (د) $١٠\sqrt{١٧}$



(٤٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان هـ منتصف $\overline{جـء}$

فإن : $\overrightarrow{هـأ} + \overrightarrow{هـو} = $ ....

(أ) $\overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{جـب}$ (ب) $\overrightarrow{وب} + \overrightarrow{بأ}$

(جـ) $\overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{جـو}$ (د) $\overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{بأ}$

(٥٠) إذا كان أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م فإن : $\overrightarrow{م حـ} + \overrightarrow{م ب} = \dots\dots\dots$

(أ) $\overrightarrow{حـ ء}$ (ب) $\overrightarrow{أ ب}$ (جـ) $\overrightarrow{ب أ}$ (د) $\overrightarrow{حـ ب}$

(٥١) فى الشكل المقابل :

إذا كان م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : $\overrightarrow{م أ} + ٢ \overrightarrow{م ب} = \dots\dots\dots$

(أ) $\overrightarrow{أ حـ}$ (ب) $\overrightarrow{أ ب}$

(جـ) $\overrightarrow{صفر}$ (د) $\overrightarrow{حـ ب}$

(٥٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان و أ ب حـ مستطيل

فإن : $\| \overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{ء هـ} \| = \dots\dots\dots$

(أ) $\sqrt{١٧}$ (ب) $\sqrt{٢٦}$

(جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤١}$

(٥٣) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع

فإذا كان : $\overrightarrow{حـ أ} = (٧ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ء ب} = (٣ ، -٣)$

فإن : $\overrightarrow{حـ ء} = \dots\dots\dots$

(أ) (٥ ، ٠) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (١٠ ، ٠) (د) (٣ ، ٧)

(٥٤) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء معين تقاطع قطراه فى م

فإذا كان : $\overrightarrow{أ هـ} + \overrightarrow{أ و} = ك (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ء})$

فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٥) فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{ء أ} + \overrightarrow{حـ هـ} + \overrightarrow{ء ب} + \overrightarrow{أ حـ} + \overrightarrow{هـ ب} = \dots\dots\dots$

(أ) $٢ \overrightarrow{ء أ}$ (ب) $٢ \overrightarrow{ء ب}$

(جـ) $٢ \overrightarrow{حـ هـ}$ (د) $٢ \overrightarrow{هـ ب}$

(٥٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان مساحة المربع الكبير = ٤٩ وحدة مساحة

، مساحة المربع الصغير = ٢٥ وحدة مساحة

فإن : أب = ...

(أ) (-١٢ ، ٢) (ب) (-١٢ ، -١٢)

(جـ) (-١٢ ، -٢) (د) (١٢ ، -٢)

(٥٧) فى الشكل المقابل :

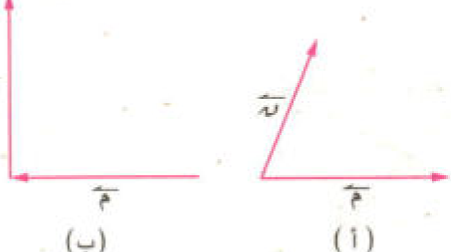
أ ب حـ ء هـ م سداسى منتظم طول ضلعه ٢ وحدة طولية

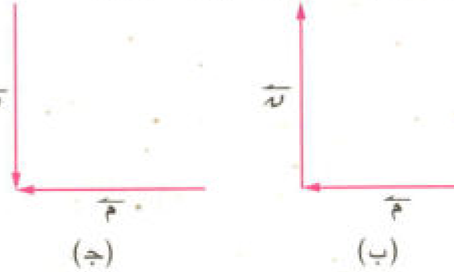
فإن : ‖ م أ + حـ ب + ء هـ ‖ = ... وحدة طول.

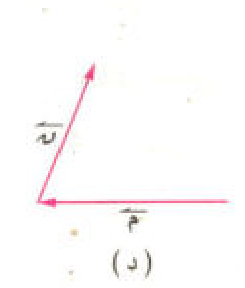
(أ) ٢ (ب) ٢ √٣

(جـ) ٣ √٣ (د) ٤

(٥٨) فى أى من الحالات الآتية يكون : ‖ م + ن ‖ < ‖ م − ن ‖







(أ) (ب) (جـ) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث : أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤) ، ء = (-٢ ، -١)

أوجد : إحداثيى النقطة حـ «(-٥ ، ٣)»

٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ = (س ، ٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، حـ = (٩ ، ١) ، ء = (٧ ، ص)

أوجد قيم : س ، ص ثم أوجد : ‖ أ ب ‖ ، ‖ أ ء ‖ «١ ، -٥ ، ٢ √١٠ ، √٨٥»

٣ فى مستوى إحداثى متعامد إذا كان : أ = (-١ ، -٤) ، ب = (١ ، ١) ، حـ = (٦ ، -١)

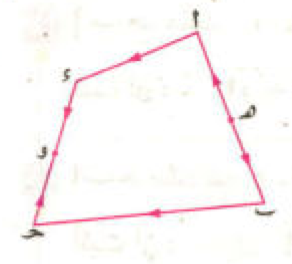
أوجد كلًا من : أ ب ، ب حـ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين ثم أثبت أن : أ ب ⊥ ب حـ

٤ إذا كان : ٢ م + ٢ أ ب = ٢ حـ ب − ب أ أثبت أن : م = حـ أ

٥ فى أى مثلث س ص ع أثبت أن : س ص + ص ع + ع س = ٠



٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي

، هـ $\in \overline{\text{أب}}$ ، و $\in \overline{\text{حـء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{هـب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{حـو}} = \overrightarrow{\text{هـأ}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءو}}$

---

٧ في الشكل الرباعي أ ب حـ ء أثبت أن :

(١) $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{أء}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{حـء}} - \overrightarrow{\text{حـب}} - \overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{و}}$

---

٨ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ءحـ}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{هـو}}$

---

٩ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : $\overrightarrow{\text{بحـ}} = ٣ \overrightarrow{\text{أء}}$

أثبت أن : (١) أ ب حـ ء شبه منحرف.

(٢) $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = ٤ \overrightarrow{\text{أء}}$

---

١٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ، $\frac{\text{أء}}{\text{بحـ}} = \frac{٢}{٣}$ أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = \frac{٥}{٢} \overrightarrow{\text{أء}}$

---

١١ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : $٢ \overrightarrow{\text{بحـ}} = ٥ \overrightarrow{\text{أء}}$

أثبت أن : (١) $٢ \overrightarrow{\text{أحـ}} + ٢ \overrightarrow{\text{بء}} = ٧ \overrightarrow{\text{أء}}$

(٢) $٢ \overrightarrow{\text{أب}} - ٢ \overrightarrow{\text{ءحـ}} = ٣ \overrightarrow{\text{ءأ}}$

---

١٢ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، ن نقطة خارجة عنه

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢ \overrightarrow{\text{أب}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{أحـ}} - \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢ \overrightarrow{\text{بحـ}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـم}} = \overrightarrow{٠}$

(٤) $\overrightarrow{\text{نأ}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} = \overrightarrow{\text{نب}} + \overrightarrow{\text{نء}}$

(٥) $\overrightarrow{\text{نأ}} + \overrightarrow{\text{نب}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} + \overrightarrow{\text{نء}} = ٤ \overrightarrow{\text{نم}}$

(٦) $\overrightarrow{\text{أن}} + \overrightarrow{\text{بن}} + \overrightarrow{\text{نء}} + \overrightarrow{\text{نحـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أء}}$

---

١٣ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : هـ منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أهـ}}$

---

١٤ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : س منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{بء}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{حـب}} + \overrightarrow{\text{حـء}} = ٤ \overrightarrow{\text{س ص}}$

---

١٥ س ص ع مثلث ، ل $\in \overline{\text{ص ع}}$ بحيث ص ل : ل ع = ٥ : ٣ أثبت أن : $٥ \overrightarrow{\text{س ع}} + ٣ \overrightarrow{\text{س ص}} = ٨ \overrightarrow{\text{س ل}}$

---

١٦ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ ، ط نقطة خارج المثلث

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{طأ}} + \overrightarrow{\text{طب}} + \overrightarrow{\text{طحـ}} = ٣ \overrightarrow{\text{طم}}$

١٧ أ ب ﺟ مثلث ، ء منتصف $\overline{ب ﺟ}$ ، ﻫ منتصف $\overline{أ ﺟ}$ ، و منتصف $\overline{أ ب}$

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{أ و} + \overrightarrow{أ ﻫ} = \overrightarrow{أ ء}$ (٢) $\overrightarrow{أ و} - \overrightarrow{أ ﻫ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ﺟ ب}$ (٣) $\overrightarrow{ﺟ و} + \overrightarrow{ﻫ ب} = ٣\overrightarrow{ﻫ و}$

---

١٨ أ ب ﺟ مثلث فيه : ء ، ﻫ ، و منتصفات الأضلاع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ﺟ}$ ، $\overline{ﺟ أ}$ على الترتيب ، م هى نقطة تقاطع متوسطاته

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{أ ﻫ} + \overrightarrow{ب و} = \overrightarrow{ء ﺟ}$ (٢) $\overrightarrow{م أ} + \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م ﺟ} = \overrightarrow{م ء} + \overrightarrow{م ﻫ} + \overrightarrow{م و}$

---

١٩ أ ب ﺟ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، ﻫ منتصف $\overline{أ ﺟ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{أ ﻫ} + \overrightarrow{ﺟ ء} = \overrightarrow{ﻫ ب} + \overrightarrow{ء أ}$

---

٢٠ أ ب ﺟ مثلث ، ء ∈ $\overline{ب ﺟ}$ ، ﻫ ∈ $\overline{ب ﺟ}$ بحيث : ب ء = ﺟ ﻫ أثبت أن : $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ﺟ} = \overrightarrow{أ ء} + \overrightarrow{أ ﻫ}$

---

٢١ إذا كان : أ = (٣ ، ١) ، ب = (١ ، ٤) ، ﺟ = (-١ ، -٥) أوجد : ن

بحيث : $\overrightarrow{ن أ} + \overrightarrow{ن ب} + \overrightarrow{ن ﺟ} = \overrightarrow{و}$ «(١ ، ٠)»

---

٢٢ أ ب ﺟ ء شكل رباعى إذا كان : $\overrightarrow{أ ب}$ = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب ﺟ}$ = (-٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{ء ﺟ}$ = (٥ ، -١)

أوجد المتجه الذى تمثله $\overrightarrow{أ ء}$ وإذا كانت : ب = (-١ ، ٣) أوجد إحداثيات : أ ، ﺟ ، ء

---

٢٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ ب}$ = (١ ، -٤) ، أ = (٢ ، ٣) ، ﺟ = (-١ ، ١٥)

أوجد قيمتى : ل ، م إذا كان : ل $\overrightarrow{أ}$ - م $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ﺟ}$ «٤ ، ٣»

---

٢٤ إذا كان : أ ب ﺟ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث : أ = (٢ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٢)

، ﺟ = (-٥ ، ٥ - س) أوجد قيمة : س «-١»

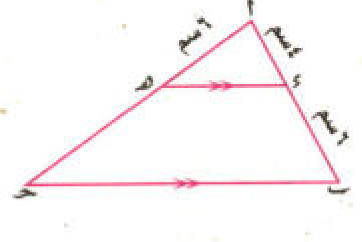
---

٢٥ إذا كان : أ ب ﺟ ء مستطيل فيه : أ = (٥ ، ١) ، ب = (٢ ، -٢) ، ﺟ = (-٣ ، ك)

فأوجد قيمة ك ، ثم أوجد إحداثيى النقطة ء «٣ ، (٠ ، ٦)»

---

٢٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{ء ﻫ}$ // $\overline{ب ﺟ}$

أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن العددية إذا كان :

(١) $\overrightarrow{ب ء}$ = ك $\overrightarrow{ء أ}$ (٢) $\overrightarrow{ﺟ ﻫ}$ = ل $\overrightarrow{ﺟ أ}$

(٣) $\overrightarrow{ب ﺟ}$ = م $\overrightarrow{ﻫ ء}$ (٤) $\overrightarrow{أ ء} + \overrightarrow{ء ﻫ}$ = ن $\overrightarrow{أ ﺟ}$

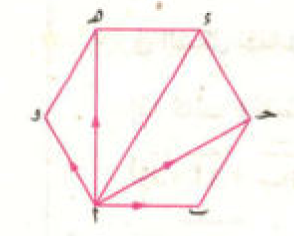
«$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$»

---

٢٧ إذا كان : أ ب ﺟ ء ﻫ ن مسدس منتظم مركزه و ،

فأثبت أن : $\overrightarrow{و أ} + \overrightarrow{و ب} + \overrightarrow{و ﺟ} + \overrightarrow{و ء} + \overrightarrow{و ﻫ} + \overrightarrow{و ن} = \overrightarrow{و}$

٢٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم

أثبت أن :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{أهـ} + \overrightarrow{أو} = ٢ \overrightarrow{أء}$

---

٢٩ في مستوى إحداثي متعامد $\overrightarrow{أب} = (-٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{حـب} = (-٦ ، -٤)$ ، $٢ \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أحـ} = (٦ ، ١١)$

أوجد : (١) إحداثيي كل من النقط : أ ، ب ، حـ

(٢) مساحة سطح المثلث أ ب حـ باستخدام المتجهات. «١٣»

---

٣٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه :

أ = (-٢ ، -٣) ، ب = (٤ ، -١) ، حـ = (٢ ، ٥) ، ء = (-١ ، ك)

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أب} // \overrightarrow{ءحـ}$ أوجد قيمة : ك   (٢) أثبت أن : $\overrightarrow{حـب} \perp \overrightarrow{أب}$

(٣) أوجد : مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء «٤ ، ٣٠»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ .... $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $\leq$ (د) $\geq$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{حـ}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.   (ب) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متكافئان.

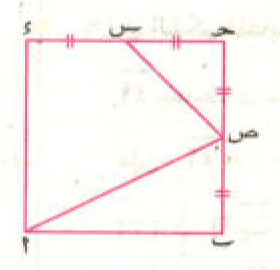
(جـ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان.   (د) $\overrightarrow{حـ}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متكافئان.

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان.   (د) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.

(٤) في الشكل المقابل :



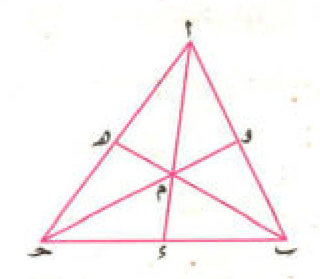
أ ب حـ ء مربع وكان : $\overrightarrow{أص} + \overrightarrow{سص} = ك \overrightarrow{سحـ}$

فإن : ك = ...

(أ) ١   (ب) ٢

(جـ) ٣   (د) ٤

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ فإن :

أولًا : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ب هـ}} + \overrightarrow{\text{حـ و}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{صفر}}$

(جـ) ٢ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م حـ}}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{م ء}} + \overrightarrow{\text{م هـ}}$ (ب) ٣ $\overrightarrow{\text{م أ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ أ}}$ (د) $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$)

ثالثًا : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ م}}$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) إذا كان : أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه (م) وكان : $\overrightarrow{\text{ء ب}} + \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{ء و}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ء م}}$

فإن : ك = ...

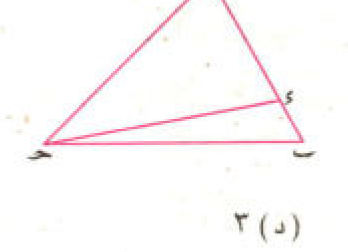
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٧) إذا كان مجموع متجهى وحدة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ هو أيضًا متجه وحدة $\overrightarrow{\text{حـ}}$ أى $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{حـ}}$

فإن معيار الفرق بينهما $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $\sqrt{3}$ (د) ٢

(٨) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، ء $\in \overline{\text{أ ب}}$ ، إذا كان : أ ء = ٣ ء ب

وكان : $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + م $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$

فإن : ك + م = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) فى الشكل المقابل :

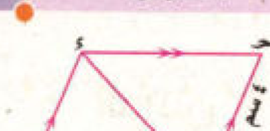
$\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ وكان أ ب = ٢ أ حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}$) (ب) $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$)

(جـ) $\frac{1}{2}$ (٣ $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$) (د) $\frac{1}{2}$ (٢ $\overrightarrow{\text{أ حـ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}}$)





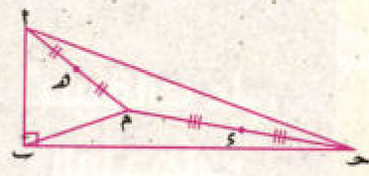
(١٠) في الشكل المقابل :

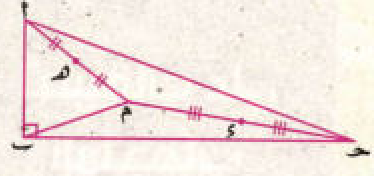
إذا كان أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه :

ب و = ٢ سم ، و حـ = ٤ سم فإن : $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (ب) $\frac{1}{4}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{3}{4}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$

(جـ) $\frac{2}{3}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{1}{3}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (د) $\frac{3}{4}$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\frac{1}{4}$ $\overrightarrow{\text{أء}}$





(١١) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ حـ = ٢٤ سم

وكانت م هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب حـ

فإن : ‖ $\overrightarrow{\text{م ب}}$ + $\overrightarrow{\text{م ء}}$ + $\overrightarrow{\text{م هـ}}$ ‖ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت : م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{م س}}$ + $\overrightarrow{\text{م ص}}$ + $\overrightarrow{\text{م ع}}$ = ...

(أ) ٣ $\overrightarrow{\text{ع ب}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{ص حـ}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (د) ٥ $\overrightarrow{\text{أ س}}$



(١٣) في الشكل المقابل :

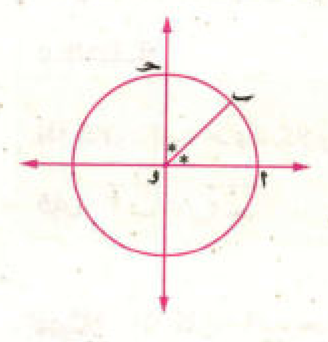


دائرة مركزها «و» إذا كان $\overrightarrow{\text{و ب}}$ ينصف ∠ أ و حـ

فإن : $\overrightarrow{\text{و أ}}$ + $\overrightarrow{\text{و ب}}$ + $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ = ...

(أ) $\sqrt{2}$ $\overrightarrow{\text{و ب}}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{\text{و ب}}$

(جـ) $(\sqrt{2} + 1)$ $\overrightarrow{\text{و ب}}$ (د) ٣ $\overrightarrow{\text{و ب}}$



٢ أ ب حـ ء شكل رباعي ، س ، ص ، ع ، ن منتصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ على الترتيب.

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ = ٢ $(\overrightarrow{\text{ع س}} + \overrightarrow{\text{ن ص}})$



الدرس

4

تطبيقات على المتجهات

أولًا تطبيقات هندسية

نعلم أنه إذا كان : $\overrightarrow{أب} = ك \overrightarrow{ءح}$ ، $ك \neq 0$ **فإن :** $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ءح}$:

- يحملهما مستقيم واحد. **أى أن** أ ، ب ، ح ، ء على استقامة واحدة

أو

- يحملهما مستقيمان متوازيان. **أى أن** $\overline{أب} // \overline{ءح}$

ملاحظة

إذا كان : أ ب ح ء شكلًا رباعيًا فيه : $\overrightarrow{أب} = ك \overrightarrow{ءح}$ ، $ك \neq 0$

فإن : $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{ءح}$ ، $\| \overrightarrow{أب} \| = |ك| \, \| \overrightarrow{ءح} \|$ والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان : أ ب ح ء شكلًا رباعيًا فيه : $\overrightarrow{أب} = -3 \overrightarrow{حء}$

فإن : $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{حء}$ ، أ ب = 3 ح ء

وبالتالى يمكن استخدام المتجهات لإثبات بعض النظريات والعلاقات الهندسية كما يلى :

مثال 1

باستخدام المتجهات أثبت أنه : إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين ومتوازيين أيضًا أى أن الشكل يكون متوازى أضلاع.

الحـل

المعطيات في الشكل أ ب جـ ء : $\overline{أب} // \overline{ءجـ}$ ، أب = ءجـ

المطلوب $\overline{بجـ} // \overline{أء}$ ، بجـ = أء

العمل ارسم $\overline{أجـ}$

البرهان ∵ أب = ءجـ ، $\overline{أب} // \overline{ءجـ}$ ∴ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ءجـ}$

في Δ أ ب جـ : $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بجـ}$ (تعريف الجمع)

في Δ أ ء جـ : $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{أء} + \overleftarrow{ءجـ}$ (تعريف الجمع)

∵ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ءجـ}$ ∴ $\overleftarrow{بجـ} = \overleftarrow{أء}$

ويكون : $\overline{بجـ} // \overline{أء}$ ، بجـ = أء ∴ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع.

مثال ٢

باستخدام المتجهات أثبت أن : القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله.

الحـل

المعطيات في Δ أ ب جـ :

ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

المطلوب $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$ ، طول $\overline{ءهـ} = \frac{1}{2}$ طول $\overline{بجـ}$

البرهان ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ أء = $\frac{1}{2}$ أب ، $\overleftarrow{ءأ} = \frac{1}{2} \overleftarrow{بأ}$

، ∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ أهـ = $\frac{1}{2}$ أجـ ، $\overleftarrow{أهـ} = \frac{1}{2} \overleftarrow{أجـ}$

في Δ أ ب جـ : $\overleftarrow{بجـ} = \overleftarrow{بأ} + \overleftarrow{أجـ}$ (تعريف الجمع) (١)

في Δ ء أ هـ : $\overleftarrow{ءهـ} = \overleftarrow{ءأ} + \overleftarrow{أهـ}$ (تعريف الجمع)

$= \frac{1}{2} \overleftarrow{بأ} + \frac{1}{2} \overleftarrow{أجـ} = \frac{1}{2} (\overleftarrow{بأ} + \overleftarrow{أجـ})$ (٢)

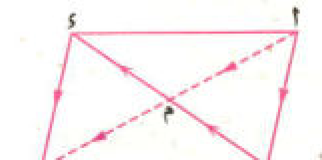
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\overleftarrow{ءهـ} = \frac{1}{2} \overleftarrow{بجـ}$

∴ $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$ ، $\|\overleftarrow{ءهـ}\| = \frac{1}{2} \|\overleftarrow{بجـ}\|$ ∴ طول $\overline{ءهـ} = \frac{1}{2}$ طول $\overline{بجـ}$

مثال ٣

باستخدام المتجهات أثبت أن : قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

الحل



المعطيات أب حـ ء متوازى أضلاع.

المطلوب القطران $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ ينصف كل منهما الآخر.

العمل نفرض أن م نقطة منتصف $\overline{بء}$ ثم ارسم المتجهين : $\overrightarrow{مأ}$ ، $\overrightarrow{محـ}$

البرهان فى Δ أ ب م : $\overrightarrow{مأ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بم}$ ، فى Δ حـ ء م : $\overrightarrow{محـ} = \overrightarrow{مء} + \overrightarrow{ءحـ}$

$\because$ $\overrightarrow{بم} = \overrightarrow{مء}$ عملًا ، $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ءحـ}$ (من متوازى الأضلاع)

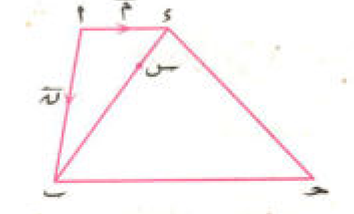
$\therefore$ $\overrightarrow{مأ} = \overrightarrow{محـ}$ $\therefore$ $\overrightarrow{مأ}$ ، $\overrightarrow{محـ}$ لهما نفس الاتجاه وتشتركان فى نقطة م

$\therefore$ أ ، م ، حـ تقع على استقامة واحدة.

، $\|\overrightarrow{مأ}\| = \|\overrightarrow{محـ}\|$ $\therefore$ م منتصف $\overline{أحـ}$ ، م منتصف $\overline{بء}$ عملاً.

$\therefore$ القطران $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ ينصف كل منهما الآخر.

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

أب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء} // \overline{بحـ}$

، بحـ = ٣ أء ، $\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ن}$

١ عبر بدلالة $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ عن كل من : $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{بء}$ ، $\overrightarrow{ءحـ}$

٢ إذا كانت : س $\in$ $\overline{ءب}$ حيث : ءس = $\frac{1}{2}$ س ب

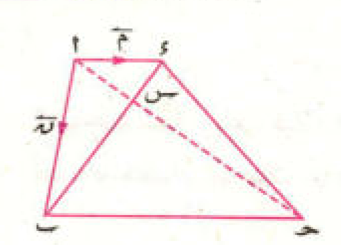
أثبت أن : النقط أ ، س ، حـ تقع على استقامة واحدة.

الحل

١ $\because$ $\overline{أء} // \overline{بحـ}$ ، بحـ = ٣ أء $\therefore$ $\overrightarrow{بحـ} = ٣ \overrightarrow{أء} = ٣ \overrightarrow{م}$

، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{ن} + ٣ \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{بء} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أء} = -\overrightarrow{ن} + \overrightarrow{م} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{ن}$

، $\overrightarrow{ءحـ} = \overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ} = -\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن} + ٣ \overrightarrow{م} = \overrightarrow{ن} + ٢ \overrightarrow{م}$



٢ ∵ ءس = $\frac{1}{2}$ س ب ∴ س ب = ٢ س ء

، ∵ س ∈ $\overline{بء}$ ∴ $\overrightarrow{سب}$ = ٢ $\overrightarrow{ءس}$

فى Δ ب حـ س :

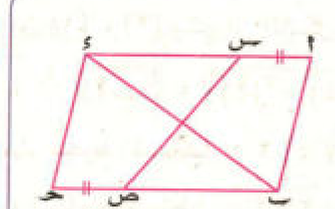
∵ $\overrightarrow{سحـ}$ = $\overrightarrow{سب}$ + $\overrightarrow{بحـ}$ = ٢ $\overrightarrow{ءس}$ + ٢ $\overrightarrow{أء}$ = ٢ ($\overrightarrow{ءس}$ + $\overrightarrow{أء}$)

= ٢ ($\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ءس}$) = ٢ $\overrightarrow{أس}$

∴ $\overrightarrow{سحـ}$ ، $\overrightarrow{أس}$ لهما نفس الاتجاه ومشتركتان فى النقطة س

∴ أ ، س ، حـ تقع على استقامة واحدة.

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ $\overline{أء}$ ، ص ∈ $\overline{بحـ}$

بحيث : أ س = حـ ص

أثبت باستخدام المتجهات أن : $\overline{سص}$ ، $\overline{بء}$ ينصف كل منهما الآخر.

ملاحظات هامة لحل مسائل الأشكال الرباعية

* **لإثبات أن الشكل الرباعى متوازى أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية :**

١ كل ضلعين متقابلين متوازيان.

٢ كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول.

٣ ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان فى الطول.

٤ القطران ينصف كل منهما الآخر.

فمثلًا لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء متوازى أضلاع

نثبت أن : $\overline{بحـ}$ // $\overline{أء}$ ، ب حـ = أ ء **أى نثبت أن :** $\overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{أء}$

* **لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازى أضلاع كما سبق ثم :**

• لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :

١ ضلعان متجاوران فيه متعامدان. **فمثلًا :** $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بحـ}$

٢ القطران متساويان فى الطول. **فمثلًا :** $\|\overrightarrow{أحـ}\| = \|\overrightarrow{بء}\|$

• لإثبات أن متوازى الأضلاع هو معين نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :

٣ ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول. **فمثلًا :** $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{بحـ}\|$

٤ القطران متعامدان. **فمثلًا :** $\overrightarrow{أحـ} \perp \overrightarrow{بء}$

• لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مربع نثبت إحدى خواص المستطيل وإحدى خواص المعين معًا.

مثال ٥

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ = (٠ ، ١) ، ب = (٤ ، ٥) ، حـ = (١ ، ٨) ، ء = (-٣ ، ٤)
أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل أ ب حـ ء مستطيل ثم أوجد محيطه ومساحته.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٥) − (٠ ، ١) = (٤ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (١ ، ٨) − (-٣ ، ٤) = (٤ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ الشكل متوازى أضلاع. (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٨) − (٤ ، ٥) = (-٣ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ لأن : [(٤ × (-٣) + ٤ × ٣ = صفر] (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ ب حـ ء مستطيل

، ∵ ‖$\overrightarrow{\text{أب}}$‖ = $\sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ ، ‖$\overrightarrow{\text{ب حـ}}$‖ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ محيط المستطيل = ٢ (٤ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٢}$) = ١٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

، مساحة المستطيل = ٤ $\sqrt{٢}$ × ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة.

مثال ٦

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ = (٥ ، ٣) ، ب = (٣ ، -٢) ، حـ = (-٢ ، -٤) ، ء = (٠ ، ١)
أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل معين ثم أوجد مساحته.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -٢) − (٥ ، ٣) = (-٢ ، -٥)

، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (-٢ ، -٤) − (٠ ، ١) = (-٢ ، -٥)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ الشكل متوازى أضلاع. (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = $\overrightarrow{\text{حـ}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢ ، -٤) − (٥ ، ٣) = (-٧ ، -٧)

، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ء}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ١) − (٣ ، -٢) = (-٣ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ لأن : [(-٧) (-٣) + (-٧) (٣) = صفر] (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : الشكل أ ب حـ ء معين

، ∵ ‖$\overrightarrow{\text{أحـ}}$‖ = $\sqrt{(-٧)^٢ + (-٧)^٢}$ = ٧ $\sqrt{٢}$ ، ∵ ‖$\overrightarrow{\text{ب ء}}$‖ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولى القطرين = $\frac{١}{٢}$ × ٧ $\sqrt{٢}$ × ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢١ وحدة مربعة.

حاول بنفسك

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ = (-١ ، ٤) ، ب = (١ ، ١) ، حـ = (-١ ، -٢) ، ء = (-٣ ، ١)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل أ ب حـ ء معين ثم أوجد محيطه ومساحته.

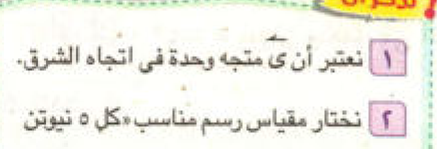
ثانيًا / تطبيقات فيزيائية

١ القوة المحصلة

* **القوة :** هى متجه يتميز بأنه يمر بنقطة معلومة وتعمل فى خط مستقيم.

* تمثل القوة بقطعة مستقيمة موجهة وترسم بمقياس رسم مناسب.





١ نعتبر أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الشرق.

٢ نختار مقياس رسم مناسب «كل ٥ نيوتن تمثل على الرسم بـ ١ سم»

فمثلًا

١ قوة مقدارها $ق_١$ = ١٠ نيوتن فى اتجاه الشرق

$\overleftarrow{ق_١} = ١٠ \overleftarrow{ى}$

$ق_١ = ١٠$

«تمثل بقطعة مستقيمة موجهة طولها ٢ سم»

٢ قوة مقدارها $ق_٢$ = ١٥ نيوتن فى اتجاه الغرب

$\overleftarrow{ق_٢} = -١٥ \overleftarrow{ى}$

$ق_٢ = ١٥$

«تمثل بقطعة مستقيمة موجهة طولها ٣ سم»

* **قوة الاحتكاك (ك) :** هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن وهى دائمًا فى عكس الاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه.

قوة الدفع

قوة الاحتكاك

* إذا كانت قوة دفع الجسم > قوة الاحتكاك «يتحرك الجسم»
* إذا كانت قوة دفع الجسم < قوة الاحتكاك «يظل الجسم ثابت»

القوة المحصلة ($\overleftarrow{ق}$)

القوى المؤثرة على جسم تخضع لعملية جمع المتجهات ويعرف ناتج هذه العملية بمحصلة القوى ($\overleftarrow{ق}$) (أو القوة المحصلة) حيث أن : $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \cdots$

فمثلًا

١ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق_١}$ مقدارها ٨ نيوتن فى اتجاه الشرق ثم أثرت قوة إضافية $\overleftarrow{ق_٢}$ مقدارها ٤ نيوتن فى اتجاه الشرق أيضًا.

$\overleftarrow{ق_١} = ٨\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٤\overleftarrow{ى}$

* اعتبر أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الشرق

∴ $\overleftarrow{ق_١} = ٨ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٤ \overleftarrow{ى}$ ∴ القوة المحصلة $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ٨ \overleftarrow{ى} + ٤ \overleftarrow{ى} = ١٢ \overleftarrow{ى}$

أى أن $ق$ = ٥ نيوتن وتعمل فى اتجاه حركة الجسم

٢ عند محاولة تحريك جسم بقوة $\overrightarrow{ق_١}$ مقدارها ١٢ نيوتن وكان مقدار قوة الاحتكاك عندئذ ٧ نيوتن

* اعتبر أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم

$\overrightarrow{ى}$
$\overrightarrow{ق_١} = ١٢\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ك} = -٧\overrightarrow{ى}$

∴ قوة الدفع $\overrightarrow{ق_١} = ١٢\ \overrightarrow{ى}$

، قوة الاحتكاك : $\overrightarrow{ك} = -٧\ \overrightarrow{ى}$

∴ القوة المحصلة : $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ك} = ١٢\ \overrightarrow{ى} - ٧\ \overrightarrow{ى} = ٥\ \overrightarrow{ى}$

أى أن $ق = ٥$ نيوتن وتعمل فى اتجاه حركة الجسم

ملاحظة

تقاس القوة بوحدات : الداين - النيوتن - ثقل جرام (ث جم) - ثقل كيلوجرام (ث كجم)

مثال ٧

إذا أثرت القوى : $\overrightarrow{ق_١} = ٥\ \overrightarrow{س} + ٢\ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٢\ \overrightarrow{س} + ٧\ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٣\ \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$

فى نقطة مادية. احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى (القوى مقاسة بالنيوتن)

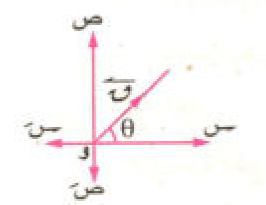
الحل

∵ محصلة القوى $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣}$

∴ $\overrightarrow{ق} = (٥ - ٢ + ٣)\ \overrightarrow{س} + (٢ + ٧ - ١)\ \overrightarrow{ص} = ٦\ \overrightarrow{س} + ٨\ \overrightarrow{ص}$

∴ مقدار المحصلة $= \|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢} = ١٠$ نيوتن

، اتجاه المحصلة $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{٨}{٦}\right) \approx ٥٣^\circ$

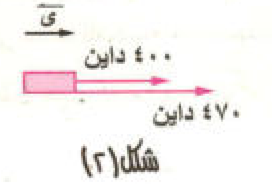


مثال ٨

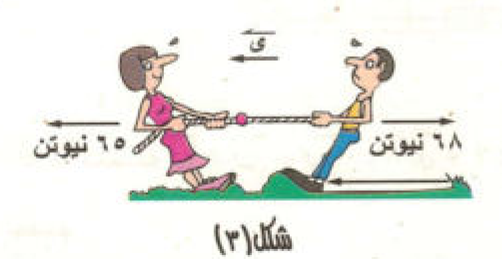
اكتب بدلالة متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ محصلة القوى الموضحة بكل مما يأتى :

ى
١٤ ث كجم
٣٠ ث كجم

شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)



شكل(٤)

الحـــل

شكل (١) : $\overline{٣٠ ى} - \overline{١٤ ى} = \overline{١٦ ى}$ شكل (٢) : $\overline{٤٧٠ ى} + \overline{٤٠٠ ى} = \overline{٨٧٠ ى}$

شكل (٣) : $\overline{٦٥ ى} - \overline{٦٨ ى} = \overline{-٣ ى}$ شكل (٤) : $\overline{١٢٠ ى} - \overline{٧٥ ى} = \overline{٤٥ ى}$

ملاحظتان

١ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين فإن القوة المحصلة $(\overline{ح}) = \overline{٠}$

٢ إذا كانت محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = $\overline{٠}$ هذا يعنى أن مجموعة هذه القوى متزنة.

مثـــال ٩

إذا كانت : $\overline{ق_١} = (٥ ، -٣)$ ، $\overline{ق_٢} = أ\overline{س} - ٢\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = (-٧ ، ب)$ تؤثر فى نقطة مادية

أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت :

١ محصلة القوى = $\overline{س} - ٤\overline{ص}$ ٢ مجموعة القوى متزنة.

الحـــل

$\because \overline{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢} + \overline{ق_٣} = (٥\overline{س} - ٣\overline{ص}) + (أ\overline{س} - ٢\overline{ص}) + (-٧\overline{س} + ب\overline{ص})$

$= (٥ + أ - ٧)\overline{س} + (-٣ - ٢ + ب)\overline{ص}$

١ $\because \overline{ح} = \overline{س} - ٤\overline{ص}$

$\therefore (٥ + أ - ٧)\overline{س} + (-٣ - ٢ + ب)\overline{ص} = \overline{س} - ٤\overline{ص}$

$\therefore ٥ + أ - ٧ = ١$ $\therefore أ = ٣$

، $-٣ - ٢ + ب = -٤$ $\therefore ب = ١$

٢ $\because$ المجموعة متزنة $\therefore \overline{ح} = \overline{٠}$

$\therefore (٥ + أ - ٧)\overline{س} + (-٣ - ٢ + ب)\overline{ص} = \overline{٠}$

$\therefore ٥ + أ - ٧ = ٠$ $\therefore أ = ٢$

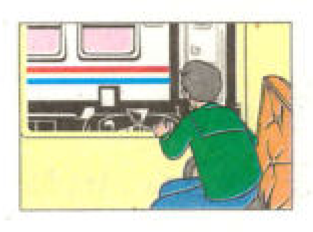
، $-٣ - ٢ + ب = ٠$ $\therefore ب = ٥$

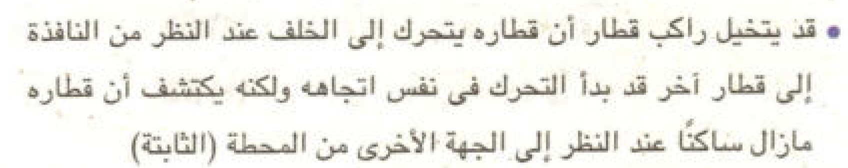
حاول بنفسك

إذا أثرت القوى $\overline{ق_١} = ٥\overline{س} + ١٩\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = ٦\overline{س} - ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = -٤\overline{س} + ٨\overline{ص}$

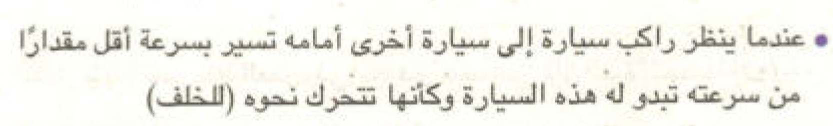
فى نقطة مادية احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى (القوى مقاسة بالداين).

٢ السرعة النسبية





- قد يتخيل راكب قطار أن قطاره يتحرك إلى الخلف عند النظر من النافذة إلى قطار آخر قد بدأ التحرك فى نفس اتجاهه ولكنه يكتشف أن قطاره مازال ساكنًا عند النظر إلى الجهة الأخرى من المحطة (الثابتة)



- عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى أمامه تسير بسرعة أقل مقدارًا من سرعته تبدو له هذه السيارة وكأنها تتحرك نحوه (للخلف)
- عندما ينظر راكب سيارة إلى سيارة أخرى تتحرك فى نفس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة بطيئة بينما عندما ينظر إلى سيارة أخرى تتحرك فى عكس اتجاهه فإنها تبدو له وكأنها تتحرك بسرعة كبيرة.

متجه السرعة النسبية

إذا كان : $\overline{ع}_{أ}$ هو متجه سرعة الجسم (أ) الفعلية ، $\overline{ع}_{ب}$ هو متجه سرعة الجسم (ب) الفعلية فإن :

١ $\overline{ع}_{بأ}$ هو متجه السرعة النسبية للجسم (ب) بالنسبة إلى الجسم (أ) $\overline{ع}_{بأ} = \overline{ع}_{ب} - \overline{ع}_{أ}$

«وهى السرعة التى يبدو الجسم (ب) متحركًا بها إذا اعتبر أن الجسم (أ) فى حالة سكون»

٢ $\overline{ع}_{أب}$ هو متجه السرعة النسبية للجسم (أ) بالنسبة إلى الجسم (ب) $\overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} - \overline{ع}_{ب}$

«وهى السرعة التى يبدو الجسم (أ) متحركًا بها إذا اعتبر أن الجسم (ب) فى حالة سكون»

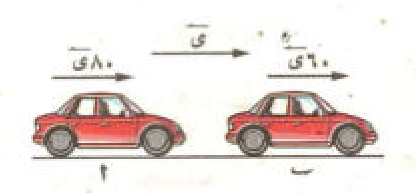
مثال ١٠

تتحرك سيارة (أ) على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/ساعة وتتحرك سيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٦٠ كم/ساعة. أوجد سرعة السيارة (أ) بالنسبة للسيارة (ب) إذا كانت :

١ السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد.

٢ السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين.

الحل



$\overline{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة (أ)

١ السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد :

$\therefore \overline{ع}_{أ} = ٨٠ \overline{ى}$ ، $\overline{ع}_{ب} = ٦٠ \overline{ى}$

$\therefore \overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} - \overline{ع}_{ب} = ٨٠ \overline{ى} - ٦٠ \overline{ى} = ٢٠ \overline{ى}$

أى أن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة أ تتحرك بسرعة ٢٠ كم/س

٢ السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين :

∴ $\overrightarrow{ع}_{أ} = ٨٠\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع}_{ب} = -٦٠\,\overrightarrow{ى}$

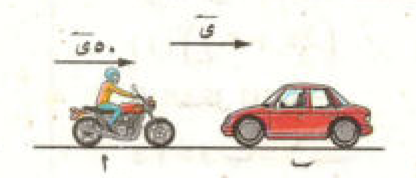
∴ $\overrightarrow{ع}_{أب} = \overrightarrow{ع}_{أ} - \overrightarrow{ع}_{ب} = ٨٠\,\overrightarrow{ى} - (-٦٠\,\overrightarrow{ى}) = ١٤٠\,\overrightarrow{ى}$

أى أن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة (أ) متحركة بسرعة ١٤٠ كم/س

مثال ١١

دراجة بخارية (أ) تسير بسرعة ٥٠ كم/س لاحظ راكبها أن سيارة (ب) تسير فى الاتجاه المضاد بسرعة ١١٠ كم/س بالنسبة له أوجد السرعة الفعلية للسيارة.

الحل



نفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الدراجة (أ)

$\overrightarrow{ع}_{أ} = ٥٠\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع}_{بأ} = -١١٠\,\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع}_{بأ} = \overrightarrow{ع}_{ب} - \overrightarrow{ع}_{أ}$ ∴ $-١١٠\,\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ع}_{ب} - ٥٠\,\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع}_{ب} = -١١٠\,\overrightarrow{ى} + ٥٠\,\overrightarrow{ى} = -٦٠\,\overrightarrow{ى}$

أى أن السيارة (ب) تسير بسرعة ٦٠ كم/س فى الاتجاه المضاد لحركة الدراجة (أ)

حاول بنفسك

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٣٠ كم/س أوجد السرعة النسبية للدراجة بالنسبة للسيارة فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة.

٢ الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة.

تمارين 4 على تطبيقات على المتجهات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

مسائل على التطبيقات الهندسية

(١) أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أب} // \overline{حـ ء}$ ، أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٠)

فإذا كان : أ ب = ٢ حـ ء فإن النقطة ء = ...

(أ) $(٣\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢})$ (ب) $(٣\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ (جـ) $(\frac{١}{٢} ، ٣\frac{١}{٢})$ (د) $(-\frac{١}{٢} ، ٣\frac{١}{٢})$

(٢) في الشكل المقابل :

و أ = و ب = ٦ سم

، ق (∠ و) = ١٢٠°

فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٦\sqrt{٢}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \frac{-٣}{٢} \overrightarrow{ب حـ}$ فإن : ....

(أ) $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ يقعان على مستقيمان متوازيان مختلفان.

(ب) أ ب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

(د) أ ، ب ، حـ رءوس مثلث مختلف الأضلاع.

(٤) في الشكل المقابل :

$\overline{ب ء}$ متوسط في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في ب

فإن : ....

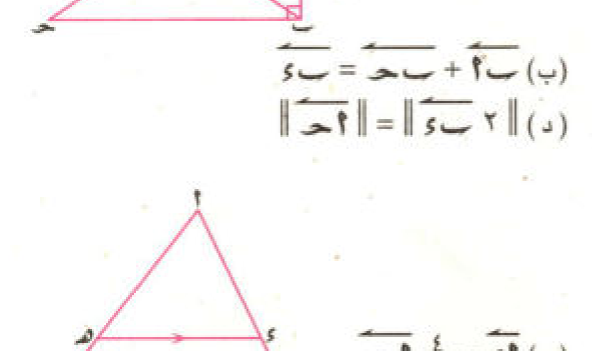
(أ) $\overrightarrow{ب ء} = \frac{١}{٢} \overrightarrow{أ حـ}$ (ب) $\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{ب ء}$

(جـ) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{أ ء} + \overrightarrow{حـ ء}$ (د) $\|٢ \overrightarrow{ب ء}\| = \|\overrightarrow{أ حـ}\|$

(٥) في الشكل المقابل :

$\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ}} = \frac{٤}{٩}$

فإن : ....



(أ) $\overrightarrow{أ ء} = \frac{٤}{٩} \overrightarrow{أب}$ (ب) $\overrightarrow{أ ء} = \frac{٤}{٩} \overrightarrow{أ حـ}$

(جـ) $\overrightarrow{أ هـ} = \frac{٢}{٣} \overrightarrow{أ حـ}$ (د) $\overrightarrow{ء هـ} = \frac{١}{٢} \overrightarrow{ب حـ}$

(٦) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء ، س ص ع ل مربعان

طولا ضلعاهما ٦ سم ، ٣ سم على الترتيب

فإن : $\overrightarrow{أ حـ}$ = ...

(أ) ٦ $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٢}$ ٢ $\overrightarrow{أ ب}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ ٢ $\overrightarrow{س ع}$ (د) ٢ $\overrightarrow{س ع}$

(٧) في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران في الدائرة

، $\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$

فإن : $\overrightarrow{حـ ء}$ = ...

(أ) ٦ $\overrightarrow{حـ هـ}$ (ب) ٣ $\overrightarrow{حـ هـ}$ (جـ) ٤ $\overrightarrow{هـ ء}$ (د) ٤ $\overrightarrow{حـ هـ}$

مسائل على التطبيقات الفيزيائية

(١) في الشكل المقابل :

محصلة القوى الموضحة بدلالة

متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ = ...

(أ) ٨ $\overrightarrow{ى}$ (ب) −٨ $\overrightarrow{ى}$ (جـ) ٣٢ $\overrightarrow{ى}$ (د) −٣٢ $\overrightarrow{ى}$

(٢) في الشكل المقابل :

محصلة القوى الموضحة بدلالة

متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ = ...

(أ) ٥ $\overrightarrow{ى}$ (ب) −٥ $\overrightarrow{ى}$ (جـ) ٤٥ $\overrightarrow{ى}$ (د) −٤٥ $\overrightarrow{ى}$

(٣) في الشكل المقابل :

محصلة القوى الموضحة بدلالة

متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ = ...

(أ) ٥٠ $\overrightarrow{ى}$ (ب) −٥٠ $\overrightarrow{ى}$ (جـ) ١١٠ $\overrightarrow{ى}$ (د) −١١٠ $\overrightarrow{ى}$

(٤) مقدار محصلة القوى المؤثرة على جسم عند محاولة تحريكه بقوة مقدارها ٧٠ نيوتن وكان مقدار قوة الاحتكاك ٥٥ نيوتن تساوى .... نيوتن.

(أ) ٧٠ (ب) ٥٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١٥

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ تؤثران في نقطة مادية

فإن : معيار القوة المحصلة = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ $\sqrt{١٠}$ (ب) ٨ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٤

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = (أ ، ب) ، $\overrightarrow{ق_2}$ = −٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ تؤثران في نقطة مادية وكانت المجموعة متزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٧

(٧) إذا كانت : $\overrightarrow{ع_أ}$ = ١٢ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_ب}$ = ٨ $\overrightarrow{ى}$ فإن : $\overrightarrow{ع_{أب}}$ = ...

(أ) ٢٠ $\overrightarrow{ى}$ (ب) −٢٠ $\overrightarrow{ى}$ (جـ) ٤ $\overrightarrow{ى}$ (د) −٤ $\overrightarrow{ى}$

(٨) إذا كانت : $\overrightarrow{ع_أ}$ = ١٢٠ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_ب}$ = −٨٠ $\overrightarrow{ى}$ فإن : $\overrightarrow{ع_{أب}}$ = ...

(أ) ٤٠ $\overrightarrow{ى}$ (ب) ٢٠٠ $\overrightarrow{ى}$ (جـ) −٢٠٠ $\overrightarrow{ى}$ (د) −٤٠ $\overrightarrow{ى}$

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{ع_{بأ}}$ = ٧٥ $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_أ}$ = −٦٠ $\overrightarrow{ى}$ فإن : $\overrightarrow{ع_ب}$ = ...

(أ) ١٣٥ $\overrightarrow{ى}$ (ب) −١٣٥ $\overrightarrow{ى}$ (جـ) ١٥ $\overrightarrow{ى}$ (د) −١٥ $\overrightarrow{ى}$

(١٠) يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم أفقى بسرعة ١٤ كم/ساعة فإذا قابل راكب آخر ب يتحرك بسرعة ٢٠ كم/ساعة فى الاتجاه المضاد. فإن معيار السرعة النسبية بينهما = ... كم/س

(أ) ٢٠ (ب) ١٤ (جـ) ٣٤ (د) ٦

(١١) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س ، إذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم/س على نفس الطريق. فإن معيار سرعة الدراجة البخارية بالنسبة إلى السيارة عندما تتحركان فى نفس الاتجاه = ... كم/س

(أ) ٥٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٩٠ (د) ٤٠

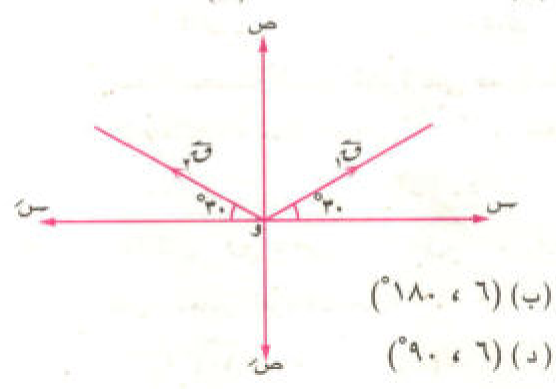
(١٢) إذا أثرت القوتان : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٦ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = −٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ فى نقطة مادية فإن محصلتهما $\overrightarrow{ق}$ = ...

(أ) (٨ ، ١٣٥°) (ب) (٢$\sqrt{٢}$ ، ٤٥°) (جـ) (٢$\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) (د) (٨ ، ٤٥°)

(١٣) إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_1}$ = (٧ ، −٢) ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = (−٤ ، ب) تؤثر فى نقطة مادية ومتزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٣ (د) −١

(١٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $ق_1$ = $ق_2$ = ٣ نيوتن

فإن محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ هى

$\overrightarrow{ح}$ = ...

(أ) (٣ ، ١٨٠°) (ب) (٦ ، ١٨٠°)

(جـ) (٣ ، ٩٠°) (د) (٦ ، ٩٠°)



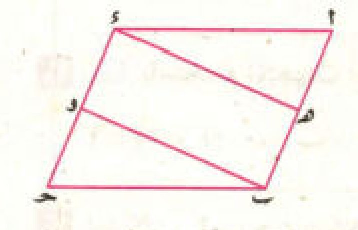
(١٥) إذا أثرت القوتان ق١ ، ق٢ فى نقطة مادية وكانت : ق١ = ٣٤ ث.جم وتعمل فى اتجاه الشمال الشرقى ، ق٢ = ٣٤ ث.جم وتعمل فى اتجاه الجنوب الغربى فإن محصلة القوتين = ...

(أ) ٦٨ ث.جم فى اتجاه الشمال. (ب) ٣٤ $\sqrt{2}$ ث.جم فى اتجاه الشمال الغربى.

(جـ) ٦٨ ث.جم فى اتجاه الشمال الغربى. (د) صفر

ثانيًا الأسئلة المقالية

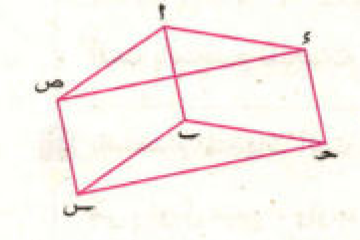
مسائل على التطبيقات الهندسية



١ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ منتصف أ ب ، و منتصف ء جـ

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل ء هـ ب و متوازى أضلاع.



٢ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء ، أ ب س ص متوازيا أضلاع.

أثبت باستخدام المتجهات أن :

الشكل جـ س ص ء هو متوازى أضلاع.

---

٣ إذا كان : س ص ع ل متوازى أضلاع ، هـ ∈ س ل ، و ∈ ص ع بحيث : هـ س = ع و أثبت باستخدام المتجهات أن : هـ و ، ص ل ينصف كل منهما الآخر.

---

٤ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب جـ ، أ ء = $\frac{1}{2}$ ب جـ وتقاطع قطراه فى م

فإذا كانت : هـ ، و منتصفى م ب ، م جـ على الترتيب

أثبت باستخدام المتجهات أن : أ هـ و ء متوازى أضلاع.



٥ أ ب جـ ء شكل رباعى ، إذا كان : أ جـ + ء ب = ٢ ء جـ فأثبت أن : أ ب جـ ء متوازى أضلاع.

---

٦ استخدم المتجهات لإثبات أن : القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى أى ضلعين متقابلين من أضلاع متوازى أضلاع توازى الضلعين الآخرين وطولها يساوى طول كل منهما.

---

٧ باستخدام المتجهات أثبت أن : إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين ومتوازيين أيضًا أى أن الشكل يكون متوازى أضلاع.

٨ ا ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{اب}$ ، هـ منتصف $\overline{احـ}$

باستخدام المتجهات أثبت أن : $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ ، ءهـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

---

٩ إذا كان : ا (٦ ، ٥) ، ب (٨ ، −٣) ، حـ (−٢ ، −٥) هي رؤوس المثلث ا ب حـ

فأوجد باستخدام المتجهات إحداثيي نقطة تقاطع متوسطاته. «(٤ ، −١)»

---

١٠ إذا كانت : ا = (٥ ، ١) ، ب = (٢ ، ٥) ، حـ = (−٢ ، ٣) ، ء = (−٥ ، −٤)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل ا ب حـ ء شبه منحرف.

---

١١ باستخدام المتجهات أثبت أن النقط :

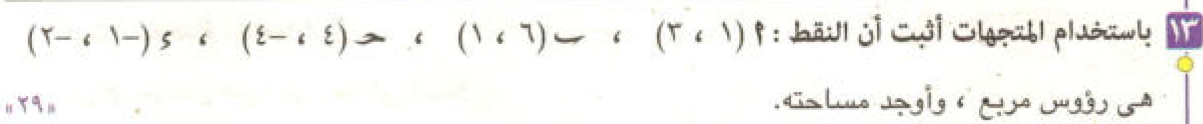
ا = (٣ ، ٤) ، ب = (١ ، −١) ، حـ = (−٤ ، −٣) ، ء = (−٢ ، ٢) هي رؤوس معين.

---

١٢ إذا كان : ا ب حـ ء شكلًا رباعيًا فيه :

ا = (١ ، −٢) ، ب = (٩ ، ٠) ، حـ = (٨ ، ٤) ، ء = (٠ ، ٢)

أثبت باستخدام المتجهات أن : الشكل ا ب حـ ء مستطيل ثم أوجد محيطه ومساحته. «٦ $\sqrt{١٧}$ ، ٣٤»

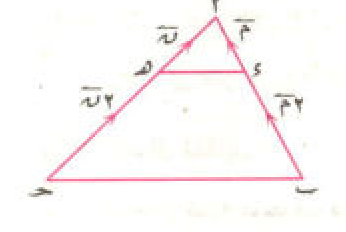


١٣ باستخدام المتجهات أثبت أن النقط : ا (١ ، ٣) ، ب (٦ ، ١) ، حـ (٤ ، −٤) ، ء (−١ ، −٢)

هي رؤوس مربع ، وأوجد مساحته. «٢٩»



١٤ في الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{اب}$ ، هـ ∈ $\overline{احـ}$

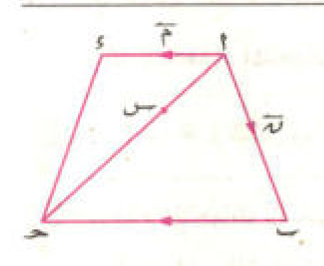
$\overrightarrow{اء}$ = $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{هـا}$ = $\overrightarrow{ن}$ ، $\overrightarrow{بء}$ = ٢ $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{حـهـ}$ = ٢ $\overrightarrow{ن}$

أوجد : $\overrightarrow{بحـ}$ بدلالة $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$

ثم برهن أن : $\overline{بحـ} \parallel \overline{ءهـ}$ «٣ ($\overrightarrow{م}$ − $\overrightarrow{ن}$)»

---

١٥ في الشكل المقابل :



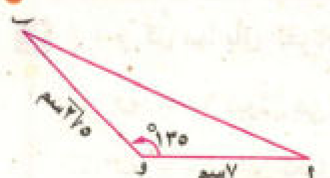
ا ب حـ ء شبه منحرف ، $\overline{اء} \parallel \overline{بحـ}$

، اء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ ، $\overrightarrow{اب}$ = $\overrightarrow{ن}$ ، $\overrightarrow{اء}$ = $\overrightarrow{م}$

(١) عبر بدلالة $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ عن كل من : $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{احـ}$ ، $\overrightarrow{ءحـ}$ ، $\overrightarrow{ءب}$

(٢) إذا كانت : س ∈ $\overline{احـ}$ حيث ا س = $\frac{١}{٢}$ ا حـ

أثبت أن النقط : ء ، س ، ب تقع على استقامة واحدة.



١٦ **فى الشكل المقابل :**

و أ ب مثلث فيه : و أ = ٧ سم ، و ب = ٥ $\sqrt{2}$ سم

، ق (∠ أ و ب) = ١٣٥°

أوجد باستخدام المتجهات : طول $\overline{أب}$ «١٣ سم»

---

١٧ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـء}$ ، $\overline{ءأ}$ على الترتيب.

باستخدام المتجهات أثبت أن :

(١) الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع.

(٢) محيط الشكل س ص ع ل يساوى مجموع طولى قطرى الشكل الرباعى.

مسائل على التطبيقات الفيزيائية

١ إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٧ $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ فى نقطة مادية. **أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.**

(القوى مقيسة بالنيوتن) «١٥ نيوتن ، ٤٨ ٧ ٥٣°»

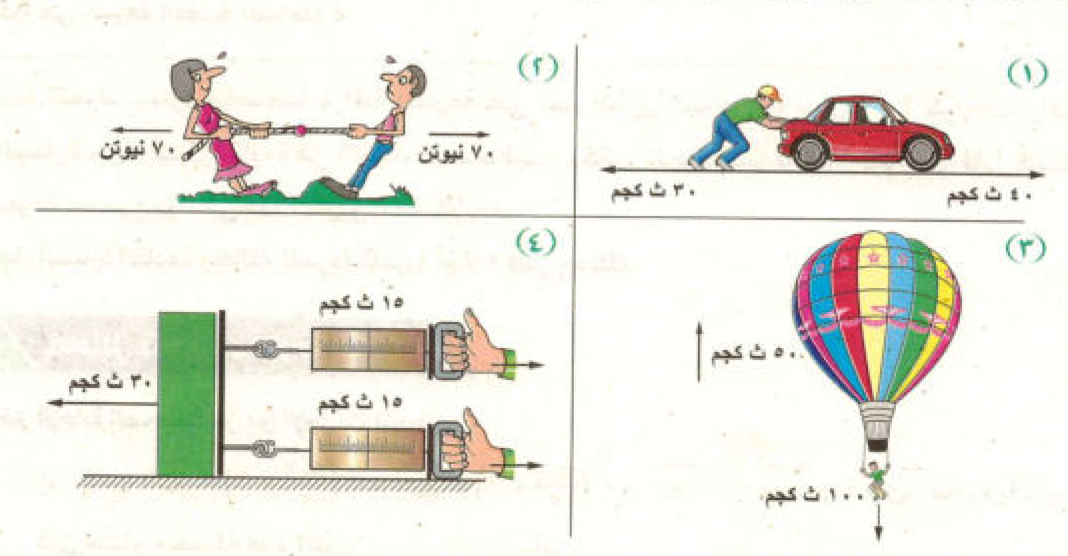
---

٢ إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = (−٦ ، ٦) ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٩ $\overleftarrow{س}$ + ١٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = (٢ ، −٧) فى نقطة مادية

حيث إن القوى مقيسة بالداين. **أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.** «١٣ داين ، ٤٨ ٢٢ ٦٧°»

---

٣ **أوجد محصلة القوى المؤثرة $\overleftarrow{ق}$ فى كل مما يأتى :**



٤ في كلٍّ مما يأتي القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تؤثران في نقطة مادية ، وضح مقدار واتجاه محصلة كل قوتين منها :

(١) $ق_١$ = ١٥ نيوتن في اتجاه الشرق ، $ق_٢$ = ٤٠ نيوتن في اتجاه الغرب.

(٢) $ق_١$ = ٥٠ داين تعمل في اتجاه ٦٠° غرب الشمال ، $ق_٢$ = ٥٠ داين تعمل في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٣) $ق_١$ = ٣٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٢٠° شرق الشمال ، $ق_٢$ = ٣٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٧٠° شمال الشرق.

---

٥ إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

تؤثر في نقطة مادية أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى $\overrightarrow{ح}$:

(١) $\overrightarrow{ح}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ (٢) $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{٠}$ «−٢ ، −٦ ، −٧ ، −٤»

---

٦ إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٧ $\overrightarrow{س}$ − ٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣}$ = −٤ $\overrightarrow{س}$ + (ب − ٣) $\overrightarrow{ص}$ تؤثر في نقطة مادية أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت :

(١) محصلة مجموعة القوى تساوى ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٧ $\overrightarrow{ص}$ (٢) مجموعة القوى متزنة. «١ ، −٢ ، −٣ ، ٥»

---

٧ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٤٠ كم/س وتتحرك السيارة ب على نفس الطريق بسرعة ١١٠ كم/س. أوجد سرعة السيارة أ بالنسبة إلى السيارة ب عندما :

(١) تتحرك السيارتان في اتجاه واحد.

(٢) تتحرك السيارتان في اتجاهين متضادين. «٣٠ كم/س ، ٢٥٠ كم/س»

---

٨ تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوي «القاهرة − الإسكندرية» بسرعة ٣٠ كم/س راقبت هذه السيارة حركة شاحنة قادمة في الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س.

فما هي السرعة الفعلية للشاحنة ؟ «٨٠ كم/س»

---

٩ تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على أحد الطرق الصحراوية بسرعة ٤٠ كم/س. راقبت هذه السيارة حركة سيارة قادمة في الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٣٥ كم/س. فإذا كانت أقصى سرعة مسموح بها على هذا الطريق ١٠٠ كم/س.

هل السيارة القادمة مخالفة للسرعة المقررة أم لا ؟ فسر إجابتك. «غير مخالفة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = $(٦ ، \frac{٢\pi}{٣})$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = $(٦ ، \frac{٤\pi}{٣})$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = ٩ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ مقدرة بالداين

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... داين

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) $٦\sqrt{٣}$



(٢) إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_١} = \left(٨\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ا\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣} = -٥\overrightarrow{س} + (ب + ٢)\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة واحدة والمجموعة فى حالة اتزان

فإن : $\frac{ا}{ب} =$ ....

(أ) ١٣ (ب) -١٣ (جـ) ١ (د) -١

(٣) إذا كانت $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٣\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص}$ فإن القوة $\overrightarrow{ق_٣}$ التى تجعل محصلة القوى الثلاث هى متجه الوحدة فى اتجاه الموجب لمحور الصادات تساوى ....

(أ) $-٣\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ (ب) $-٤\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$

(جـ) $-٥\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ (د) $-٤\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$

(٤) مجموعة مكونة من ١٠٠ قوة مقدار كل قوة ١٠ نيوتن تؤثر فى نقطة واحدة، قياس الزاوية بين كل قوة والتى تليها $\frac{\pi}{٥٠}$ فإن معيار محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠٠ (جـ) ١٠ (د) صفر

---

٢ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} = ٥\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (٧ + ا)\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = -١٤\overrightarrow{س} + (٣ - ب)\overrightarrow{ص}$

ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت القوة المحصلة بالصورة القطبية $(\overrightarrow{ح}) = \left(١٠\sqrt{٢} ، ١٣٥^\circ\right)$

أوجد قيمتى : ا ، ب «-٨ ، ٢»

---

٣ قامت سيارة (ا) متحركة على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) أمامها تسير فى نفس الاتجاه فوجدتها ٢٠ كم/ساعة ولما خفضت السيارة (ا) سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ٥٠ كم/ساعة. فما هى السرعة الفعلية لكلٍ من السيارتين ؟ «٦٠ كم/س ، ٨٠ كم/س»

الوحدة الخامسة

الخط المستقيم



دروس الوحدة

- الدرس 1 تقسيم قطعة مستقيمة.
- الدرس 2 معادلة الخط المستقيم.
- الدرس 3 قياس الزاوية بين مستقيمين.
- الدرس 4 طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- الدرس 5 المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يوجد إحداثيى نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التى تنقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم إحداثيا نقطة التقسيم.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة، والمعادلات البارامترية ، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.
- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- يوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.



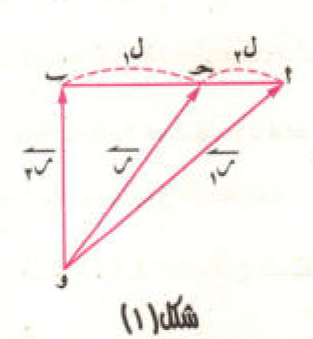
الدرس

1

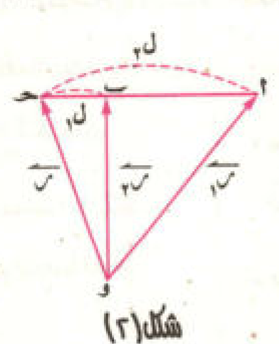
تقسيم قطعة مستقيمة

• إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة موجهة $\subset \overleftrightarrow{\text{أب}}$ فإن أى نقطة حـ $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ تقسم $\overrightarrow{\text{أب}}$ إلى قطعتين مستقيمتين موجهتين $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـب}}$ بحيث $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{حـب}}$

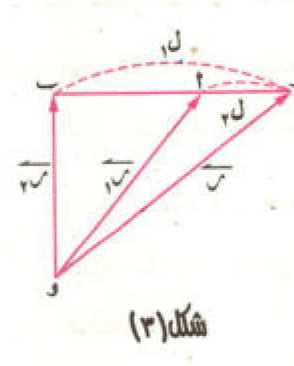
وإذا كانت النقطة حـ تقسم $\overrightarrow{\text{أب}}$ بنسبة معلومة $\text{ل}_2 : \text{ل}_1$ وكانت $\overrightarrow{\text{ر}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}_2}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ هى المتجهات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}}$ ، $\overrightarrow{\text{وحـ}}$ حيث (و) هى نقطة الأصل.



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

فإن : $\dfrac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \dfrac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$

$\therefore \text{ل}_1 (\overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = \text{ل}_2 (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$

$\therefore \text{ل}_1 \overrightarrow{\text{ر}} - \text{ل}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} = \text{ل}_2 \overrightarrow{\text{ر}_2} - \text{ل}_2 \overrightarrow{\text{ر}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ر}} (\text{ل}_1 + \text{ل}_2) = \text{ل}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} + \text{ل}_2 \overrightarrow{\text{ر}_2}$

$\therefore \text{ل}_1 . \overrightarrow{\text{أحـ}} = \text{ل}_2 . \overrightarrow{\text{حـب}}$

$\therefore \text{ل}_1 (\overrightarrow{\text{ر}} - \overrightarrow{\text{ر}_1}) = \text{ل}_2 (\overrightarrow{\text{ر}_2} - \overrightarrow{\text{ر}})$

$\therefore \text{ل}_1 \overrightarrow{\text{ر}} + \text{ل}_2 \overrightarrow{\text{ر}} = \text{ل}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} + \text{ل}_2 \overrightarrow{\text{ر}_2}$

$\therefore \boxed{\overrightarrow{\text{ر}} = \dfrac{\text{ل}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} + \text{ل}_2 \overrightarrow{\text{ر}_2}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}}$ وتسمى بالصورة المتجهة.

ملاحظـات

١ إذا كانت : حـ ∈ $\overline{أب}$ فإن «حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل»

ويكون $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{حـب}$ لهما نفس الاتجاه وتكون القيمتان $ل_١$ ، $ل_٢$ موجبتين

أى أن $\frac{ل_٢}{ل_١} > ٠$ [شكل (١)]

٢ إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ فإن «حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج» ويكون $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{حـب}$ لهما اتجاهان متضادان وتكون إحدى القيمتين $ل_١$ ، $ل_٢$ موجبة والأخرى سالبة

أى أن $\frac{ل_٢}{ل_١} < ٠$ وفى هذه الحالة يكون لدينا احتمالان :

أولًا : $|ل_٢| > |ل_١|$ تكون حـ ∈ $\overrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ [شكل (٢)]

ثانيًا : $|ل_٢| < |ل_١|$ تكون حـ ∈ $\overrightarrow{بأ}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ [شكل (٣)]

٣ $\frac{\|\overrightarrow{أحـ}\|}{\|\overrightarrow{حـب}\|} = \left|\frac{ل_٢}{ل_١}\right|$

أى أن $\frac{أحـ}{حـب} = \left|\frac{ل_٢}{ل_١}\right|$

• إذا فرضنا أن أ = $(س_١ ، ص_١)$ ، ب = $(س_٢ ، ص_٢)$ ، حـ = (س ، ص)

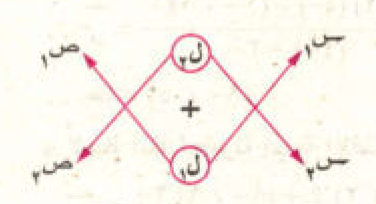
$$\therefore \overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$$

$$\therefore (س ، ص) = \frac{ل_١ (س_١ ، ص_١) + ل_٢ (س_٢ ، ص_٢)}{ل_١ + ل_٢} = \frac{(ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢ ، ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢)}{ل_١ + ل_٢}$$

$$\therefore (س ، ص) = \left(\frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}\right)$$

وتسمى بالصورة الإحداثية.

• يمكن الاستعانة بالشكل المجاور لتبسيط إيجاد الصورة الإحداثية.



مثال ١

إذا كانت : أ = (١ ، −٤) ، ب = (٦ ، ٦) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

الحل

∵ حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل

$\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_٢ \overrightarrow{ر_١} + ل_١ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

لاحظ أن
حـ تقسم $\overline{أب}$
∴ $\overrightarrow{ر_١}$ = أ (١ ، −٤)
، $\overrightarrow{ر_٢}$ = ب (٦ ، ٦)

$\therefore \overrightarrow{ر} = \frac{٢ (١ ، −٤) + ٣ (٦ ، ٦)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢ \times ١ + ٣ \times ٦}{٥} ، \frac{٢ \times −٤ + ٣ \times ٦}{٥}\right) = (٤ ، ٢)$

∴ حـ = (٤ ، ٢)

حل آخر باستخدام المتجهات :

∵ حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

$\therefore \frac{أحـ}{حـب} = \frac{٣}{٢}$ ∴ ٢ $\overrightarrow{أحـ}$ = ٣ $\overrightarrow{حـب}$

ب (٦،٦) — حـ (س،ص) — أ (١،−٤) ؛ ٢ ، ٣

∴ ٢ (س − ١ ، ص + ٤) = ٣ (٦ − س ، ٦ − ص)

∴ (٢ س − ٢ ، ٢ ص + ٨) = (١٨ − ٣ س ، ١٨ − ٣ ص)

∴ ٢ س − ٢ = ١٨ − ٣ س ومنها س = ٤

، ٢ ص + ٨ = ١٨ − ٣ ص ومنها ص = ٢

∴ حـ = (٤ ، ٢)

مثال ٢

إذا كانت : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (١ ، −١) أوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overline{بأ}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

الحل

∵ حـ تقسم $\overline{بأ}$ من الخارج

$\therefore \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{−٤}{٣}$

، ∵ $\overrightarrow{ر} = \frac{ل_٢ \overrightarrow{ر_١} + ل_١ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢}$

لاحظ أن
حـ تقسم $\overline{بأ}$
∴ $\overrightarrow{ر_١}$ = ب (١ ، −١)
، $\overrightarrow{ر_٢}$ = أ (٢ ، −٣)

$\therefore \overrightarrow{ر} = \frac{٣ (١ ، −١) + (−٤) (٢ ، −٣)}{٣ + (−٤)} = \left(\frac{٣ \times ١ − ٤ \times ٢}{−١} ، \frac{٣ \times −١ − ٤ \times −٣}{−١}\right) = (٥ ، −٩)$

∴ حـ = (٥ ، −٩)

* لاحظ أننا اعتبرنا نسبة التقسيم $ل_٢ : ل_١$ = −٤ : ٣ ولو اعتبرناها ٤ : −٣ فسوف نحصل على نفس النتيجة.

$\overrightarrow{ر} = \frac{−٣ (١ ، −١) + ٤ (٢ ، −٣)}{−٣ + ٤} = (٥ ، −٩)$

حل آخر باستخدام المتجهات :

∵ حـ تقسم $\overline{\text{ب أ}}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$

∴ ٣ (س − ١ ، ص + ١) = ٤ (س − ٢ ، ص + ٣)

∴ (٣ س − ٣ ، ٣ ص + ٣) = (٤ س − ٨ ، ٤ ص + ١٢)

∴ ٣ س − ٣ = ٤ س − ٨ ومنها س = ٥

، ٣ ص + ٣ = ٤ ص + ١٢ ومنها ص = −٩ ∴ حـ = (٥ ، −٩)

مثال ٣

إذا كانت : أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) وكانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بحيث : ٢ أ حـ = ٣ حـ ب

فأوجد إحداثيي حـ إذا كان : ١ التقسيم من الداخل. ٢ التقسيم من الخارج.

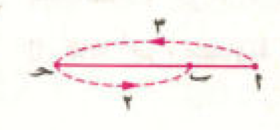
الحل

∵ ٢ أ حـ = ٣ حـ ب ∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\left|\frac{ل_٢}{ل_١}\right| = \frac{٣}{٢}$

١ إذا كان التقسيم من الداخل فإن : $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٣}{٢}$

$$\overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢} = \frac{٢ (٣ ، −١) + ٣ (٥ ، ٢)}{٢ + ٣} = \left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$$

∴ حـ = $\left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$



٢ إذا كان التقسيم من الخارج فإن : $\frac{ل_٢}{ل_١} = -\frac{٣}{٢} = \frac{٣}{-٢}$

$$\overrightarrow{ر} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_١} + ل_٢ \overrightarrow{ر_٢}}{ل_١ + ل_٢} = \frac{-٢ (٣ ، −١) + ٣ (٥ ، ٢)}{-٢ + ٣} = (٩ ، ٨)$$

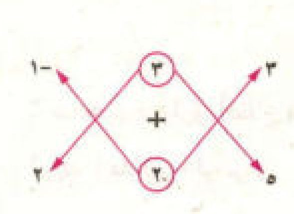
∴ حـ = (٩ ، ٨)

• **لاحظ أن :** | $ل_٢$ | > | $ل_١$ | وعلى ذلك فإن : حـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$

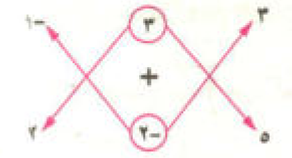
حل آخر باستخدام الصورة الإحداثية لنقطة التقسيم :

$$\text{حـ} = \left(\frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}\right)$$

١ أ = (٣ ، −١) ، ب = (٥ ، ٢) ، $ل_٢ : ل_١$ = ٣ : ٢



∴ حـ = $\left(\frac{٢ \times ٣ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times (−١) + ٣ \times ٢}{٢ + ٣}\right) = \left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$



[٢] $أ = (٣ ، -١)$ ، $ب = (٥ ، ٢)$ ، $ل_٢ : ل_١ = ٣ : -٢$

$$\therefore ح = \left(\frac{-٢ \times ٣ + ٣ \times ٥}{-٢ + ٣} ، \frac{-٢ \times (-١) + ٣ \times ٢}{-٢ + ٣}\right) = (٩ ، ٨)$$

حاول بنفسك

$أ = (١ ، ٢)$ ، $ب = (٨ ، -٥)$ أوجد إحداثيي النقطة ح التي تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ إذا كان :

[١] التقسيم من الداخل. [٢] التقسيم من الخارج.

ملاحظة

إذا كانت : ح منتصف $\overleftarrow{أب}$ حيث : $أ(س_١ ، ص_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢)$

فإن : $ل_١ = ل_٢ = ل$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{ل \overleftarrow{ر_١} + ل \overleftarrow{ر_٢}}{ل + ل} = \frac{ل (\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢})}{٢ ل}$$

$$\therefore \boxed{\overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢}}{٢}}$$ الصورة المتجهة

، $$\boxed{(س ، ص) = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)}$$ الصورة الإحداثية.

مثال ٤

إذا كانت : $أ = (-١ ، ٤)$ ، $ب = (٥ ، -٢)$ فأوجد إحداثيات النقطتين ح ، ء اللتين تقسمان $\overline{أب}$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية الطول.

الحل



$\because$ ح تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{١}{٢}$

$$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{٢ (-١ ، ٤) + (٥ ، -٢)}{٢ + ١} = (١ ، ٢)$$ $\therefore ح = (١ ، ٢)$

، $\because$ ء منتصف $\overleftarrow{حب}$ $$\therefore \overleftarrow{ر} = \frac{\overleftarrow{ر_١} + \overleftarrow{ر_٢}}{٢} = \frac{(١ ، ٢) + (٥ ، -٢)}{٢} = (٣ ، ٠)$$

$\therefore$ ء $= (٣ ، ٠)$ ويمكن إيجاد ء باعتبار أنها تقسم $\overleftarrow{أب}$ من الداخل بنسبة $ل_٢ : ل_١ = ٢ : ١$

مثال ٥

أ ب ح ء متوازي أضلاع فيه : $أ = (٥ ، ٢)$ ، $ب = (٠ ، ٣)$ ، $ح = (-٢ ، -١)$

أوجد إحداثيي الرأس ء

الحـل

نفرض أن : ء = (س ، ص)

، ∵ القطران ينصف كل منهما الآخر فى متوازى الأضلاع.

∴ نقطة منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{بء}}$

∴ $\frac{٥ - ٢}{٢} = \frac{٠ + س}{٢}$ ∴ س = ٣

، $\frac{٢ - ١}{٢} = \frac{٣ + ص}{٢}$

∴ ص = −٢ ∴ ء = (٣ ، −٢)

مـلاحظات

* لإثبات أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة فإننا نثبت :
  إما $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، ك ≠ ٠ (باستخدام المتجهات)
  أو ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ (باستخدام الميل)
  أو أب = ب حـ + أحـ (باستخدام البُعد بين نقطتين حيث أب الطول الأكبر)
* إذا كانت حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة $ل_٢$: $ل_١$ فيكون التقسيم :
  ١ من الداخل إذا كان $\frac{ل_٢}{ل_١}$ موجبة. ٢ من الخارج إذا كانت $\frac{ل_٢}{ل_١}$ سالبة.

مثـال ٦

أثبت أن النقط : أ = (١ ، −٣) ، ب = (−٢ ، −٩) ، حـ = (٥ ، ٥) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

١ النسبة التى تقسم بها حـ القطعة $\overline{\text{أب}}$ ٢ النسبة التى تقسم بها أ القطعة $\overline{\text{ب حـ}}$

الحـل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، −٩) − (١ ، −٣) = (−٣ ، −٦) = −٣ (١ ، ٢)

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ٥) − (١ ، −٣) = (٤ ، ٨) = ٤ (١ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}} = -\frac{٤}{٣}\, \overrightarrow{\text{أب}}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة ، ب ، حـ فى جهتين مختلفتين من أ



، $\frac{\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} = \frac{٤}{٣}$ **وينتج أن :**



١ حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

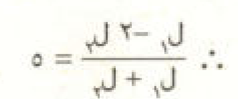
٢ أ تقسم $\overline{\text{ب حـ}}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

حل آخر باستخدام الميل :

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-٩ + ٣}{-٢ - ١} = ٢$ ، ميل $\overleftrightarrow{أجـ} = \frac{٥ + ٣}{٥ - ١} = ٢$

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة.

١ نفرض أن جـ (٥ ، ٥) تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة $ل_٢ : ل_١$

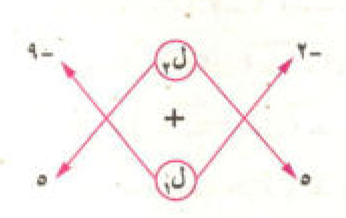


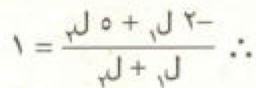
∴ $\frac{ل_١ - ٢ل_٢}{ل_١ + ل_٢} = ٥$ ∴ $ل_١ - ٢ل_٢ = ٥ل_١ + ٥ل_٢$

∴ $٤ل_١ = -٧ل_٢$ ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = -\frac{٤}{٧}$ (سالبة)

∴ جـ تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

٢ نفرض أن أ (١ ، −٣) تقسم $\overleftrightarrow{بجـ}$ بنسبة $ل_٢ : ل_١$





∴ $\frac{-٢ل_١ + ٥ل_٢}{ل_١ + ل_٢} = ١$ ∴ $-٢ل_١ + ٥ل_٢ = ل_١ + ل_٢$

∴ $٣ل_١ = ٤ل_٢$ ∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ أ تقسم $\overleftrightarrow{بجـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

حل ثالث باستخدام البُعد بين نقطتين :

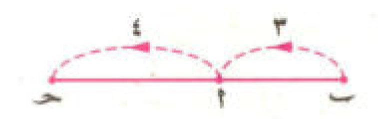
∵ $أب = \sqrt{(١ + ٢)^٢ + (-٣ + ٩)^٢} = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، $بجـ = \sqrt{(-٢ - ٥)^٢ + (-٩ - ٥)^٢} = ٧\sqrt{٥}$ وحدة طول.

$جـأ = \sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٣ - ٥)^٢} = ٤\sqrt{٥}$ وحدة طول. ∴ $بجـ = أب + جـأ$

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة ، جـ $\notin \overline{أب}$

، $\frac{أب}{أجـ} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٤\sqrt{٥}} = \frac{٣}{٤}$

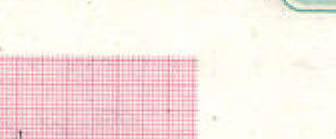


∴ جـ تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج ، أ تقسم $\overleftrightarrow{بجـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

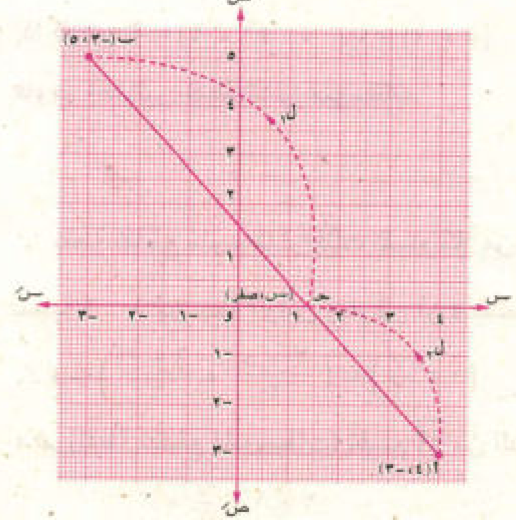
مثال ٧

أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftrightarrow{أب}$ بكل من نقطتى تقاطعها مع محورى الإحداثيات

إذا كانت : أ = (٤ ، −٣) ، ب = (−٣ ، ٥) ثم أوجد إحداثيات نقطتى التقسيم.



الحـــل



أولًا : بفرض أن حـ = (س ، ٠) هى

نقطة تقاطع $\overline{أب}$ مع محور السينات

$$\therefore ٠ = \frac{ل_٢ \times ٥ + ل_١ \times (-٣)}{ل_٢ + ل_١}$$

$$\therefore ٠ = ٥ ل_٢ - ٣ ل_١$$

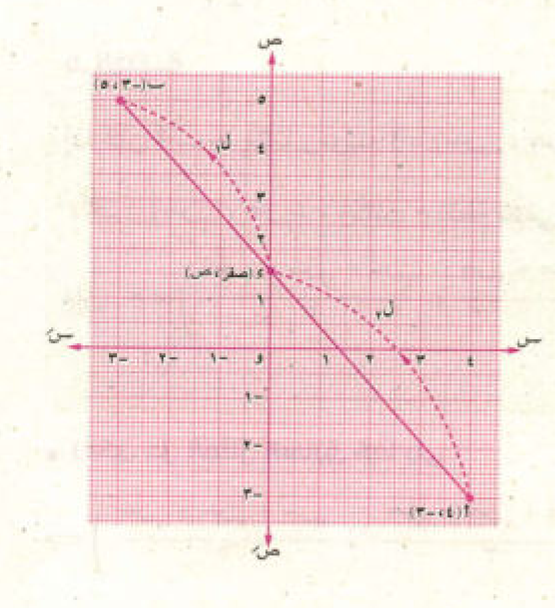
$$\therefore ٥ ل_٢ = ٣ ل_١ \qquad \therefore \frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٣}{٥}$$

∴ $\overline{أب}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع محور السينات

بنسبة ٣ : ٥ من الداخل.

$$، \because س = \frac{ل_١ س_١ + ل_٢ س_٢}{ل_١ + ل_٢} \qquad \therefore س = \frac{٥ \times ٤ + ٣ \times -٣}{٣ + ٥} = \frac{١١}{٨}$$

∴ حـ (نقطة التقسيم) = $\left(\frac{١١}{٨} ، ٠\right)$



ثانيًا : بفرض أن ء = (٠ ، ص) هى

نقطة تقاطع $\overline{أب}$ مع محور الصادات

$$\therefore ٠ = \frac{ل_٢ \times (-٣) + ل_١ \times ٤}{ل_٢ + ل_١}$$

$$\therefore ٠ = -٣ ل_٢ + ٤ ل_١$$

$$\therefore ٣ ل_٢ = ٤ ل_١ \qquad \therefore \frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٤}{٣}$$

∴ $\overline{أب}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع

محور الصادات بنسبة ٤ : ٣ من الداخل.

$$، \because ص = \frac{ل_١ ص_١ + ل_٢ ص_٢}{ل_١ + ل_٢}$$

$$\therefore ص = \frac{٣ \times -٣ + ٤ \times ٥}{٣ + ٤} = \frac{١١}{٧} \qquad \therefore ء \text{ (نقطة التقسيم)} = \left(٠ ، \frac{١١}{٧}\right)$$

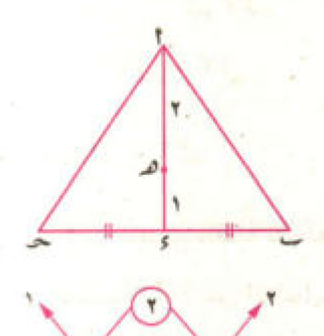
حاول بنفسك

إذا كانت : أ(٢ ، ٣) ، ب(-٢ ، ١) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overleftrightarrow{أب}$ بنقطة تقاطعها مع محور السينات ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.

مثال ٨

إذا كانت : $أ = (٢ ، ١)$ ، $ب = (١ ، ٥)$ ، $حـ = (٦ ، -٣)$ رءوس مثلث فأوجد إحداثيي نقطة تلاقي متوسطاته.

الحل



∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً من هذه المتوسطات من الداخل بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس وبفرض أن ء منتصف $\overline{بحـ}$

$$\therefore ء = \left(\frac{١+٦}{٢} ، \frac{٥-٣}{٢}\right) = \left(\frac{٧}{٢} ، ١\right)$$

، هـ (نقطة تقاطع المتوسطات) تقسم $\overline{أء}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

$$\therefore س = \frac{٢ \times \frac{٧}{٢} + ١ \times ٢}{٢+١} = ٣$$

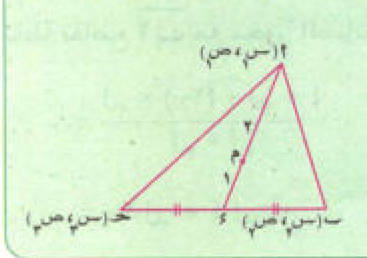
$$، ص = \frac{٢ \times ١ + ١ \times ١}{٢+١} = ١ \qquad \therefore هـ = (٣ ، ١)$$

ملاحظة

إذا كان أ ب حـ مثلثًا رءوسه $أ = (س_١ ، ص_١)$ ، $ب = (س_٢ ، ص_٢)$

، $حـ = (س_٣ ، ص_٣)$ ، وكانت م نقطة تلاقي متوسطاته

$$فإن : م = \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$$



* **يمكن حل المثال السابق كما يلي :**

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right) = \left(\frac{٢+١+٦}{٣} ، \frac{١+٥-٣}{٣}\right) = (٣ ، ١)$$

لاحظ الفرق

إذا كانت : $حـ \in \overleftrightarrow{أب}$ وكان :

١ $\overrightarrow{أحـ} = ٢ \overrightarrow{حـب}$ **فإن :** حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل.

٢ $\overrightarrow{أحـ} = -٢ \overrightarrow{حـب}$ **فإن :** حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج.

٣ $أحـ = ٢ حـب$ **فإن :** حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل أو الخارج.

تمارين 5 على تقسيم قطعة مستقيمة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي — • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ = (٣ ، ٦) ، ب = (−٧ ، ٤) فإن : منتصف $\overline{أب}$ = ...

(أ) (−٤ ، ١٠) (ب) (−٤ ، ٥) (جـ) (٥ ، ١) (د) (−٢ ، ٥)

(٢) إذا كانت : م نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع أ ب جـ د حيث : أ = (٣ ، ٧) ، جـ = (−٣ ، ١)

فإن : م = ...

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٣ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٨) (د) (٦ ، ٦)

(٣) إذا كانت النقطة (٣ ، ٦) هى نقطة تنصيف $\overline{أب}$ حيث : أ = (−٣ ، ٧)

فإن : النقطة ب = ...

(أ) (٦ ، −١) (ب) (−٦ ، ١) (جـ) (٩ ، ٥) (د) (٠ ، ٦٫٥)

(٤) إذا كانت : جـ (٢ ، ٤) منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (س ، ٤) ، ب (١ ، ص)

فإن : س + ص = ...

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٧

(٥) دائرة مركزها (٢ ، −٢) فإذا كان قطرها له نقطة طرفية (٤ ، ٢) فإن نقطة الطرف الآخر للقطر هى ....

(أ) (−٤ ، ٢) (ب) (٠ ، −٦) (جـ) (−٣ ، −٣) (د) (٨ ، ٤)

(٦) إذا كانت : أ (−٣ ، −٧) ، ب (٤ ، ٠) فإن النقطة جـ التى تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٥ : ٢ من الداخل هى ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢)

(٧) إذا كانت : أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١) فإن النقطة جـ التى تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ هى ....

(أ) (−٢٥ ، −٧) (ب) (٢٥ ، ٧) (جـ) (١٧ ، ١٣) (د) (١٧ ، −١٣)

(٨) إذا كانت : أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٨) ، جـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث جـ ب : أ جـ = ١ : ٢

فإن : جـ = ...

(أ) (٤ ، −٨) (ب) (٢ ، −٤) (جـ) (−٨ ، ٤) (د) (−٤ ، ٢)

(٩) إذا كانت : حـ ∈ $\overline{أب}$ وكان أب = ٤ بحـ ، أ (–١ ، ٤) ، ب (٣ ، ٤)

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٤)

(١٠) إذا كانت : أ (–٣ ، –٤) ، ب (–٨ ، ٧) وكانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$

بحيث أحـ = ٢ حـب فإن : حـ هى ....

(أ) (١٣ ، ١٨) (ب) (–١٣ ، ١٨) (جـ) (–١٣ ، –١٨) (د) (١٣ ، –١٨)

(١١) إذا كانت : ب (٠ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٠) وكانت أ تقع فى ثلث المسافة من ب إلى حـ

فإن نقطة أ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (–١ ، –٢) (د) (–٢ ، –١)

(١٢) إذا كانت : أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، –١) فإن النقطة حـ التى تقع فى ربع المسافة من أ إلى ب

هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، –٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (–٣ ، ٢)

(١٣) النقطة التى تقع فى $\frac{٢}{٥}$ المسافة من أ إلى ب للقطعة المستقيمة $\overline{أب}$

حيث أ (٣ ، –٢) ، ب (–١ ، ٥) هى ....

(أ) (–١ ، ٣) (ب) $\left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ (جـ) (٣ ، –١) (د) $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٧}{٥}\right)$

(١٤) إذا كانت : حـ (٤ ، ٤) تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل وكانت أ (٧ ، ٨) فإن : ب = ...

(أ) (–٢ ، –٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (–١ ، –٢) (د) (٢ ، ٤)

(١٥) إذا كان : $\overline{أب}$ = (٣ ، ٤) ، أ = (–٢ ، ٥) ، حـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٣ : ٢ من الخارج

فإن : حـ = ...

(أ) (٧ ، ١٧) (ب) (٨ ، ٣) (جـ) (–٨ ، ٣) (د) (–٧ ، –١٧)

(١٦) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، –٢)

هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ٣ من الداخل. (جـ) ٣ : ٢ من الخارج. (د) ٢ : ٥ من الخارج.

(١٧) النسبة التى يقسم بها محور الصادات $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ٧) تساوى ....

(أ) ١ : ٣ من الخارج. (ب) ٣ : ١ من الداخل. (جـ) ١ : ٢ من الخارج. (د) ٣ : ٢ من الداخل.

(١٨) إذا كانت : أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٤ ، ص) ثلاث نقط على استقامة واحدة

فإن حـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ....

(أ) ١ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ١ من الداخل. (جـ) ٢ : ١ من الخارج. (د) ١ : ٢ من الخارج.



(١٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، م نقطة تلاقى المتوسطات

حيث أ = (٠ ، ٨) ، ب = (٣ ، ٢) ، حـ = (–٣ ، ٥)

فإن : نقطة م هى ....

(أ) (٠ ، ٧,٥) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (–٣ ، ٥) (د) (٥ ، ٠)

(٢٠) إذا كان : $\overline{أ ء}$ متوسطًا فى Δ أ ب حـ حيث أ = (١ ، ٢) ، ء = (٤ ، –٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ هى ....

(أ) (٣ ، –٢) (ب) (–٣ ، ٢) (جـ) (٢ ، –٣) (د) (–٢ ، –٣)

(٢١) أ ب حـ مثلث فيه : أ (–٣ ، ١) ، ب (١ ، ٧) ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته حيث م = (١ ، ٢)

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٥ ، ٢) (ب) (٥ ، –٢) (جـ) (–٥ ، ٢) (د) (–٥ ، –٢)

(٢٢) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٨ ، ٧) ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته حيث م = (٢ ، ١)

فإن النقطة ء منتصف $\overline{ب حـ}$ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (–١ ، –٢) (د) (–١ ، ٢)

(٢٣) إذا كان : $\overline{أ هـ}$ متوسط Δ أ ب حـ ، م هى نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ وكانت :

أ (٥ ، ٤) ، م (٧ ، ٨) فإن : $\overleftarrow{أ هـ}$ = ...

(أ) $\left(\frac{٤}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$ (جـ) (٣ ، ٦) (د) (١ ، ٢)

(٢٤) إذا كانت : حـ تقسم $\overleftarrow{ب أ}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل فإن : $\frac{أ حـ}{أ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٢٥) إذا كانت : حـ تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ بنسبة ٥ : ٧ من الخارج فإن : $\frac{أ حـ}{أ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

(٢٦) إذا كانت : حـ ∈ $\overline{أ ب}$ وكان : ٣ $\overleftarrow{أ ب}$ = ٥ $\overleftarrow{ب حـ}$ فإن : حـ تقسم $\overleftarrow{ب أ}$ بنسبة ....

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٥ (د) ٥ : ٣

(٢٧) إذا كانت أ تقسم $\overline{ب حـ}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٣ فإن ....

(أ) ب تقسم $\overline{أ حـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

(ب) ب تقسم $\overline{أ حـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

(جـ) حـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ١

(د) حـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

(٢٨) أ ب حـ مثلث فيه : ب (٣ ، ٥) ، حـ (-٣ ، -٧) ، ء ∈ $\overline{بحـ}$

بحيث مساحة Δ أ ب ء = $\frac{١}{٢}$ مساحة Δ أ ب حـ فإن : ء = ...

(أ) $(٣ ، \frac{١٧}{٣})$ (ب) $(\frac{٣}{٢} ، ٢)$ (جـ) (٠ ، -١) (د) (١ ، ١)

(٢٩) إذا كانت نقط منتصفات أضلاع مثلث هى (-٢ ، ٣) ، (٧ ، -١) ، (٤ ، ٤)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٩ ، ٦) (جـ) (٥ ، ٠) (د) $(\frac{٥}{٣} ، ٠)$

(٣٠) النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ $(س_١ ، ص_١)$

، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ هى .... من الداخل/الخارج حيث $س_١ \neq ٠$ ، $س_٢ \neq ٠$

(أ) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (جـ) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣١) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ $(س_١ ، ص_١)$

، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ هى .... من الداخل/الخارج حيث $ص_١ \neq ٠$ ، $ص_٢ \neq ٠$

(أ) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (جـ) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣٢) فى الشكل المقابل :



كل مما يأتى صحيح ما عدا ....

(أ) حـ تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ من الداخل.

(ب) ب تقسم $\overleftrightarrow{حـأ}$ بنسبة ٣ : ٧ من الخارج.

(جـ) أ تقسم $\overleftrightarrow{بحـ}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

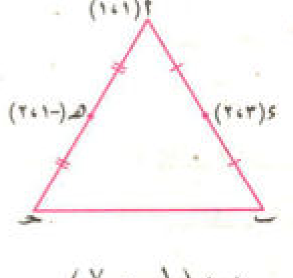
(د) حـ تقسم $\overleftrightarrow{بأ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل.

(٣٣) إذا كان أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات وكانت النقطة حـ (٣ ، ٢) تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ فإن النقطتان أ ، ب على الترتيب هما ....

(أ) (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) (ب) (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥) (د) (١ ، ٠) ، (٠ ، ٨)

(٣٤) فى الشكل المقابل :



إذا كانت ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

وكان : أ (١ ، ١) ، ء (٣ ، ٢) ، هـ (-١ ، ٢)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) $(-١ ، \frac{٧}{٣})$ (ب) $(١ ، \frac{٧}{٣})$ (جـ) $(\frac{-١}{٣} ، \frac{٧}{٣})$ (د) $(\frac{١}{٣} ، \frac{٧}{٣})$

(٣٥) في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ، هـ ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث

٣ هـ ب = ٤ هـ أ فإن إحداثي النقطة هـ هو ....

(أ) (٣ ، −٣) (ب) (٤ ، −٢)

(جـ) (٥ ، −١) (د) (٦ ، ٢)

(٣٦) إذا كان : أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) نقطتان في المستوى وكان محور الصادات يقسم $\overleftarrow{أ ب}$ من الخارج فمن المؤكد أن ....

(أ) س١ ، س٢ موجبان. (ب) س١ س٢ > صفر

(جـ) ص١ ، ص٢ موجبان. (د) ص١ ص٢ > صفر

(٣٧) إذا كانت حـ منتصف $\overline{أ ب}$ وكانت ء تقسم $\overleftarrow{أ حـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

فإن ء تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ بنسبة ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٣٨) إذا كانت النقطة حـ تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ ونقطة ء تقسم $\overleftarrow{أ حـ}$ من الداخل بنسبة ١ : ٤

فإن نقطة ء تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ بنسبة ....

(أ) ١ : ٦ (ب) ١ : ٨ (جـ) ٣ : ٢٢ (د) ٤ : ١٧

(٣٩) إذا كانت : حـ (س١ ، ص١) ، ء (س٢ ، ص٢) هما نقطتي تثليث $\overline{أ ب}$ حيث أ (−١ ، ٤) ، ب (٨ ، ٦)

فإن : س١ + س٢ = ...

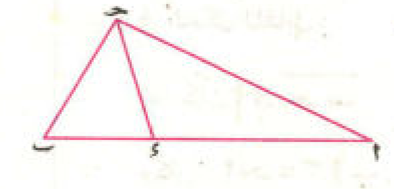
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٤٠) إذا كانت : أ (−٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ١) وكانت حـ تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ من الداخل بنسبة م١ : م٢

وكانت ء تقسم $\overleftarrow{ب أ}$ من الداخل بنسبة م١ : م٢ وكانت حـ = (٤ ، ٢) فإن : ء = ...

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٤ ، ٦) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٤)

(٤١) في الشكل المقابل :





أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ (١ ، −٤) ، ب (٦ ، ٦)

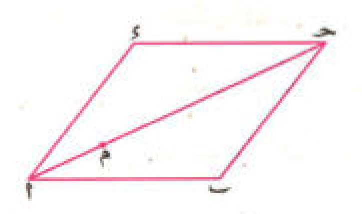
، ء (٤ ، ٢) ، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

فإن كل مما يأتي صحيح ما عدا ....

(أ) مساحة Δ أ حـ ء = $\frac{٣}{٢}$ مساحة Δ ب حـ ء (ب) محيط Δ أ حـ ء > محيط Δ ب حـ ء

(جـ) $\overleftarrow{حـ ء}$ ينصف ∠ أ حـ ب (د) ء تقسم $\overleftarrow{ب أ}$ بنسبة ٣ : ٢ من الداخل.

(٤٢) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه :

أ (−٣ ، −٥) ، ب (٢ ، −٨) ، ء (٨ ، ٦)

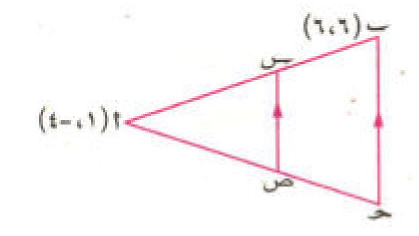
وكان : $\overleftarrow{أحـ}$ = ٤ $\overleftarrow{أم}$ فإن : م = ...

(أ) (٣ ، −٢) (ب) (−٥ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (١ ، −٣)

(٤٣) إذا كانت نقطة الأصل على رادار مراقبة هي ميناء بحري وتحركت منه سفينتان في نفس الوقت الأولى نحو الشرق بسرعة ٦٠ كم/س والأخرى شمالاً بسرعة ٤٠ كم/س فإن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين السفينتين بعد مرور ٣ ساعات هي .... «حيث كم هو وحدة الأطوال»

(أ) (٩٠ ، ٦٠) (ب) (٦٠ ، ٩٠) (جـ) (١٨٠ ، ١٢٠) (د) (١٢٠ ، ١٨٠)

(٤٤) في الشكل المقابل :



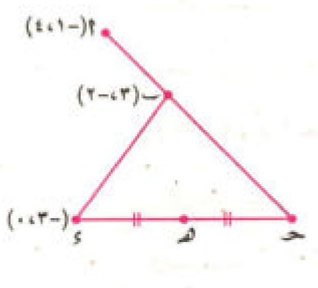
إذا كان : $\overline{سص}$ // $\overline{ب حـ}$

، $\frac{أص}{أحـ} = \frac{٣}{٥}$

فإن : س = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٤ ، ٢)

(٤٥) في الشكل المقابل :



$\frac{أهـ}{هـحـ}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٤٦) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ∈ $\overleftarrow{حـ ب}$

وكان : أ حـ = ٣ أ ب

فإن : هـ = ...

(أ) (٤ ، −٢) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٤ ، −٧) (د) (٨ ، −٥)

(٤٧) في الشكل المقابل :

النقطة حـ هي ....

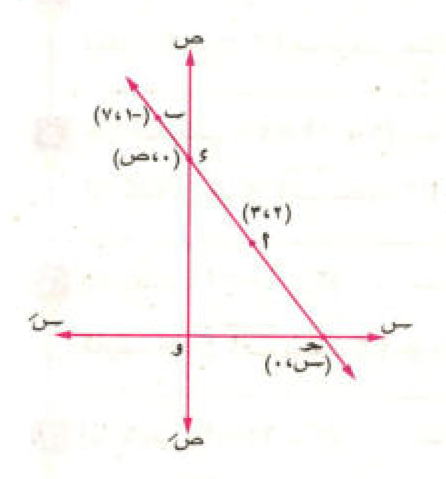
(أ) (٥ ، ٠)

(ب) (٤ ، ٠)

(جـ) (٣ ، ٠)

(د) (٢ ، ٠)

(٤٨) في الشكل المقابل :



حـ أ : حـ ب = ...

(أ) ٢ : ١

(ب) ٧ : ٣

(جـ) ٣ : ٧

(د) ١ : ٢

(٤٩) في الشكل المقابل :

زاوية θ في وضعها القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في أ

فإن و تقسم $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ من الخارج بالنسبة ....

(أ) $\frac{١}{١ - \text{جتا}\,\theta}$ (ب) جتا θ

(جـ) قتا θ (د) قا θ

(٥٠) إذا كان متجه موضع النقطة أ بالصورة القطبية هو $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$) ، ب (٢ ، ٥) ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فإذا كانت ب تقسم $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ بنسبة ٧ : ٤ من الخارج فإن : حـ = ...

(أ) (−٢ ، ٥) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٢ ، ٥ $\sqrt{٢}$)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : أ = (٠ ، −٣) ، ب = (٣ ، ٦) فأوجد إحداثيي النقطة حـ التي تقسم $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

«(٢ ، ٣)»

٢ إذا كانت : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−١ ، ٥) **فأوجد :**

(١) إحداثيي النقطة حـ التى تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل.

(٢) إحداثيي النقطة ء التى تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ من الخارج. «$(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ ، (−١٣ ، ٢٦)»

---

٣ أوجد إحداثيي النقطة حـ التى تقع عند خمس المسافة من النقطة أ = (−١ ، −١)

إلى النقطة ب = (٩ ، ٤) «(١ ، ٠)»

---

٤ إذا كانت : حـ ∈ $\overleftarrow{بأ}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ وكانت أ = (٣ ، ١) ، ب = (٤ ، ٢)

وكان : أحـ = ٢ أب أوجد إحداثيي نقطة حـ «(١ ، −١)»

---

٥ إذا كانت : أ = (١ ، ٣) ، ب = (−٤ ، −٢) أوجد إحداثيي النقطة حـ

إذا كانت : حـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث ٣ أحـ = ٢ حـ ب «(−١ ، ١)»

---

٦ إذا كانت : أ = (٤ ، ٣) ، ب = (−٣ ، ٥)

فأوجد حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ بحيث ٣ أحـ = ٥ حـ ب «$(\frac{-٣}{٨} ، \frac{١٧}{٤})$ ، $(-\frac{٢٧}{٢} ، ٨)$»

---

٧ إذا كانت : أ = (٢ ، ١) ، ب = (−١ ، −٢) فأوجد إحداثيي النقطة حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

، حـ ∉ $\overline{أب}$ بحيث بعدها عن أ أربعة أمثال بعدها عن ب «(−٢ ، −٣)»

---

٨ إذا كانت النقطة أ = (٣ ، −٤) ، حـ = (−١ ، ل) ، ب = (ك ، ١)

على استقامة واحدة ، حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، $\frac{أحـ}{حـ ب} = \frac{٢}{٣}$ أوجد : ل ، ك «−٢ ، −٧»

---

٩ إذا كانت : أ = (٨ ، −٤) ، ب = (−١ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقطتين اللتين تقسمان $\overline{أب}$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية فى الطول. «(٥ ، −٢) ، (٢ ، ٠)»

---

١٠ إذا كانت : أ = (١ ، −٤) ، ب = (٥ ، ٤) فأوجد إحداثيات النقط حـ ، ء ، هـ التى تقسم $\overline{أب}$

إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول. «(٢ ، −٢) ، (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٢)»

---

١١ إذا كانت : أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات ، حـ = (−٤ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$

فأوجد إحداثيي كل من أ ، ب «(−٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦)»

---

١٢ إذا كانت : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−٢ ، ٣) فأوجد النسبة التى تقسم بها النقطة

حـ = (٨ ، ص) القطعة $\overline{أب}$ مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص «١ : ٢ (من الخارج) ، −٧»



١٣ أوجد النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-٣ ، ٧)
مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم. «$\frac{٢}{٣}$ (من الداخل) ، (٠ ، $\frac{٢٣}{٥}$)»

---

١٤ إذا كانت : أ = (-٢ ، ٣) ، ب = (٤ ، -٢) فأوجد النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ مبينًا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم. «$\frac{٣}{٢}$ (من الداخل) ، ($\frac{٨}{٥}$ ، ٠)»

---

١٥ إذا كانت : أ = (٥ ، ٢) ، ب = (٢ ، -١) فأوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أ ب}$ بكل من نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ مع محورى الإحداثيات ، مبينًا نوع التقسيم فى كل حالة ، ثم أوجد إحداثيى نقطة التقسيم.
«٢ : ١ (من الداخل) ، ٥ : ٢ (من الخارج) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، -٣)»

---

١٦ إذا كانت : حـ ، ء نقطتى تقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ مع محورى الإحداثيات فأوجد النسبة التى تقسم بها كل من حـ ، ء القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ مبينًا نوع التقسيم ، علمًا بأن : أ = (-٥ ، ٧) ، ب = (-٣ ، ٢)
«٧ : ٢ (من الخارج) ، ٥ : ٣ (من الخارج)»

---

١٧ إذا كانت النقط أ = (١ ، -١) ، ب = (-١ ، ١) ، حـ = ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$)
هى رءوس مثلث فأوجد إحداثيى نقطة تقاطع متوسطاته. «($\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$)»

---

١٨ إذا كانت : أ = (٤ ، ١٢) ، ب = (-٢ ، ١٠) ، حـ = (١ ، ٣) ، ء = (٢ ، ٧)
، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، م تقسم $\overline{حـ ء}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ أوجد طول $\overline{هـ م}$ «٥ وحدات طول»

---

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإذا كانت : أ = (٧ ، -٢) ، ب = (١٥ ، ٤) ، حـ = (٩ ، ٦)
فأوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ثم أوجد إحداثيى الرأس ء «(٨ ، ٢) ، (١ ، ٠)»

---

٢٠ إذا كان : أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا ، أ = (٤ ، ٣) ، ب = (٠ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، -٣) ، ء = (٢ ، -٢)
أوجد نقطة منتصف كل من $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ثم حدد نوع الشكل أ ب حـ ء «(١ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، متوازى أضلاع»

---

٢١ أثبت أن النقط أ = (١ ، ٤) ، ب = (٣ ، -٢) ، حـ = (-٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :
(١) النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة $\overline{ب حـ}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «١ : ٢ (من الداخل)»
(٢) النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة $\overline{حـ أ}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «٣ : ١ (من الخارج)»
(٣) النسبة التى تقسم بها حـ القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ ، مبينًا نوع التقسيم. «٢ : ٣ (من الخارج)»

٢٢ ء ، هـ ، ن منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب ح}$ ، $\overline{ح أ}$ على الترتيب فى Δ أ ب ح

فإذا كانت : ء = (٢ ، ٣) ، هـ = (−١ ، ٤) ، ن = (٤ ، ٥)

فأوجد إحداثيات : أ ، ب ، ح «(٧ ، ٤) ، (−٣ ، ٢) ، (١ ، ٦)»

---

٢٣ أ ب ح مثلث رءوسه أ = (٣ ، ٥) ، ب = (٦ ، −٤) ، ح = (١ ، ١)

فإذا كانت : ء تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ١ : ٢ ، هـ تقسم $\overleftarrow{أح}$ بنسبة ١ : ٢ أيضًا

فأثبت أن : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب ح}$ ، ءهـ = $\frac{1}{3}$ ب ح

---

٢٤ الربط بالمسافة : تتحرك سيارة نقل ركاب فى طريقها من المدينة أ إلى المدينة ب حيث أ = (٥ ، −٦) ، ب = (١ ، ٠) وتوقفت مرتين أثناء سيرها . أوجد إحداثيات النقطتين اللتين توقفت عندهما السيارة إذا كانت :

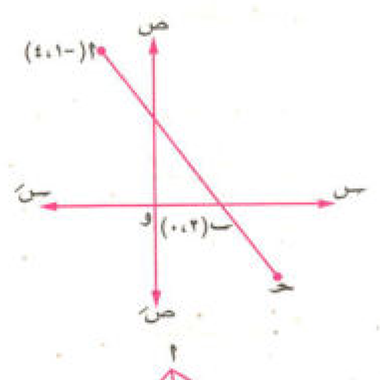
(١) وقفت فى منتصف الطريق.

(٢) توقفت فى ثلثى الطريق من جهة النقطة أ «(٣ ، −٣) ، ($\frac{7}{3}$ ، −٢)»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



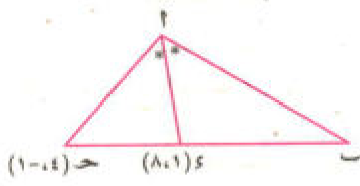
إذا كان : ب ح = ٢,٥ وحدة طول

فإن النقطة ح = ...

(أ) (٣ ، −٢) (ب) (٣,٥ ، −٢)

(جـ) (٤ ، −٢) (د) (٢,٥ ، −١)

(٢) فى الشكل المقابل :

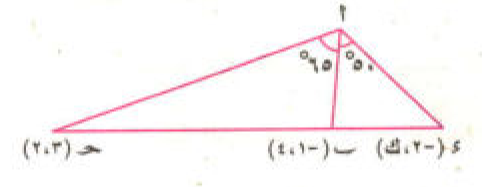


إذا كان : ٤ أ ح = ٣ أ ب

فإن النقطة ب هى ....

(أ) (−٥ ، ١٤) (ب) (−٤ ، ١٦) (جـ) (−٣ ، ٢٠) (د) (−٢ ، ٢١)

(٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب ∈ $\overline{ح ء}$

فإن : $\frac{أ ب}{أ ء}$ = ...

(أ) $\frac{6}{5}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$

(٤) إذا كانت أ ، ب هما صورتا النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس فى محور السينات والصادات على الترتيب فإن النقطة التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ هى ....

(أ) (٣ ، −١) (ب) $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-١}{٥}\right)$ (جـ) $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{١}{٥}\right)$ (د) (٠ ، ٠)

(٥) إذا كانت النقطتان أ ، ب تقعان على منحنى الدالة : ص = س^{٢} حيث أ (٣ ، ٩) وكان محور الصادات يقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٣ : ٢ من الداخل فإن : ب = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (−٢ ، ٤) (جـ) (−١,٥ ، ٢,٢٥) (د) (−٣ ، ٩)

(٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : م (٣ ، ٢) نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

، مَ (١ ، −٣) نقطة تلاقى متوسطات Δ أَ بَ حَ

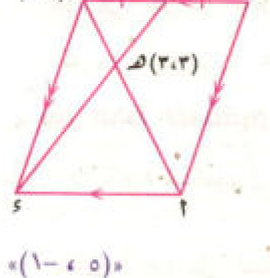
فإن : $\overrightarrow{أأَ} + \overrightarrow{ببَ} + \overrightarrow{حـحـَ}$ = ...

(أ) (٢ ، ٥) (ب) (٦ ، ١٥)

(جـ) (−٢ ، −٥) (د) (−٦ ، −١٥)

---

٢ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : و منتصف $\overline{بحـ}$

، $\overline{أحـ} \cap \overline{ءو} = \{هـ\}$

فإذا كانت : هـ = (٣ ، ٣)

، حـ = (٢ ، ٥) **فأوجد :** إحداثيي النقطة أ

«(٥ ، −١)»

---

٣ إذا كانت : أ = (٢ ، ٢) ، ب = (٥ ، ٦) ، حـ = (١٠ ، −٤) هى رءوس مثلث

، ء $\in \overline{بحـ}$ بحيث $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ من الداخل أوجد إحداثيي النقطة ء

«$\left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$»

الدرس

2

معادلة الخط المستقيم

درسنا فى السنوات السابقة أن :

* **الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى :** أ س + ب ص + حـ = ٠

حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب لا يساويان الصفر معًا وتمثل بيانيًا بخط مستقيم

فمثلًا كل من العلاقات : س + $\sqrt{3}$ ص = ٦ ، ص = ٣ ، س − ٤ = ٠ تمثل خطًا مستقيمًا

، كل من العلاقتين : ص + $\sqrt{\text{س}}$ = ٤ ، س + $\frac{1}{\text{ص}}$ = ٥ لا تمثل خطًا مستقيمًا.

* **ميل الخط المستقيم :**

١ إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)

فإن : م (ميل المستقيم ل) = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

فمثلًا المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ميله يساوى $\frac{2 - 3}{4 - 1} = \frac{-1}{3}$

٢ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : أ س + ب ص + حـ = ٠

فإن : ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ ميله = $\frac{-5}{2}$

٣ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ فإن : ميله = م

، يقطع جزءًا من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد حـ ويمر بالنقطة (٠ ، حـ)

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ص = ٣ س − ٥

ميله = ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٥ وحدات طولية ويمر بالنقطة (٠ ، −٥)

٤ إذا كان : هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

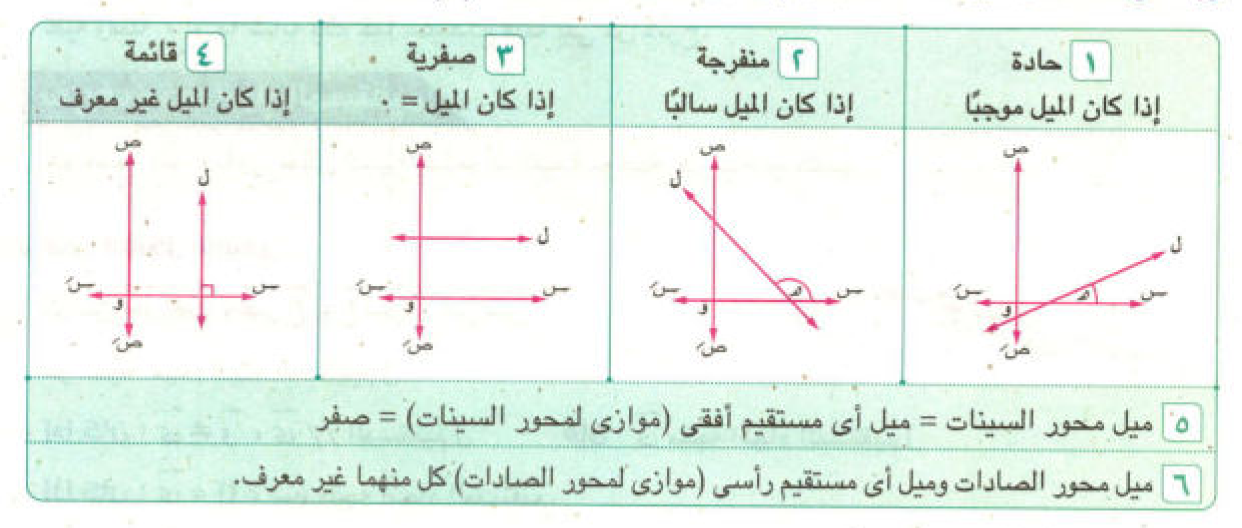
فإن : ميل المستقيم = ظا هـ

فمثلًا إذا كان قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ٤٥°

فإن ميل المستقيم = ظا ٤٥° = ١

وبالتالى نلاحظ أن ميل الخط المستقيم يتغير بتغير قياس الزاوية (هـ) كما يلى :

١ حادة إذا كان الميل موجبًا	٢ منفرجة إذا كان الميل سالبًا	٣ صفرية إذا كان الميل = ٠	٤ قائمة إذا كان الميل غير معرف



٥ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

٦ ميل محور الصادات وميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) كل منهما غير معرف.

* إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب ح}$ فإن النقط أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة.

* **العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمتعامدين :**

إذا كان : ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمين ميلاهما م$_١$ ، م$_٢$ على الترتيب فإن :

١ ل$_١$ // ل$_٢$ $\Longleftrightarrow$ م$_١$ = م$_٢$

أى أن المستقيمين المتوازيين ميلاهما متساويان ، والعكس صحيح.

٢ ل$_١$ ⊥ ل$_٢$ $\Longleftrightarrow$ م$_١$ م$_٢$ = −١ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

أى أن حاصل ضرب ميلى مستقيمين متعامدين يساوى −١ ، والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (−٣ ، −١)

يكون ميله م$_١$ = $\frac{٥ + ١}{٣ + ٣}$ = ١

، المستقيم ل$_٢$ معادلته : ٣ س − ٣ ص + ٥ = ٠ يكون ميله م$_٢$ = $\frac{-٣}{-٣}$ = ١

، المستقيم ل$_٢$ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥°

يكون ميله م$_٢$ = ظا ١٣٥° = −١

، ∵ م$_١$ = م$_٢$ ∴ ل$_١$ // ل$_٢$

، ∵ $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٣} = ١ \times -١ = -١$ ∴ $\text{ل}_{١} \perp \text{ل}_{٣}$

، ∵ $\text{م}_{٢} \times \text{م}_{٣} = ١ \times -١ = -١$ ∴ $\text{ل}_{٢} \perp \text{ل}_{٣}$

* أي نقطتين مختلفتين فى المستوى يمر بهما خط مستقيم واحد ، ومن أى نقطة خارج هذا المستقيم يمكن رسم مستقيم آخر وحيد يوازيه.
* لتحديد معادلة أى خط مستقيم فإنه يلزمنا معرفة معلومتين عن هذا المستقيم كأن نعرف نقطتين عليه ، أو نقطة عليه وميله ، أو ما شابه ذلك كما سيتضح فيما يلى من شرح.

تعريف متجه اتجاه المستقيم

هو متجه غير صفرى يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم.

* **ففى الشكل المقابل :**

كل من $\overleftarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص س}}$

هو متجه اتجاه للخط المستقيم ل

* **إذا كان :** $\overleftarrow{\text{ى}} \neq \overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ // المستقيم ل **فإن :** $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه المستقيم ل
* **إذا كان :** $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه المستقيم.

فإن : ك $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم حيث ك ∈ ح*

فمثلًا **إذا كان :** $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (٣ ، ٤) متجه اتجاه مستقيم ما فإن كلًا من المتجهات (٦ ، ٨) ، (−٣ ، −٤) ، (١,٥ ، ٢) ، (١٥ ، ٢٠) ، ... متجه اتجاه لهذا المستقيم.

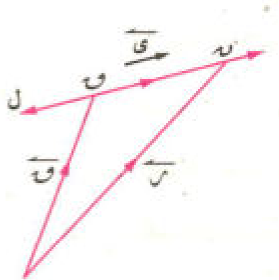
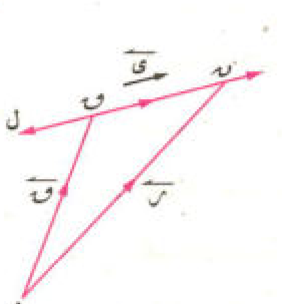
ملاحظة

إذا كان : $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ ، والعكس صحيح.

فمثلًا إذا كان : (٢ ، −٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$ ، المستقيم الذى ميله = $\frac{-٤}{٧}$ يكون المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (٧ ، −٤) متجه اتجاه له.

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

* إذا كان ل مستقيمًا يمر بالنقطة ن ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه اتجاه له وبفرض نقطة ر تقع على المستقيم ل وأن $\overleftarrow{\text{ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$ هما المتجهان الممثلان بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overleftarrow{\text{و ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ر}}$ على الترتيب

* يوجد عدد ك ∈ ح* بحيث $\overleftarrow{\text{ن ر}} = \overleftarrow{\text{ر}} - \overleftarrow{\text{ن}} = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ى}}$

∴ $\boxed{\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ن}} + \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ى}}}$ وتسمى هذه الصورة «المعادلة المتجهة للخط المستقيم»

حيث ك عدد حقيقى ويسمى بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

* بفرض $\vec{ر}$ = (س ، ص) ، $ن$ = (س$_1$ ، ص$_1$) ، $\vec{ى}$ = (أ ، ب)

∴ معادلة الخط المستقيم هى : (س ، ص) = (س$_1$ ، ص$_1$) + ك (أ ، ب)

∴ س = س$_1$ + ك أ ، ص = ص$_1$ + ك ب

وتسمى هذه الصورة «المعادلات الوسيطية (البارامترية)»

∴ $\frac{س - س_1}{أ}$ = ك ، $\frac{ص - ص_1}{ب}$ = ك

وبحذف ك من المعادلتين : ∴ $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$ ∴ $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ب}{أ}$

، ∵ الميل (م) = $\frac{ب}{أ}$ ∴ $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م

وتسمى هذه الصورة «المعادلة الكارتيزية»

نلخص ما سبق فيما يلى :

المستقيم ل الذى يمر بالنقطة ن = (س$_1$ ، ص$_1$) والمتجه $\vec{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه له تكون :

- **المعادلة المتجهة هى :** $\vec{ر} = \vec{ن}$ + ك $\vec{ى}$

أى أن (س ، ص) = (س$_1$ ، ص$_1$) + ك (أ ، ب)

- **المعادلتان الوسيطيتان هما :** س = س$_1$ + ك أ ، ص = ص$_1$ + ك ب

- **المعادلة الكارتيزية هى :** $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة

ن = (٣ ، −٢) والمتجه $\vec{ى}$ = (−٢ ، ١) متجه اتجاه له.

الحل

* المعادلة المتجهة للمستقيم هى : $\vec{ر} = \vec{ن}$ + ك $\vec{ى}$ ∴ $\vec{ر}$ = (٣ ، −٢) + ك (−٢ ، ١)

أى أن (س ، ص) = (٣ ، −٢) + ك (−٢ ، ١)

* المعادلتان الوسيطيتان هما : س = ٣ − ٢ ك ، ص = −٢ + ك

* المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{١}{-٢}$

∴ س − ٣ = −٢ ص − ٤

∴ الصورة العامة هى : س + ٢ ص + ١ = ٠

تذكر أن

∵ (−٢ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم

∴ ميل المستقيم = $\frac{١}{-٢}$

حل آخر لإيجاد المعادلة الكارتيزية :

بحذف ك من المعادلتين الوسيطيتين ∴ $\frac{س - ٣}{-٢} = \frac{ص + ٢}{١}$

أى أن س + ٢ ص + ١ = ٠

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (−٢ ، ١) وميله = $-\frac{٤}{٥}$

الحل

∵ الميل م = $\frac{-٤}{٥}$ ∴ المتجه $\overrightarrow{ى}$ = (٥ ، −٤) متجه اتجاه لهذا المستقيم.

* المعادلة المتجهة هي : $\overrightarrow{ر}$ = (−٢ ، ١) + ك (٥ ، −٤)

أى أن (س ، ص) = (−٢ ، ١) + ك (٥ ، −٤)

* المعادلتان الوسيطيتان هما : س = −٢ + ٥ ك ، ص = ١ − ٤ ك

* المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ١}{س + ٢} = -\frac{٤}{٥}$ ∴ الصورة العامة هى : ٤ س + ٥ ص + ٣ = ٠

حاول بنفسك

أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ، ٤) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{٣ \pi}{٤}$

معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه و = (س$_١$ ، ص$_١$) ، ن = (س$_٢$ ، ص$_٢$)

المتجه $\overrightarrow{ى}$ = $\overrightarrow{و ن}$ = ($\overrightarrow{ن}$ − $\overrightarrow{و}$) متجه اتجاه للمستقيم.

∴ **المعادلة المتجهة هى :** $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك (\overrightarrow{ن} - \overrightarrow{و})$

، ∵ الميل (م) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ وبالتعويض عن الميل فى الصورة الكارتيزية.

∴ **المعادلة الكارتيزية هى :** $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

مثال ٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين : و = (٣ ، −١) ، ن = (−٢ ، ٤)

الحـــل

$\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ق}$ = (−٢ ، ٤) − (٣ ، −١) = (−٥ ، ٥) متجه اتجاه للمستقيم المطلوب

∴ $\overrightarrow{ى} = \frac{١}{٥}\ \overrightarrow{ى} = \frac{١}{٥}$ (−٥ ، ٥) = (−١ ، ١) متجه اتجاه أيضًا للمستقيم ، ميل المستقيم = $\frac{١}{-١}$ = −١

∴ المعادلة المتجهة هى : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ق} + ك\ \overrightarrow{ى}$ ∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، −١) + ك (−١ ، ١)

أى أن : (س ، ص) = (٣ ، −١) + ك (−١ ، ١)

، المعادلتان الوسيطيتان هما : س = ٣ − ك ، ص = −١ + ك

، المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣}$ = −١

أى أن : ص + ١ = − س + ٣

∴ الصورة العامة هى : ص + س − ٢ = ٠

ملاحظات

١ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠) هى :

* المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر} = ك\ \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه له.

* المعادلة الكارتيزية : ص = م س حيث م ميل المستقيم.

٢ متجه اتجاه المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هو $\overrightarrow{ى}$ = ($س_١$ ، $ص_١$)

٣ المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) يكون المتجه $\overrightarrow{س}$ = (١ ، ٠) متجه اتجاه له.

، معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (١ ، ٠)

، معادلته الكارتيزية : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{٠}{١}$ أى أن ص = $ص_١$

٤ المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) يكون المتجه $\overrightarrow{ص}$ = (٠ ، ١) متجه اتجاه له.

، معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (٠ ، ١)

، معادلته الكارتيزية : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{١}{٠}$ (غير معرف) أى أن س = $س_١$

٥ معادلة محور السينات هى : ص = ٠ أو $\overrightarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠)

٦ معادلة محور الصادات هى : س = ٠ أو $\overrightarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

مثال ٤

أوجد الصورة المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة و = (−٣ ، ٥)

الحل

∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل. ∴ المتجه ى = (−٣ ، ٥) متجه اتجاه لهذا المستقيم

، ميل المستقيم = $\frac{-٥}{٣}$

∴ المعادلة المتجهة هى : ر = ك ى ∴ ر = ك (−٣ ، ٥)

، المعادلة الكارتيزية هى : ص = م س

∴ ص = $\frac{-٥}{٣}$ س ∴ ٣ ص + ٥ س = ٠

متجه اتجاه العمودى على المستقيم

* **إذا كان :** ى = (أ ، ب) متجه اتجاه مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك (ب ، − أ) حيث ك ∈ ح* يكون متجه اتجاه العمودى على المتجه ى
* **إذا كان :** ن = (أ ، ب) عموديًا على خط مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التى على الصورة ك = (ب ، − أ) حيث ك ∈ ح* يكون متجه اتجاه المستقيم.

فمثلًا **إذا كان :** ى = (٤ ، ٥) متجه اتجاه مستقيم فإن متجه اتجاه العمودى عليه هو :

(٥ ، −٤) ، (−٥ ، ٤) ، (−١٠ ، ٨) ، ...

مثال ٥

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم ل الذى يمر بالنقطة و (−٣ ، ٢) وعمودى على المتجه ن = (١ ، ٤)

الحل

∵ ن = (١ ، ٤) عمودى على المستقيم ل ∴ ى = (٤ ، −١) متجه اتجاه للمستقيم ل

∴ المعادلة المتجهة هى : ر = و + ك ى ∴ ر = (−٣ ، ٢) + ك (٤ ، −١)

أى أن (س ، ص) = (−٣ ، ٢) + ك (٤ ، −١)

، المعادلتان الوسيطيتان هما : س = −٣ + ٤ ك ، ص = ٢ − ك

، المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٢}{س + ٣} = \frac{-١}{٤}$

أى أن ٤ ص − ٨ = −س − ٣

∴ الصورة العامة هى : س + ٤ ص − ٥ = ٠

ملاحظة

إذا كانت المعادلة العامة للمستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠ فإن :

* المتجه $\overset{\rightharpoonup}{ن}$ = (أ ، ب) = (معامل س ، معامل ص) هو متجه عمودى على المستقيم.
* المتجه $\overset{\rightharpoonup}{ى}$ = (ب ، –أ) هو متجه اتجاه لهذا المستقيم.

فمثلًا المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ٣ ص + ٧ = ٠ يكون :

المتجه $\overset{\rightharpoonup}{ن}$ = (٢ ، ٣) هو متجه عمودى عليه ، المتجه $\overset{\rightharpoonup}{ى}$ = (٣ ، –٢) هو متجه اتجاه له.

مثال ٦

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : ٣ س – ٢ ص + ١٢ = ٠

الحل

∵ المستقيم : ٣ س – ٢ ص + ١٢ = ٠

∴ المتجه $\overset{\rightharpoonup}{ن}$ = (٣ ، –٢) متجه عمودى عليه. ∴ المتجه $\overset{\rightharpoonup}{ى}$ = (٢ ، ٣) متجه اتجاه له.

وللحصول على الصورة المتجهة لمعادلة هذا المستقيم نبحث عن أى نقطة يمر بها وذلك بأن نعطى س (أو ص) أى قيمة ونوجد قيمة ص (أو س) المناظرة.

فبوضع س = ٠ نجد أن : –٢ ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = ٦

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٦) ∴ معادلته المتجهة هى : $\overset{\rightharpoonup}{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (٢ ، ٣)

حاول بنفسك

أوجد المعادلة المتجهة والكارتيزية للمستقيم ل الذى يمر بالنقطة (–٤ ، ١) والمتجه (–٣ ، ٦) عمودى عليه.

معادلة المستقيم بمعلومية ميله (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

∵ المستقيم ميله (م) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ)

أى أنه يقطع جزءًا من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد حـ

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية نجد أن : $\frac{\text{ص} - \text{حـ}}{\text{س} - ٠}$ = م

أى أن ص = م س + حـ

معادلة المستقيم بمعلومية الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

∴ ميل المستقيم (م) = $\frac{\text{ب} - ٠}{٠ - \text{أ}}$ = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية :

$\therefore \frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{-ب}{أ}$ $\therefore$ أ ص = − ب س + أ ب

$\therefore$ ب س + أ ص = أ ب «وبالقسمة على أ ب» $\therefore$ معادلة المستقيم هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

مثال ٧

أوجد المعادلة العامة لكل مما يأتى :

١ المستقيم $ل_١$ الذى ميله ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٧ وحدات طولية.

٢ المستقيم $ل_٢$ الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات.

الحل

١ معادلة المستقيم $ل_١$ هى : ص = م س + حـ $\therefore$ ص = ٣ س − ٧

٢ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ $\therefore \frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

أى ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

حاول بنفسك

أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم : ٣ س + ٨ ص − ٢٤ = ٠

ملاحظات

* **المعادلة :** أ س + ب ص + حـ = ٠ حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معًا تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

١ **إذا كان :** أ = ٠ ، ب ≠ ٠ **فإن :** ب ص + حـ = ٠ **أى أن** $ص = \frac{-حـ}{ب}$

وهى معادلة مستقيم موازى لمحور السينات ويمر بالنقطة $(٠ ، \frac{-حـ}{ب})$

٢ **إذا كان :** أ ≠ ٠ ، ب = ٠ **فإن :** أ س + حـ = ٠ **أى أن** $س = \frac{-حـ}{أ}$

وهى معادلة مستقيم موازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(\frac{-حـ}{أ} ، ٠)$

٣ **إذا كان :** حـ = ٠ **فإن :** أ س + ب ص = ٠

وهى معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل.

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠
* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع س = ٠

مثال ٨

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها الخط المستقيم : ٣ س + ٢ ص + ٦ = ٠

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم أوجد إحداثيات نقطتى تقاطعه مع محورى الإحداثيات.

الحل

∵ ميل المستقيم = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ∴ ظا هـ = $\frac{-٣}{٢}$

∵ الميل السالب. ∴ الزاوية منفرجة.

، ∵ قياس الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٢}$ هو ٥٦َ ١٩ً ٥٦° ∴ ق (∠ هـ) = ١٨٠° − ١٩َ ٥٦° = ٤١َ ١٢٣°

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ ∴ ٣ × ٠ + ٢ ص + ٦ = ٠

∴ ص = −٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −٣)

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ∴ ٣ س + ٢ × ٠ + ٦ = ٠

∴ س = −٢ ∴ نقطة التقاطع هى (−٢ ، ٠)

حل اخر لإيجاد نقطتى التقاطع مع محورى الإحداثيات :

∵ ٣ س + ٢ ص + ٦ = ٠

∴ ٣ س + ٢ ص = −٦ بالقسمة على −٦ ∴ $\frac{\text{س}}{-٢} + \frac{\text{ص}}{-٣} = ١$

∴ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (−٢ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٣)

مثال ٩

أثبت أن النقط : أ = (٤ ، −٣) ، ب = (−٦ ، ٧) ، حـ = (٥ ، −٤) تقع على استقامة واحدة.

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٧ + ٣}{-٦ - ٤}$ = −١ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{-٤ - ٧}{٥ + ٦}$ = −١

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

حل اخر : ∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} + ٣}{\text{س} - ٤} = \frac{-٤ + ٣}{٥ - ٤}$ = −١ أى ص + س − ١ = ٠

، ∵ النقطة ب = (−٦ ، ٧) تحقق المعادلة. ∴ ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ١٠

أوجد المعادلة العامة لكل من المستقيمات الآتية :

١ المستقيم $ل_١$ الذى يمر بالنقطة (٣ ، −١) وميله = $-\frac{٣}{٤}$

٢ المستقيم $ل_٢$ الذى يمر بالنقطة (٤ ، $\sqrt{٣}$) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٢٠°

٣ المستقيم $ل_٣$ الذى يمر بالنقطة (−٢ ، −٥) والمتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، ١) متجه اتجاه له.

٤ المستقيم $ل_٤$ الذى يمر بالنقطة (٤ ، −٢) والعمودى على المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (−١ ، ٥)

٥ المستقيم $ل_٥$ الذى يمر بالنقطة (−٣ ، ٧) ويوازى محور السينات.

٦ المستقيم $ل_٦$ الذى يمر بالنقطتين (٤ ، −٢) ، (٥ ، ٣)

٧ المستقيم $ل_٧$ الذى يمر بالنقطة (١ ، ٢) موازيًا المستقيم : ٢ س + ٣ ص − ٦ = ٠ .

٨ المستقيم $ل_٨$ الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) عموديًا على المستقيم الذى ميله $\frac{٥}{٢}$

الحـل

١ معادلة المستقيم $ل_١$ هى : $\frac{ص + ١}{س − ٣} = −\frac{٣}{٤}$ أى ٣ س + ٤ ص − ٥ = ٠ .

٢ ∵ ميل المستقيم $ل_٢$ = ظا ١٢٠° = $−\sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\frac{ص − \sqrt{٣}}{س − ٤} = −\sqrt{٣}$ أى ص + $\sqrt{٣}$ س = ٥ $\sqrt{٣}$

٣ ∵ ميل المستقيم $ل_٣$ = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٣$ هى : $\frac{ص + ٥}{س + ٢} = \frac{١}{٣}$ أى س − ٣ ص − ١٣ = ٠ .

٤ المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٥ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم $ل_٤$ ∴ ميله = $\frac{١}{٥}$

∴ معادلة المستقيم $ل_٤$ هى : $\frac{ص + ٢}{س − ٤} = \frac{١}{٥}$ أى س − ٥ ص − ١٤ = ٠ .

٥ معادلة المستقيم $ل_٥$ هى : ص = ٧ أى ص − ٧ = ٠ .

٦ ∵ ميل المستقيم $ل_٦$ = $\frac{٣ + ٢}{٥ − ٤}$ = ٥

∴ معادلة المستقيم $ل_٦$ هى : $\frac{ص + ٢}{س − ٤}$ = ٥ أى ٥ س − ص − ٢٢ = ٠ .

٧ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{−٢}{٣}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{−٢}{٣}$

∴ معادلته هى : $\frac{ص − ٢}{س − ١} = \frac{−٢}{٣}$ أى ٣ ص + ٢ س − ٨ = ٠ .

٨ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٥}{٢}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{−٢}{٥}$

∴ معادلته هى : $\frac{ص − ٣}{س − ٢} = \frac{−٢}{٥}$ أى ٢ س + ٥ ص − ١٩ = ٠ .

مثـال ١١

أ ب حـ مثلث رءوسه النقط : أ = (–١ ، ٥) ، ب = (٤ ، –٢) ، حـ = (–٣ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديًا على ب حـ

الحـل

∵ ب حـ = حـ − ب = (–٣ ، ٠) − (٤ ، –٢) = (–٧ ، ٢)

، ∵ المتجه ب حـ = (–٧ ، ٢) عمودى على المستقيم ل

∴ المتجه ى = (٢ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم ل

∴ ميل المستقيم = $\frac{٧}{٢}$

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة أ = (–١ ، ٥)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ٥}{س + ١} = \frac{٧}{٢}$ ∴ ٧ س + ٧ = ٢ ص − ١٠

أى ٧ س − ٢ ص + ١٧ = ٠

مثـال ١٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) وميله سالب والذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا مساحته ٦ وحدات مربعة.

الحـل

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى (أ ، ٠)

، الصادات فى (٠ ، ب)

∴ معادلته تكون على الصورة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

، ∵ (١ ، ٣) نقطة على المستقيم. ∴ $\frac{١}{أ} + \frac{٣}{ب} = ١$

∴ ب + ٣ أ = أ ب (١)

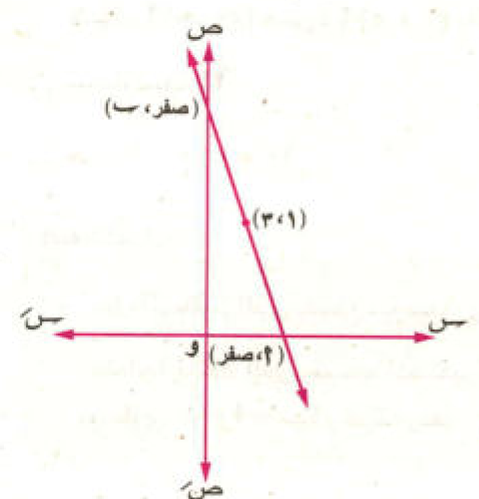
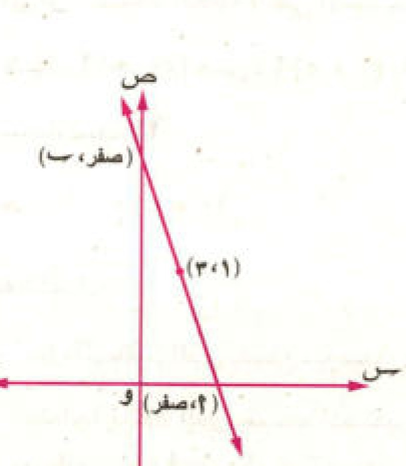
، ∵ مساحة المثلث = ٦ وحدات مربعة.

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٦

∴ أ ب = ١٢ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ب + ٣ أ = ١٢ ∴ ب = ١٢ − ٣ أ

وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore$ أ (١٢ − ٣ أ) = ١٢ $\therefore$ ١٢ أ − ٣ أ^{٢} = ١٢ $\therefore$ ٣ أ^{٢} − ١٢ أ + ١٢ = ٠

$\therefore$ أ^{٢} − ٤ أ + ٤ = ٠ $\therefore$ (أ − ٢)^{٢} = ٠ $\therefore$ أ = ٢ ومنها ب = ٦

$\therefore$ معادلة المستقيم هى : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ أى ٣ س + ص = ٦

مثال ١٣

أوجد مسقط النقطة أ (٥ ، ٠) على المستقيم ل : ٢ س + ص = ٥

ثم أوجد صورة النقطة أ بالانعكاس فى نفس المستقيم.

الحل

بفرض نقطة ب هى مسقط النقطة أ على المستقيم ل

$\because$ معادلة المستقيم ل هى ٢ س + ص = ٥ (١)

$\therefore$ ميل المستقيم ل = −٢

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى $\frac{ص - ٠}{س - ٥} = \frac{١}{٢}$

أى أن : س − ٢ ص = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : $\therefore$ س = ٣ ، ص = −١

$\therefore$ ب = (٣ ، −١)

أى أن : مسقط النقطة أ على المستقيم ٢ س + ص = ٥ هى النقطة ب = (٣ ، −١)

لإيجاد أَ (حـ ، ء) صورة أ (٥ ، ٠) بالانعكاس فى المستقيم ل

$\therefore$ ب منتصف $\overline{أأَ}$ $\therefore$ $\left(\frac{٥ + حـ}{٢} ، \frac{٠ + ء}{٢}\right) = (٣ ، −١)$

$\therefore$ حـ = ١ ، ء = −٢ $\therefore$ أَ = (١ ، −٢)

ملاحظات

١ ميل المستقيم الذى يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا متساوى الساقين يساوى ١ أو −١

٢ مساحة المثلث الذى يصنعه المستقيم $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ مع محورى الإحداثيات يساوى $\frac{١}{٢}$ | أ × ب | وحدة مربعة.



تمارين 6 على معادلة الخط المستقيم



من أسئلة الكتاب المدرسى — • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا: أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ (٣ ، −٢) ، ب (٥ ، ٦) فإن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ١

(٢) المستقيم الذى معادلته العامة : ٤ س + ٣ ص + ٥ = ٠ يكون ميله = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(٣) المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، −٢) ، (٥ ، ٣) يكون ميل المستقيم العمودى عليه = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) −٥ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٤) إذا كان ميل المستقيم : (٣ أ + ١) س − ٢ أ ص + ٣ = ٠ يساوى ٢ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان المستقيم : أ س − ٤ ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٠,٧٥
فإن : أ = ...

(أ) $\frac{-١٦}{٣}$ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١٦}{٣}$ (د) ٣

(٦) إذا كانت النقط : (١ ، ٨) ، (٣ ، ص) ، (٩ ، −٤) تقع على استقامة واحدة فإن : ص = ...

(أ) ١١ (ب) ٥ (جـ) −١١ (د) −٥

(٧) إذا توازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٢) والمستقيم ص = أ س − ٣
فإن : أ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(٨) إذا كان المستقيمان : ٣ س − ٢ ص + ٧ = ٠ ، أ س + ٣ ص + ٥ = ٠ متعامدين
فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) −١

(٩) ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ هو ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٠) المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون
متجه اتجاهه = ...

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (−١ ، ١) (د) (١ ، ١)

(١١) المستقيم الذى معادلته ص = $\frac{٥}{٤}$ س + ٧ يكون متجه اتجاهه = ...

(أ) (٥ ، ٤) (ب) (٤ ، ٥) (جـ) (–٥ ، ٤) (د) (٥ ، –٤)

(١٢) المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ له متجه اتجاه هو ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ ، –ب) (جـ) (ب ، أ) (د) (ب ، –أ)

(١٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ ، أ^٢) ، (ب ، ب^٢) هو ....

(أ) أ^٢ – ب^٢ (ب) أ – ب (جـ) أ + ب (د) أ ب

(١٤) إذا كان : $\overrightarrow{ى}$ = (٢ ، –٥) متجه اتجاه لمستقيم ما فإن جميع المتجهات التالية تكون متجهات اتجاه لنفس المستقيم ما عدا المتجه ....

(أ) (–٢ ، ٥) (ب) (٦ ، –١٥) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (–١ ، ٢.٥)

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{ى}$ = $\left(\frac{١}{٢} ، ١\right)$ متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودية على المستقيم عدا المتجه ....

(أ) $\left(١ ، -\frac{١}{٢}\right)$ (ب) (٢ ، –١) (جـ) $\left(-١ ، -\frac{١}{٢}\right)$ (د) (٤ ، –٢)

(١٦) إذا كان ميل المستقيم = $\frac{-٢}{٣}$ فإن متجه اتجاهه يكون ....

(أ) (٣ ، –٢) (ب) (–٣ ، ٢)

(جـ) (٦ ، –٤) (د) كل ما سبق صحيح.

(١٧) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهى اتجاه لمستقيمين متعامدين فإن : م = ...

(أ) $\frac{٢}{٩}$ (ب) $\frac{-٢}{٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (د) $\frac{-٩}{٢}$

(١٨) متجه اتجاه المستقيم العمودى على محور الصادات يمكن أن يكون ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (١ ، ١) (د) (١ ، –١)

(١٩) كل من العلاقات الآتية تمثل خطًا مستقيمًا ما عدا ....

(أ) ص = $\sqrt{٥}$ س (ب) س = ٥ (جـ) $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٢} = ١$ (د) ص = $\sqrt{س}$

(٢٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٣) هى ....

(أ) ٣ س + ٤ ص = ١٢ (ب) ٤ س + ٣ ص = ٢٥

(جـ) ٣ س – ٤ ص = ٠ (د) ٣ ص – ٤ س = –٧

(٢١) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، –٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س + ٣ = ٠ (ب) ص + ٣ = ٠ (جـ) س – ٢ = ٠ (د) ص – ٣ = ٠

(٢٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة (–٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص = ٢ (ب) ص = –٢ (جـ) س = ٧ (د) س = –٢

(٢٣) معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٥ وحدات هى ....

(أ) ص = س − ٥ (ب) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

(جـ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ س + ٥ (د) ص = س + ٥

(٢٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٢) عموديًا على المستقيم ص = ٧ هى ....

(أ) س = ٣ (ب) س = ٧ (جـ) ص = −٢ (د) ص = ٧

(٢٥) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السينى والصادى جزأين موجبين مقداراهما ٢ ، ٣ على الترتيب هى ....

(أ) ٣ س + ٢ ص = ٦ (ب) ٣ س + ٢ ص = ١

(جـ) ٢ س + ٣ ص = ٦ (د) ٢ س + ٣ ص = ١

(٢٦) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (−٤ ، ٣) ومتجه الاتجاه له (٢ ، ٥) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٤ ، ٣) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٢ ، ٥)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٥ ، ٢) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (٣ ، −٤)

(٢٧) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (١ ، ٢) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٢) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٢ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٠ ، ١)

(٢٨) الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ويوازى المستقيم الذى معادلته :

$\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −٥) + ك (٣ ، ٤) هى ....

(أ) ٣ س + ٥ = صفر (ب) ٤ س − ٣ ص = صفر

(جـ) ٥ س − ٢ ص = صفر (د) ٣ س − ٤ ص = صفر

(٢٩) المعادلة المتجهة لمحور السينات هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٠ ، ٠) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٠) + ك (١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

(٣٠) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = ك (٣ ، ٥) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٠) (د) $\overleftarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠)

(٣١) جميع المعادلات الآتية تمثل معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ما عدا المعادلة ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٥ ، −٢) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٥ ، −٢)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٢ ، ٥) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (−١٠ ، ٤)

(٣٢) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومتجه الاتجاه له (−١ ، ٤) هما ....

(أ) س = ١ − ك ، ص = ٥ + ٤ ك　　(ب) س = ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(جـ) س = ٥ + ٤ ك ، ص = − ك　　(د) س = − ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(٣٣) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويمر بالنقطة (٣ ، −٥) هما ....

(أ) س = ٣ + ك ، ص = −٥ + ك　　(ب) س = ٣ + ك ، ص = ٥ + ك

(جـ) س = ١ + ٣ ك ، ص = ١ − ٥ ك　　(د) س = ١ − ٣ ك ، ص = ١ + ٥ ك

(٣٤) المستقيم ل : س = ١ − ٢ ك ، ص = −١ + ٤ ك يمر بالنقطة ....

(أ) (١ ، ١)　　(ب) (١ ، −١)　　(جـ) (−١ ، −١)　　(د) (−١ ، ١)

(٣٥) المستقيم الذى معادلته المتجهة هى $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، −٥) يكون متجه اتجاه العمودى عليه = ...

(أ) (٣ ، −٥)　　(ب) (٢ ، −١)　　(جـ) (٥ ، ٣)　　(د) (−٥ ، ٣)

(٣٦) إذا كان المستقيمان : ٤ س + ب ص + ٩ = ٠ ، $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (٢ ، ٦) متوازيين فإن : ب = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$　　(ب) $\frac{٣}{٤}$　　(جـ) $\frac{-٤}{٣}$　　(د) $\frac{-٣}{٤}$

(٣٧) إذا مر مستقيم بالنقطة (٢ ، ١) وكان المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، ٣) عموديًا عليه فإن معادلة المستقيم هى ....

(أ) س + ٢ ص + ٥ = ٠　　(ب) س + ٣ ص − ٥ = ٠

(جـ) س − ٣ ص = ٠　　(د) ٣ س − ص − ٥ = ٠

(٣٨) المستقيم العمودى على المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ....

(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°　　(جـ) ١٢٠°　　(د) ١٥٠°

(٣٩) المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (٠ ، ١) يوازى ....

(أ) محور السينات.　　(ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم س = ص　　(د) المستقيم ص = ٢

(٤٠) 📖 مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم ٢ س + ٣ ص = ٦ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٦　　(ب) ٣　　(جـ) ٢　　(د) ١٢

(٤١) أى النقط الآتية تقع على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، ١) + ك (١ ، −٣) ؟

(أ) ($\frac{-٥}{٣}$ ، −٢)　　(ب) ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)　　(جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$)　　(د) ($\frac{-٧}{٣}$ ، ٢)

(٤٢) النقطة التى تقع على المستقيم : س = -١ + ٢ ك ، ص = ٢ - ك والتى إحداثيها السينى = ٣ هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٣ ، -١) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٢)

(٤٣) طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم : ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠ هو .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤٤) إذا كانت الصورة البارامترية لمعادلة مستقيم هى س = ٦ + ٣ ك ، ص = ١ - ٢ ك

فإن ميل هذا المستقيم = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ٦ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(٤٥) المستقيمان $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ ، $\frac{س}{-أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ يكونان ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان ومتعامدان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدان. (د) يتقاطعان فى النقطة (أ ، ٠)

(٤٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٥) وعمودى على المستقيم س + ٢ ص = ١١ هى ....

(أ) س - ٣ ص + ١٢ = ٠ (ب) س - ٣ ص - ١٢ = ٠

(جـ) ٢ س - ص - ١٤ = ٠ (د) ٣ س - ص + ١٤ = ٠

(٤٧) إذا كانت المعادلة البارامترية للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى س = ٤ ك - ١ ، ص = ٤

فإن ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) صفر. (جـ) ١ (د) غير معرف.

(٤٨) إذا كانت معادلتا المستقيمان الذين يحملان قطرا متوازى الأضلاع أ ب جـ ء هما س + ٣ ص = ٤ ، ٦ س - ٢ ص = ٧ فإن الشكل أ ب جـ ء يجب أن يكون ....

(أ) مستطيل. (ب) مربع. (جـ) رباعى دائرى. (د) معين.

(٤٩) إذا كان $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب جـ الذى فيه : أ (٢ ، ٢) ، ب (٦ ، -١) ، جـ (٧ ، ٣) ، فإن معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) موازيًا $\overline{أء}$ هى ....

(أ) ٢ س - ٩ ص - ٧ = ٠ (ب) ٢ س - ٩ ص - ١١ = ٠

(جـ) ٢ س + ٩ ص - ١١ = ٠ (د) ٢ س + ٩ ص + ٧ = ٠

(٥٠) معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، -١) ، ب (٤ ، ٣) هى ....

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س + ٢ ص = ٥

(جـ) ٢ س - ص = ٥ (د) س - ٢ ص = ٥

(٥١) إذا كانت النقطة (٤ ، ٦) هى منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها على محورى الإحداثيات فإن معادلة الخط المستقيم الذى يحمل هذه القطعة هى ....

(أ) ٣ س + ٢ ص = ٢٤ (ب) ٢ س − ٣ ص = −١٠

(جـ) ٤ س + ٦ ص = ٥٢ (د) ٣ س − ٢ ص = ٠

(٥٢) إذا كان : أ (١ ، −٢) ، ب (٣ ، −١) فإن معادلة المستقيم الذى يقسم $\overleftrightarrow{أب}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل على التعامد هى ....

(أ) ٤ س + ٢ ص = ٥ (ب) ٤ س + ٢ ص = ١٥

(جـ) ٨ س + ٤ ص = ٥ (د) ٨ س + ٤ ص = ١٥

(٥٣) إذا كانت النقطة (−٤ ، ٥) إحدى رؤوس مربع ، أحد قطريه يقع على المستقيم ٧ س − ص + ٨ = ٠ فإن معادلة القطر الآخر هى ....

(أ) س + ٣ ص = ١١ (ب) ٢ س − ٣ ص = −٢٣

(جـ) س + ٧ ص = ٣١ (د) ٢ س + ٣ ص = ٧

(٥٤) إذا كان المستقيم : أ س + ب ص = ١٢ يقطع جزءًا موجبًا من محور السينات طوله ٦ وحدات ، وجزءًا سالبًا من محور الصادات طوله ٤ وحدات فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) −٤ (د) −٢

(٥٥) معادلة الخط المستقيم الذى يقع على بعدين متساويين من المستقيمين ص = −٢ ، ص = ١٠ هى ....

(أ) ص = ٨ (ب) ص = ٤ (جـ) س = ٤ (د) س = −١٢

(٥٦) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة حـ (٣ ، ٤) ويقطع الجزئين الموجبين لمحورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب بحيث أ حـ : حـ ب = ٢ : ٣ هى ....

(أ) ٢ س + ص = ١٠ (ب) س + ٢ ص = ١٠

(جـ) ٢ س + ص = ٥ (د) س + ص = ١٠

(٥٧) مساحة المثلث المحدد بالمستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، ٣) وميله = $\frac{١}{٢}$ ومحورى الإحداثيات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥٨) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محورى الإحداثيات جزءين مجموعهما −١ هى ....

(أ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = ١$ (ب) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{١} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٣} = -١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = -١$ (د) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = -١$ ، $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{١} = ١$

(٥٩) فى الشكل المقابل :

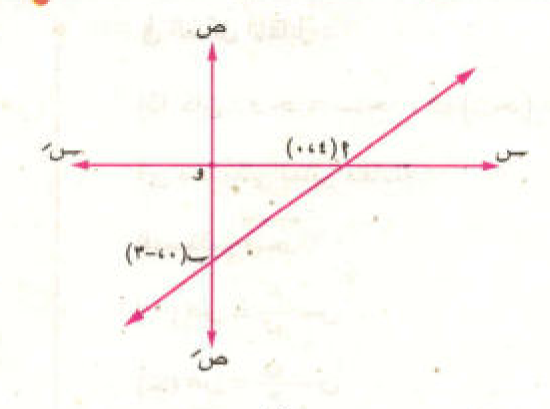
معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) ٤ س + ٣ ص = ١٢

(ب) ٣ س + ٤ ص = ١٢

(جـ) ٤ س − ٣ ص = ١٢

(د) ٣ س − ٤ ص = ١٢



(٦٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overline{أب}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

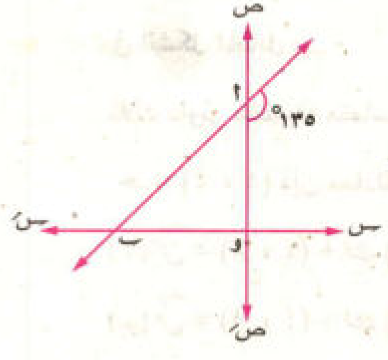
فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢} = ١$

(ب) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢} = -١$

(د) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢} = -١$



(٦١) فى الشكل المقابل :

إذا كان مساحة △ أ ب جـ = ٩ وحدة مربعة

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$

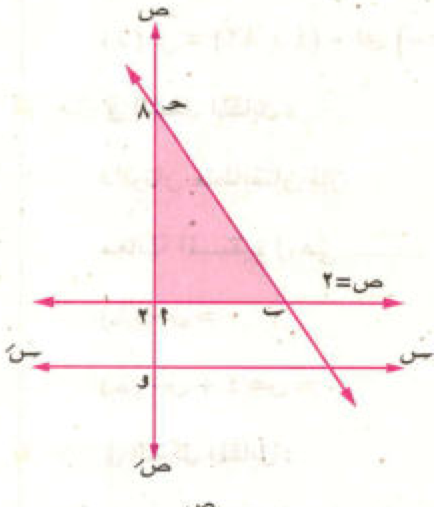
هى ....

(أ) ٣ س + ٢ ص − ١٦ = ٠

(ب) س + ص = ٨

(جـ) ٢ س − ص + ٨ = ٠

(د) ٢ س + ص − ٨ = ٠



(٦٢) فى الشكل المقابل :

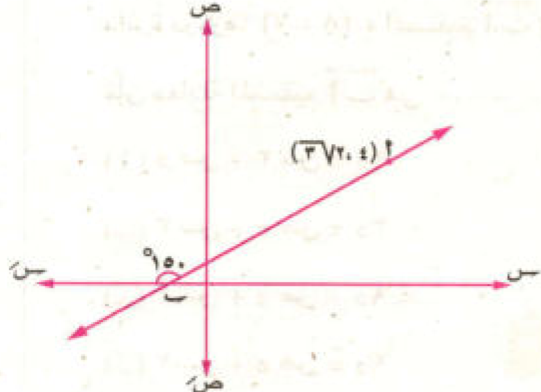
معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) س − $\sqrt{٣}$ ص − ١ = ٠

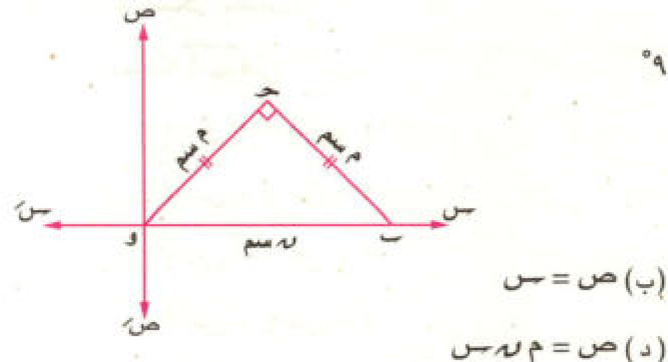
(ب) س − $\sqrt{٣}$ ص + ٢ = ٠

(جـ) $\sqrt{٣}$ س + ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

(د) ٣ س − $\sqrt{٣}$ ص − ٦ = ٠



(٦٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : و حـ = ب حـ ، ق (∠ حـ) = ٩٠°

أى مما يأتى يعتبر معادلة

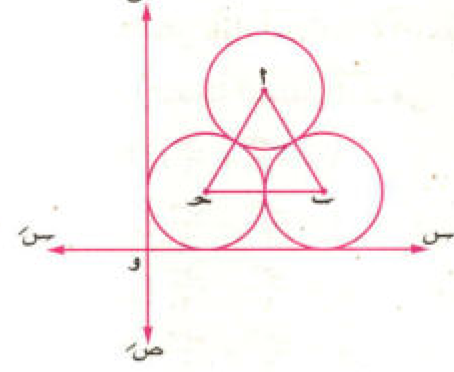
للمستقيم $\overleftrightarrow{وحـ}$ ؟

(أ) ص = $\frac{م}{ن}$ س (ب) ص = س

(جـ) ص = $\frac{ن}{م}$ س (د) ص = م ن س



(٦٤) في الشكل المقابل :



ثلاث دوائر متطابقة متماسة مثنى مثنى إذا كانت :

حـ = (٤ ، ٤) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

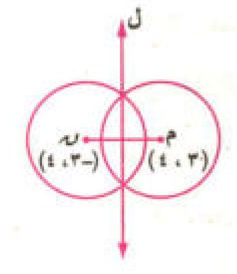
(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، ٤) + ك $(١ ، -\sqrt{٣})$

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٨ ، ٤) + ك $(١ ، -\sqrt{٣})$

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (١٢ ، ٤) + ك $(١ ، -\sqrt{٣})$

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (١٢ ، ٤) + ك $(-\sqrt{٣} ، ١)$

(٦٥) في الشكل المقابل :



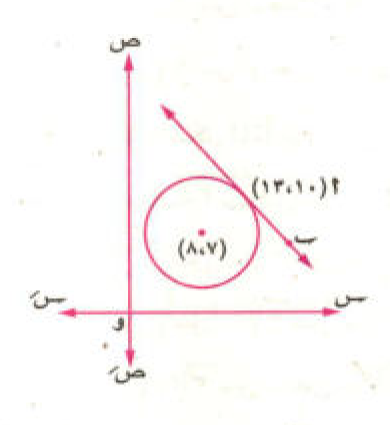
دائرتان متطابقتان فإن

معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠

(جـ) س + ٤ ص = ٠ (د) ٣ س + ٤ ص = ٠

(٦٦) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها (٧ ، ٨) ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس لها عند النقطة أ

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

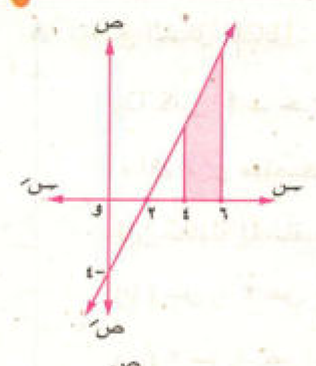
(أ) ٥ س + ٣ ص = ٩٥

(ب) ٣ س + ٥ ص = ٣٥

(جـ) ٣ س + ٥ ص + ٩٥ = ٠

(د) ٣ س + ٥ ص = ٩٥

(٦٧) فى الشكل المقابل :

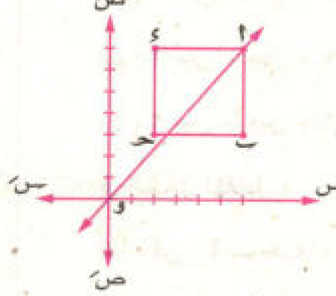


مساحة الشكل المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٦ (ب) ١٢

(جـ) ٨ (د) ٢٤

(٦٨) فى الشكل المقابل :



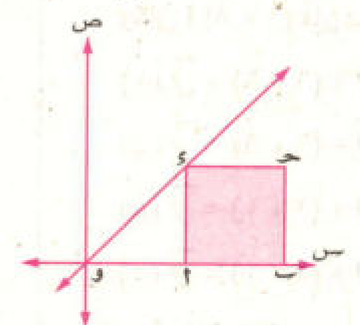
أ ب حـ ء مربع فيه : حـ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٣)

فإن معادلة $\overleftrightarrow{أو}$ هى ....

(أ) ٤ س - ٣ ص = ٠ (ب) ٦ س - ٣ ص = ٠

(جـ) ٧ س - ٦ ص = ٠ (د) ٥ س - ص = ٠

(٦٩) فى الشكل المقابل :



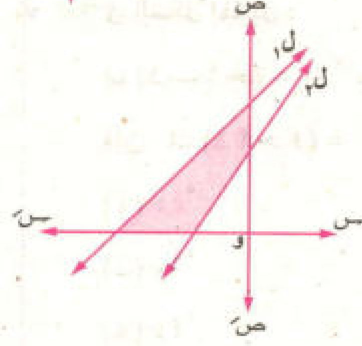
إذا كان : أ ب حـ ء مربع ، حـ (٩ ، ٥)

فإن معادلة $\overleftrightarrow{وء}$ هى ....

(أ) ٤ س - ٥ ص = ٠ (ب) ٤ س + ٥ ص = ٠

(جـ) ٥ س - ٤ ص = ٠ (د) ٥ س + ٤ ص = ٠

(٧٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان معادلة المستقيم ل١ هى س - ٢ ص + ١٢ = ٠

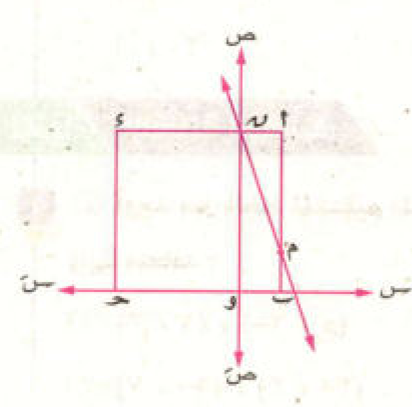
، معادلة المستقيم ل٢ هى س - ص + ٤ = ٠

فإن مساحة الشكل الرباعى المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦

(جـ) ٢٨ (د) ٣٠

(٧١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع فيه : ء (-٣ ، ٤)

، م أ = ٣ م ب فإن معادلة $\overleftrightarrow{من}$ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١ ، -٣)

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (٣ ، -١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك (١ ، ٣)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك (-١ ، ١)

(٧٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب جـ ء ، جـ هـ م ن مربعان متطابقان ، هـ (٠ ، ١)

، ل ، ر منتصف $\overline{هـ م}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ر ل}$ هي ....

(أ) س − ٢ ص + ٦ = ٠

(ب) ٢ س − ص + ٣ = ٠

(جـ) ٢ س − ص + ١٢ = ٠

(د) ٢ س − ص + ٦ = ٠

(٧٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب جـ ء ، و جـ م ن مستطيلان متطابقان

وكان أ (٨ ، ٦) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ن ء}$ هي ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٦) + ك (٢ ، ٣)

(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٦) + ك (−٣ ، ٢)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٣ ، ٢)

(د) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (−٢ ، ٣)

(٧٤) في الشكل المقابل :

ق (∠ب أ جـ) = ١٠° ، معادلة $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي : س + ص − ٢ = ٠

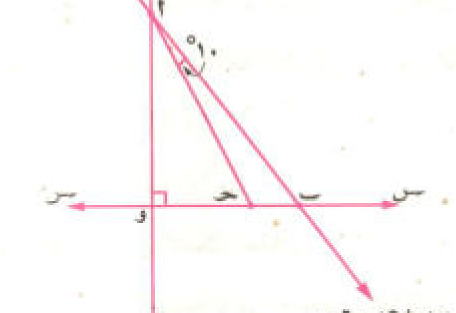
فإن : ق (∠أ جـ و) = ...

(أ) ٥٥°

(ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°

(د) ٣٠°



ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية ، وبين أيًا من هذه المستقيمات متوازيًا وأيها متعامد :

(١) (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٥)

(٢) (٤ ، ٠) ، (٢ ، −١)

(٣) (٧ ، −١) ، (٣ ، −٣)

(٤) (−٥ ، −٢) ، (−١ ، ٣)



٢ إذا كانت معادلتا المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ هما على الترتيب ٢ س − ٣ ص + أ = ٠ ، ٣ س + ب ص − ٦ = ٠

(١) أوجد ميل المستقيم $ل_1$

(٢) أوجد قيمة ب التى تجعل $ل_1$ ، $ل_2$ متوازيين.

(٣) أوجد قيمة ب التى تجعل $ل_1$ ، $ل_2$ متعامدين.

(٤) إذا كان المستقيم $ل_1$ يمر بالنقطة (١ ، ٣) **فأوجد قيمة : أ**

«$\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٩}{٢}$ ، ٢ ، ٧»

---

٣ أى المستقيمات الآتية يكون موازيًا لمحور الصادات ، وأيها يكون موازيًا لمحور السينات ، وأيها يمر بنقطة الأصل ، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محورى الإحداثيات (إن وجدت) :

(١) ٢ س + ٣ = ٠

(٢) س + ٣ ص = ٠

(٣) ٢ س + ٣ ص = ١٢

(٤) ص − ٥ = ٠

---

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى :

(١) يمر بالنقطة ن (٢ ، −١) والمتجه ى = (−٣ ، ٥) متجه اتجاه له.

(٢) يمر بالنقطة (٥ ، −١) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها °١٣٥

(٣) يمر بالنقطتين (٢ ، −٣) ، (٥ ، ١)

(٤) يمر بالنقطة (٢ ، −١) وميله = $\frac{١}{٢}$

(٥) يمر بالنقطة ن (٢ ، −٣) والمتجه ن = (−١ ، ٢) متجه اتجاه عمودى عليه.

(٦) يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويكون عموديًا على المستقيم ر = (٢ ، ٥) + ك (−٢ ، ١)

(٧) يمر بالنقطة ن (٣ ، ٥) عموديًا على المتجه أب حيث أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٤)

(٨) يحمل متجه الموضع أ = (٢ ، −٣)

---

٥ أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذى :

(١) يمر بالنقطة (٣ ، −٤) ويوازى المستقيم : س + ٢ ص − ٧ = ٠

(٢) يمر بالنقطة ن (−١ ، −٣) والمتجه أب حيث أ = (−٤ ، ٣) ، ب = (−٥ ، −٢) متجه اتجاه له.

(٣) يقطع طولًا قدره ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات والمتجه ى = (٧ ، −٣) متجه اتجاه له.

(٤) يقطع طولًا قدره ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات وميله = $-\frac{١}{٢}$

(٥) يقطع طولًا قدره ٢ وحدة من الجزء السالب لمحور السينات ويقطع طولًا قدره ٤ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات.

(٦) يمر بالنقطة (−٧ ، ٢ $\sqrt{3}$) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $(\frac{2\pi}{3})^{ء}$

(٧) يمر بالنقطة (٣ ، −٥) عموديًا على المستقيم : س + ٣ ص = ١١

(٨) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) عموديًا على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٥ ، ٤)

(٩) يكون عموديًا على $\overline{أب}$ من نقطة أ حيث أ = (−٣ ، ٦) ، ب = (٢ ، ١)

(١٠) يكون عموديًا على $\overline{أب}$ من نقطة المنتصف حيث : أ = (−٤ ، ١) ، ب = (−٢ ، ٣)

---

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) وميله = ٢ وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (٥ ، ب) فأوجد قيمتى : أ ، ب «٧ ، ٣»

---

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله م ، والمار بالنقطة (أ ، ٠) ما هى نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور الصادات ؟

---

٨ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : أ = (٤ ، −١) ، ب = (٢ ، ٣) يوازى المستقيم المار بالنقطتين حـ = (٢ ، ١) ، ء = (٣ ، −١) ثم أوجد معادلة كل من المستقيمين.

---

٩ إذا كانت : أ (٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (−٢ ، ٣) ثلاث نقط فى المستوى ، فأوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ، ثم أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

---

١٠ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم : ٢ س − ٣ ص + ١٢ = ٠

---

١١ أوجد معادلتى المستقيمين اللذين يمران بالنقطة (−٣ ، ٢) ويوازيان المحورين.

---

١٢ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٢) ويصنع زاوية موجبة جيب تمامها يساوى $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

---

١٣ إذا كانت : أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (−١ ، −٢) ، حـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل فأوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة حـ والنقطة (٢ ، ٣)

---

١٤ إذا كانت : أ = (١ ، ٤) ، ب = (−٤ ، ٦) فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ ويكون عموديًا على المستقيم ٥ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

---

١٥ الربط بالهندسة : $\overline{أب}$ قطر فى دائرة مركزها م فإذا كان : ب (−٧ ، ١١) ، م (−٢ ، ٣) فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ



١٦ الربط بالهندسة : إذا قطع المستقيم ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ محورى الإحداثيات السينى والصادى فى النقطتين أ ، ب على الترتيب فأوجد :

(١) مساحة سطح △ و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(٢) معادلة المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ ويمر بنقطة منتصفها.

---

١٧ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم الذى يمر بالنقطتين : (−٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)

---

١٨ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، −١) + ك (٢ ، ٥)

---

١٩ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٥ ، −٢) عموديًا على المستقيم الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءًا طوله ٤ وحدات ومن الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات.

---

٢٠ أثبت أن النقط : أ = (٢ ، −٣) ، ب = (٧ ، ٢) ، حـ = (١ ، ١) هى رؤوس مثلث وإذا كانت ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء : أ ب = ٢ : ٥ فأوجد إحداثيى النقطة ء ثم اكتب الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

---

٢١ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان :

(١) ل : ٣ ص + س = ٦

(٢) ل يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٢)

(٣) ل يقطع من محورى السينات والصادات جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٦ وحدات طولية على الترتيب.

(٤) ل : س = ٢ + ٣ ك ، ص = −١ + ٢ ك

(٥) المتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (√٣ ، ١) متجه اتجاه له.

(٦) المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (√٣ ، ١) متجه اتجاه العمودى عليه.

---

٢٢ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم ل : ٢ س − ٣ ص − ٦ = ٠

---

٢٣ أوجد الصورة المتجهة والصورة العامة لمعادلة المستقيم ل : س = ٣ − ٢ ك ، ص = −١ + ٣ ك

---

٢٤ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم ل : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$ = ١ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

---

٢٥ أوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (−٤ ، ٥)

---

٢٦ إذا كانت : أ (٥ ، −٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، −٣) ، فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وينصف $\overline{\text{ب حـ}}$

---

٢٧ أ ب حـ مثلث رءوسه النقط أ = (−١ ، ٥) ، ب = (٤ ، −٢) ، حـ = (−٣ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديًا على $\overline{\text{ب حـ}}$

٢٨ **أثبت أن المعادلتين :** $\overrightarrow{ر}$ = (−١ ، ٣) + ك (٦ ، −٤) ، $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، −١) + ك (−٣ ، ٢)
يمثلان نفس المستقيم.

---

٢٩ ٱ ب حـ ء مربع فيه : ٱ = (٣ ، ٢) ، حـ = (−١ ، ٤) أوجد معادلتى قطريه.

---

٣٠ **أثبت أن النقطة :** م = (٥ ، −٤) هى مركز الدائرة المارة برءوس المثلث ٱ ب حـ حيث :
ٱ = (١ ، −١) ، ب = (١ ، −٧) ، حـ = (٢ ، ٠) ثم أوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة ٱ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (ٱ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) يمر بالنقطة ....

(أ) (ٱ ، ب) (ب) ($\frac{1}{2}$ ٱ ، $\frac{1}{2}$ ب) (جـ) ($\frac{1}{3}$ ٱ ، $\frac{1}{3}$ ب) (د) ($\frac{1}{4}$ ٱ ، $\frac{1}{4}$ ب)

(٢) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم $ل_1$ هى ٱ ، ب على الترتيب وكانت الأجزاء المقطوعه من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم $ل_2$ هى ٢ ٱ ، ٢ ب على الترتيب فإن ....

(أ) $ل_1 \perp ل_2$ (ب) $ل_1 // ل_2$
(جـ) $ل_1 \cap ل_2$ = {(ٱ ، ب)} (د) غير ذلك.

(٣) إذا كان $ل_1$ مستقيم يمر بالنقطة ٱ (٢ ، ٣) ويصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإذا دار المستقيم $ل_1$ حول نقطة ٱ زاوية قياسها ١٥° فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم فى الوضع الجديد هى ....

(أ) ص − س = ١ (ب) ص + س = ١
(جـ) ٢ س + ص = ١ (د) ٢ س + ٣ ص = ٥

(٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويقطع جزئين متساويين فى الطول من محورى الإحداثيات يمكن أن تكون ....

(أ) س + ص = ٧ (ب) س − ص = −١
(جـ) ص + ٢ س = ١٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(٥) إذا كانت : ٱ (٣ ، −٥) ، ب (−٤ ، ٨) فإن النسبة التى يقسم بها المستقيم س + ص = ٠ القطعة المستقيمة $\overline{ٱب}$ من جهة ٱ هى ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٦) مسقط النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ل : س + ص = ١١ هو ....

(أ) (−٦ ، ٥) (ب) (٦ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٦) (د) (−٥ ، ٦)

(٧) صورة النقطة (٣ ، ٨) بالانعكاس فى المستقيم ل : س + ٣ ص – ٧ = ٠ هى ....

(أ) (–١ ، –٤) (ب) (–٣ ، –٨) (جـ) (١ ، –٤) (د) (٣ ، ٨)

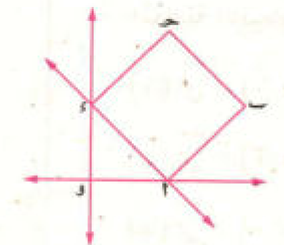
(٨) إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٠) هى صورة النقطة ب (٤ ، ٢) بالانعكاس فى المستقيم ل

فإن معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ٢ ص (ب) ٢ س + ص = ٥

(جـ) ٢ س – ص = ٥ (د) س + ص = ٦

(٩) الشكل المقابل :



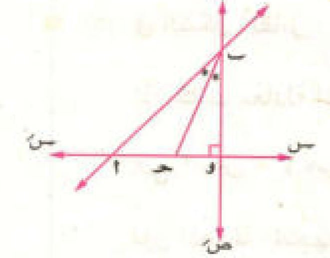
يمثل مربع أ ب جـ ء ، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أء}$ هى س + ص = ٤

فإن معادلة القطر $\overline{بء}$ هى ....

(أ) س = ٤ (ب) ص = ٤

(جـ) س + ص = ٢ (د) س + ص = ٤ $\sqrt{٢}$

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى : $\frac{ص}{٦} - \frac{س}{٨} = ١$

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ هى ....

(أ) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ (ب) $\frac{س}{-٣} + \frac{ص}{٦} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٦} - \frac{ص}{٢} = ١$ (د) س + ص = ١٨

(١١) فى الشكل المقابل :


مساحة Δ أ ب جـ = ... وحدة مربعة.

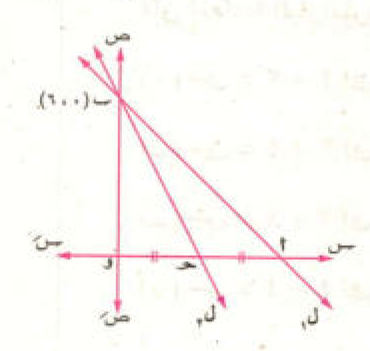
(أ) ١٥ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٤ (د) ٣٢

(١٢) فى الشكل المقابل :


إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ = ١٥ وحدة مربعة.

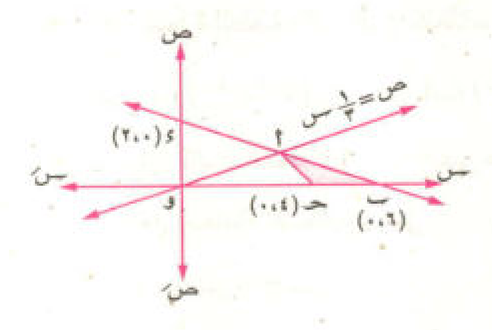
، جـ أ = جـ و فإن معادلة $ل_1$ هى ....



(أ) $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٦} = ١$ (ب) $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٥} = ١$

(جـ) $\frac{س}{١٠} + \frac{ص}{٦} = ١$ (د) $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{١٠} = ١$

(١٣) فى الشكل المقابل :



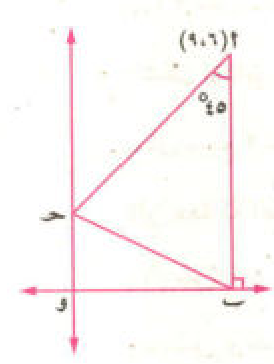
مساحة المثلث أ ب حـ

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) ١ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١٤) فى الشكل المقابل :



المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى ....

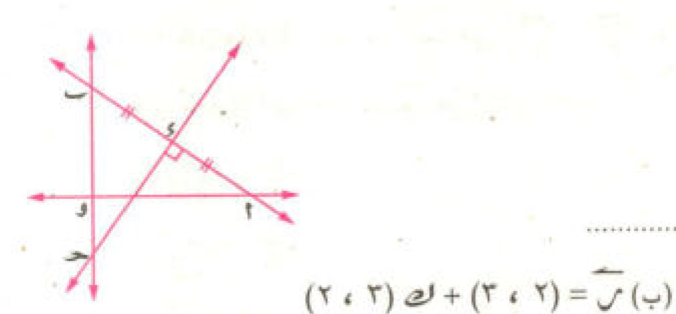
(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (٢ ، −١)

(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٢ ، −١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (−١ ، ٢)

(د) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (−١ ، ٢)

(١٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

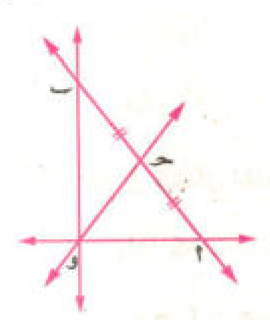
هى ٢ س + ٣ ص = ١٢

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٢ ، ٣) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٣ ، ٢)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، ٣) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٣ ، ٢)

(١٦) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٨} = ١$

فإن المعادلة البارامترية للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{و حـ}}$ هى ....

(أ) س = ٣ + ٤ ك ، ص = ٤ + ٣ ك

(ب) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(جـ) س = ٣ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(د) س = ٤ + ٤ ك ، ص = ٣ + ٣ ك



(١٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $ل_١ \cap ل_٢$ = {أ} ، وحـ = وء

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $ل_١$ هى ....

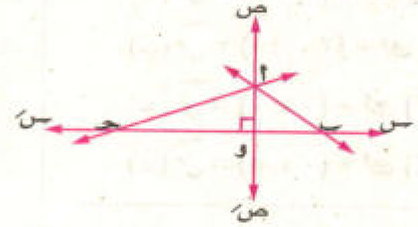
(أ) ر→ = (٠ ، ٢) + ك (١ ، √٣)

(ب) ر→ = (٠ ، ٢) + ك (–١ ، –١)

(جـ) ر→ = (٠ ، ٢) + ك (√٣ ، ١)

(د) ر→ = (٠ ، ٢) + ك (√٣ ، –١)

(١٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : وحـ = ٢ وب ، معادلة المستقيم أب↔

هى ٢ س + ٣ ص = ٦

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم أحـ↔ هى ....

(أ) ر→ = (–٦ ، ٠) + ك (١ ، ٣)　　(ب) ر→ = (–٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)

(جـ) ر→ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ٣)　　(د) ر→ = (٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)

(١٩) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المربع أبحـء = ٣٦ وحدة مربعة

، ء (–١٢ ، ٠) فإن المعادلة المتجهة للمستقيم هـب↔

هى ....

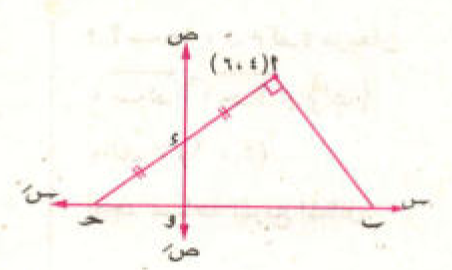
(أ) ر→ = (٠ ، ٣) + ك (٣ ، ٢)

(ب) ر→ = (٠ ، ٣) + ك (–٣ ، ٢)

(جـ) ر→ = (–٦ ، –٦) + ك (–٢ ، ٣)

(د) ر→ = (–٦ ، –٦) + ك (٢ ، ٣)

(٢٠) المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم أب↔ هما ....



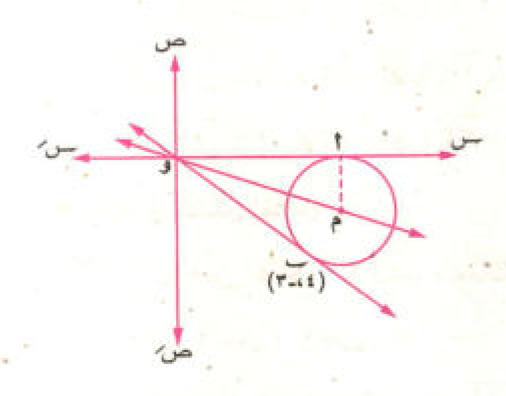
(أ) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ + ٤ ك

(ب) س = ٣ – ٤ ك ، ص = ٤ – ٦ ك

(جـ) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ – ٤ ك

(د) س = ٣ – ٤ ك ، ص = ٤ + ٦ ك

(٢١) في الشكل المقابل :

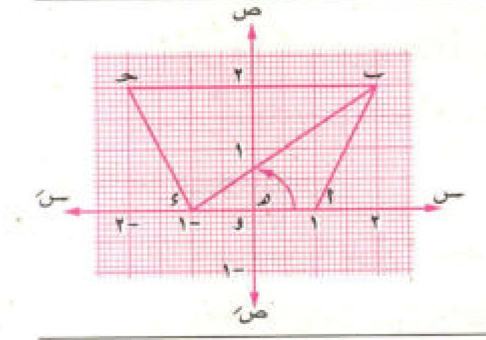


إذا كانت مساحة المستطيل و ب ء هـ = ٢٠ وحدة مربعة

فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

(أ) ٢ س + ص + ٢٠ = ٠
(ب) ٢ س + ص − ٢٠ = ٠
(جـ) ٢ س − ص = ٢٠
(د) ص = ٢ س + ٢٠

(٢٢) في الشكل المقابل :



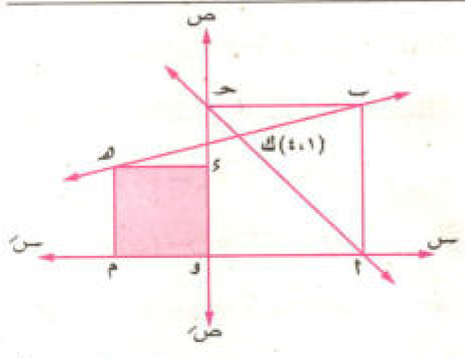
إذا كان : $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ مماسين للدائرة م عند أ ، ب

فإن المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{وم}$ هي ....

(أ) $\overline{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (−١ ، ٣)
(ب) $\overline{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٣ ، −١)
(جـ) $\overline{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (٣ ، −١)
(د) $\overline{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٣ ، −١)

---

٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب جـ ء شكلاً رباعيًا

أوجد :

(١) ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ ثم استنتج ق (∠ هـ)

(٢) معادلتي : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$

---

٣ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محوري الإحداثيات جزأين غير متساويين وموجبين مجموعهما ١٤

---

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) وميله سالب والذي يصنع مع محوري الإحداثيات مثلثًا مساحته ١٢ وحدة مربعة.

---

٥ في الشكل المقابل :

و أ ب جـ ، و م هـ ء مربعان

، $\overleftrightarrow{ب هـ} \cap \overleftrightarrow{جـ أ} = \{ك\}$

، ك = (١ ، ٤)

أوجد مساحة المربع المظلل.

«٩ وحدات مربعة»



الدرس

3

قياس الزاوية بين مستقيمين

بصفة عامة ينتج دائمًا من تقاطع المستقيمين زاويتان [إحداهما مكملة للأخرى]

إما قائمتان أو إحداهما حادة والأخرى منفرجة.

* إذا كانت هـ هي قياس الزاوية بين

المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ اللذين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$

فإن : $$طا\ هـ = \left| \frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2} \right|$$

حيث : $هـ \in [\,0 ، \frac{\pi}{2}\,]$ ، $م_1 = طا\ هـ_1$ ، $م_2 = طا\ هـ_2$

مع ملاحظة ما يأتي :

١ إذا كان ظل الزاوية موجبًا فإننا نحصل على الزاوية الحادة.

٢ إذا كان ظل الزاوية يساوي الصفر فإن قياس الزاوية بينهما يساوي الصفر [ويكون $م_1 = م_2$ والمستقيمان متوازيان أو منطبقان]

٣ إذا كان ظل الزاوية غير معرف فإن قياس الزاوية بينهما يساوي 90° [ويكون $م_1 م_2 = -1$ والمستقيمان متعامدان]

٤ قياس الزاوية المنفرجة = قياس مكملة الزاوية الحادة.

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_1 : س - 2ص + 5 = 0$ ، $ل_2 : 2س + 4ص - 7 = 0$

الحـل

> **! تذكر أن**
> ميل المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوي $\frac{-أ}{ب}$

$\because م_١ = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\therefore طا هـ = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}}{١ + (\frac{١}{٢})(\frac{-١}{٢})}\right| = \frac{٤}{٣}$

$\therefore هـ \simeq ٥٣° ٨'$

مثـال ٢

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$ل_١ : \overrightarrow{ر} = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ٣)$ ، $ل_٢ : \overrightarrow{ر} = (١ ، ٦) + ك' (٧ ، -١)$

الحـل

$\because م_١ = \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{٧}$ $\therefore طا هـ = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧}}{١ + (\frac{٣}{٤})(\frac{-١}{٧})}\right| = ١$

$\therefore هـ = ٤٥°$

حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $ل_١ :$ س + ٥ ص = ٣ ، $ل_٢ : \overrightarrow{ر} = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ١)$

مثـال ٣

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١ :$ س − ٢ ص + ١ = ٠

، $ل_٢ :$ س + ك ص + ٢ = ٠ يساوي ٤٥° فأوجد قيمة : ك

الحـل

$\because م_١ = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{ك}$ ، هـ = ٤٥° $\therefore طا ٤٥° = \left|\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}}\right|$

$\therefore ١ = \left|\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}}\right|$ $\therefore \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك}}{١ - \frac{١}{٢ك}} = \pm ١$

$\therefore$ إما $\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك} = ١ - \frac{١}{٢ك}$ $\therefore \frac{٣}{٢ك} = \frac{١}{٢}$ $\therefore ك = ٣$

أو $\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك} = \frac{١}{٢ك} - ١$ $\therefore \frac{١}{٢ك} = \frac{-٣}{٢}$ $\therefore ك = \frac{-١}{٣}$

مثال ٤

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ الذى رءوسه :

أ = (٦ ، ٥) ، ب = (٦ ، ١) ، حـ = (٣ ، ١)

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٥-١}{٦-٦}$ = $\frac{٤}{٠}$ (غير معرف) ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور الصادات (١)

، ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{١-١}{٦-٣}$ = $\frac{٠}{٣}$ = صفر ∴ $\overleftrightarrow{بحـ}$ يوازى محور السينات (٢)

، ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ = $\frac{٥-١}{٦-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ (٣)

من (١) ، (٢) : ∴ ق(∠ب) = ٩٠° ∴ ∠أ ، ∠حـ حادتان.

، من (٢) ، (٣) : ∴ طا حـ = $\left|\frac{\frac{٤}{٣} - \text{صفر}}{١ + \text{صفر} \times \frac{٤}{٣}}\right|$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٥٣° ٨َ ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٣° ٨َ) = ٣٦° ٥٢َ

ملاحظة

* لتعيين نوع المثلث أ ب حـ حسب زواياه (حيث أ حـ يمثل طول أكبر أضلاع المثلث) :

١ إذا كان : $(أحـ)^٢ > (أب)^٢ + (بحـ)^٢$ فإن المثلث منفرج الزاوية فى ب

٢ إذا كان : $(أحـ)^٢ = (أب)^٢ + (بحـ)^٢$ فإن المثلث قائم الزاوية فى ب

٣ إذا كان : $(أحـ)^٢ < (أب)^٢ + (بحـ)^٢$ فإن المثلث حاد الزوايا.

مثال ٥

أوجد قياسات زوايا المثلث الذى رؤوسه :

أ = (٤ ، ٣) ، ب = (−١ ، ١) ، حـ = (−٦ ، ٤) ثم أوجد مساحته.

الحل

∵ أ ب = $\sqrt{(٤+١)^٢ + (٣-١)^٢}$ = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

، ب حـ = $\sqrt{(-١+٦)^٢ + (١-٤)^٢}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول.

، أ حـ = $\sqrt{(٤+٦)^٢ + (٣-٤)^٢}$ = $\sqrt{١٠١}$ وحدة طول.

∴ $(أحـ)^٢ > (أب)^٢ + (بحـ)^٢$ ∴ Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى ب

∴ ∠ أ ، ∠ حـ حادتان.

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٣ - ١}{٤ + ١}$ = $\frac{٢}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $\frac{١ - ٤}{-١ + ٦}$ = $\frac{-٣}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ = $\frac{٣ - ٤}{٤ + ٦}$ = $\frac{-١}{١٠}$

∴ ظا أ = $\left| \frac{\frac{٢}{٥} + \frac{١}{١٠}}{١ - \frac{٢}{٥٠}} \right|$ = $\frac{٢٥}{٤٨}$ ∴ ق(∠ أ) ≃ ٢٨°

، ظا حـ = $\left| \frac{-\frac{٣}{٥} + \frac{١}{١٠}}{١ + \frac{٣}{٥٠}} \right|$ = $\frac{٢٥}{٥٣}$ ∴ ق(∠ حـ) ≃ ٢٥°

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٢٨° + ٢٥°) = ١٢٧°

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × أب × أحـ جا أ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٢٩}$ × $\sqrt{١٠١}$ × جا ٢٨°

≃ ١٢,٧ وحدة مربعة.

حاول بنفسك

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ إذا كان :

أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-١ ، ٣) ، حـ = (٢ ، ٥)

تمـارين 7 على قياس الزاوية بين مستقيمين

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلاهما ٢ ، $-\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميلاهما $\frac{-٣}{٤}$ ، -٧ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٤°

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ، ص = ٤ يساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ر = (٠ ، -٢) + ك (٣ ، -١)

، ل٢ : ر = (٠ ، ٥) + ك (٢ ، ١) يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : ٦ س - ٣ ص + ٥ = ٠ والمستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ يساوى ....

(أ) ١٣٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

(٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ص - $\sqrt{٣}$ س - ٥ = ٠ ، ل٢ : س - $\sqrt{٣}$ ص - ٦ = ٠

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٧) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ر = (٢ ، ٥) + ك (-٣ ، ١) ، ل٢ : ٢ س = ٣ - ص

يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٥٠°

(٨) قياس الزاوية بين المستقيمين ل١ : س + ٢ ص + ٥ = ٠ ، ل٢ : ر = (١ ، ٤) + ك (١ ، ٢)

يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٥°

(٩) قياس الزاوية بين المستقيمين ل١ : ر = (١ ، ٢) + ك (٣ ، -٤) ، ل٢ : ٤ س + ٣ ص - ٥ = ٠

هو ....

(أ) ٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٠) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ٢ س + ٣ ص = ١٥ ، ل٢ : ر = (-٢ ، -١) + ك (١ ، -٣)
يساوى تقريبًا ....

(أ) ٥٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٣٨°

(١١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١ : ٢ س - ص - ٣ = ٠ ، ل٢ : س = ك ، ص = ١ + ك
يساوى تقريبًا ....

(أ) ١٩° (ب) ٧١° (جـ) ١٨° (د) ٧٢°

(١٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س = ٣ ص ، س + ٢ ص = ٠ هو ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٣) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم : س - ٢ ص + ٣ = ٠ ، والمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، -١) ، (٢ ، ١) يساوى تقريبًا ....

(أ) ٣٤َ ٧١° (ب) ٢٨َ ١٩° (جـ) ٣٢َ ٧٠° (د) ٢٦َ ١٨°

(١٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\sqrt{3}$ س - ص = ٥ ، ص = ٢ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٢٠°

(١٥) قياس الزاوية بين المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (-٣ ، ٠) والمستقيم ص = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(١٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : ر = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) والمستقيم س = ٠
هو ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

(١٧) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : س = ٧ ، ص = أ س + ٢ يساوى ٩٠°
فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٩٠ (د) -١

(١٨) إذا كان : أ (-٢ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (-٢ ، -٤) فإن قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ هو ....

(أ) ظا$^{-1}$ (١) (ب) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٢}{٣}\right)$ (جـ) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ (د) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

(١٩) مجموعة قيم ك التى تجعل قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س + ك ص - ٨ = ٠
، ٢ س - ص - ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ هى ....

(أ) $\{٣ ، \frac{-١}{٣}\}$ (ب) $\{-٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (جـ) $\{٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (د) $\{٣\}$

(٢٠) معادلة المستقيم ل الذى ميله موجب ويمر بالنقطة (٤ ، ١) ويصنع مع المستقيم : ٣ س - ص + ٤ = ٠
زاوية ظل قياسها $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ) ص - س - ٣ = ٠ (ب) ص - س + ٣ = ٠

(جـ) ص + ٧ س - ٢٩ = ٠ (د) ص - ٧ س + ٢٩ = ٠

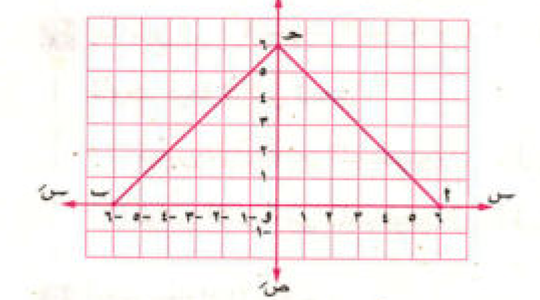
(٢١) قياس الزاوية بين المستقيمين أ س + ب ص + حـ = ٠ ، (أ + ب) س = (أ − ب) ص
يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٢٢) إذا كان : أ > ٠ ، ب > ٠ فإن قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ ، $\frac{س}{أ} - \frac{ص}{ب} = ١$
يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) ٢ $ظا^{-١} \left(\frac{ب}{أ}\right)$ (د) $ظا^{-١} \left(\frac{٢ أ ب}{أ^٢ + ب^٢}\right)$

(٢٣) يبين الشكل المقابل قطعة أرض مثلثة الشكل
إحداثيات رؤوسها هى : أ (٦ ، ٠) ، ب (−٦ ، ٠)
، حـ (٠ ، ٦) فإن :



أولًا : قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{أحـ}$ ومحور السينات
يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°
(جـ) ٤٥° (د) ١٣٥°

ثانيًا : قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

ثالثًا : المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ٠) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (٠ ، ١)
(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (−١ ، ١) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (١ ، ١)

رابعًا : المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$ هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (−١ ، ١) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (١ ، ١)
(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٦ ، ٠) + ك (−١ ، ١) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٦) + ك (١ ، ٠)

خامسًا : المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة حـ ، ويوازى $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) ص = ٦ (ب) س = ٦ (جـ) س + ص = ٦ (د) س − ص = ٦

سادسًا : مساحة سطح المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قياس الزاوية الحادة بين كل زوج من أزواج المستقيمات الآتية :

(١) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = ك (١ ، ٠) ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، −٢) + كَ (١ ، −٢)

(٢) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (١ ، ١) ، $ل_٢$: ٢ س − ص − ٣ = ٠

(٣) $ل_١$: س + ٢ ص + ٥ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س − ص − ٣ = ٠

(٤) $ل_١$: س + ٢ ص + ٣ = ٠ ، $ل_٢$: س − ٣ ص + ١ = ٠

(٥) $ل_١$: ٣ ص + ٢ س − ٦ = ٠ ، $ل_٢$: $\frac{س}{٥}$ − ص = ٣

(٦) $ل_١$: $\frac{-س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ١ ، $ل_٢$: ص − ٤ س = ٢

(٧) $ل_١$: ٣ ص = ٥ ، $ل_٢$: ٢ س + ٥ ص = ١

(٨) $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، −٣) + ك (١ ، −٢) ، $ل_٢$: س = ٣ + ٢ ك ، ص = ٣ ك − ١

---

٢ إذا كان $ل_١$: أ س − ٣ ص + ٧ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س + ٦ ص − ٥ = ٠ ، $ل_٣$: $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٢}$ = ٣

فأوجد قيمة أ التي تجعل :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هو صفر° «٢»

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٣$ هو ٩٠° «$\frac{٩}{٢}$»

---

٣ **أوجد معادلة المستقيم :**

(١) المار بالنقطة (−١ ، ٣) ويصنع مع المستقيم : س + ٢ ص + ٦ = ٠ زاوية ظل قياسها $\frac{١}{٧}$

(٢) المار بالنقطة (٢ ، −٢) ويصنع مع المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، −٤) زاوية قياسها ٤٥°

---

٤ إذا كان هـ هو قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ص + ٦ = ٠ ، أ س − ٢ ص + ٤ = ٠ حيث حتا هـ = $\frac{٤}{٥}$

فأوجد قيمة : أ «$\frac{٢}{٧}$ أ، ١٤»

---

٥ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : ك ص + س = ٦ ، ٢ س + ص = ٣ يساوى $\frac{٣}{٤}$

أوجد قيمة : ك «٢ أ، $\frac{-٢}{١١}$»

---

٦ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : ٣ س − ٥ ص − ١ = ٠ ، ك س − ص = ٣ يساوى ٤٥°

فأوجد قيمة : ك «$-\frac{١}{٤}$ أ، ٤»

---

٧ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : $\overleftarrow{ر}$ = $\left(٠ ، \frac{٩}{٢}\right)$ + ك (٢ ، ٣ أ)

، $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، ١) + ك̀ (١ ، ٢) يساوى $\frac{٢}{٣}$ **فأوجد قيمة : أ** «$\frac{٨}{٢١}$ أ، $\frac{-١٦}{٣}$»

---

٨ مستقيمان ميلاهما م ، $\frac{٣}{٨}$م وظل قياس الزاوية بينهما = $\frac{٥}{١١}$ ويمران بالنقطة (٣ ، −١)

أوجد معادلتيهما علمًا بأن م > ٠

---

٩ أ ب حـ مثلث فيه : أ = (٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، حـ = (−٢ ، −١)

أوجد قياس زاوية : أ «٦٨° ٦ ١٠٥°»

١٠ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ الذى رءوسه أ = (٤ ، ٧) ، ب = (-٢ ، -١) ، حـ = (٢ ، -٤)
«٣٤َ ٢٦° ، ٩٠° ، ٢٦َ ٦٣°»

١١ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (٥ ، ١) ، حـ = (-٢ ، ١)
ثم أوجد : مساحة المثلث لأقرب وحدة. «٧ وحدات مربعة»

١٢ أ ب حـ مثلث فيه : أ = (٠ ، ٥) ، ب = (٢ ، -١) ، حـ = (٦ ، ٣)
أثبت أن : المثلث متساوى الساقين ثم أوجد قياس زاوية أ
ثم أوجد : مساحته لأقرب رقمين عشريين. «٨َ ٥٣° ، ١٦ وحدة مربعة»

١٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ومعادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى $\vec{ر}$ = (١ ، ١) + ك (-١ ، ٣)
ومعادلة $\overleftrightarrow{أ ب}$ هى $\vec{ر}$ = (-١ ، ٥) + ك (١ ، ٢) أوجد : ق (∠ أ حـ ب) «٤٥°»

١٤ إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب حيث : أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٧) ، حـ (١ ، ص)
فأوجد قيمة : ص ، ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين. «١٠ ، ٤٥° ، ٤٥°»

١٥ أ ب حـ مثلث رءوسه أ = (-٣ ، ٢) ، ب = (-٣ ، -١٣) ، حـ = (٥ ، ٣) ، نصفت $\overline{ب حـ}$ فى ء
أوجد : قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ «١٩َ ٥٦°»

١٦ Δ أ ب حـ فيه : أ = (٥ ، ٧) ، ب = (١ ، ٥) ، حـ = (٤ ، ٢)
(١) **أوجد :** إحداثيى نقطة ء التى تقسم $\overline{ب حـ}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢
(٢) **أثبت أن :** $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$
(٣) **أثبت أن :** أ ء = ب حـ
(٤) **أوجد :** ق (∠ ب)
(٥) **أوجد مساحة سطح المثلث :** أ ب حـ

١٧ إذا كانت : أ = (٥ ، ٧) ، ب = (٦ ، -١) ، حـ = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٥)
فأثبت أن : المستقيم $\vec{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (-٢ ، ١) يصنع مع المستقيمين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ مثلثًا متساوى الساقين رأسه أ

١٨ أثبت أن المثلث الذى معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه هى :
٣ س + ٤ ص = ٣٦ ، س - ٧ ص + ١٣ = ٠ ، ٧ س + ص = ٩
هو مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين : ص = (٢ - $\sqrt{٣}$) (س + ٥) ، ص = (٢ + $\sqrt{٣}$) (س - ٧) هو ....

(أ) ١٥٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٢٠°

(٢) $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{١}{٢}$ ، ميل $ل_١$ يساوى ضعف ميل $ل_٢$

فإن ميل المستقيم $ل_٢$ = ...

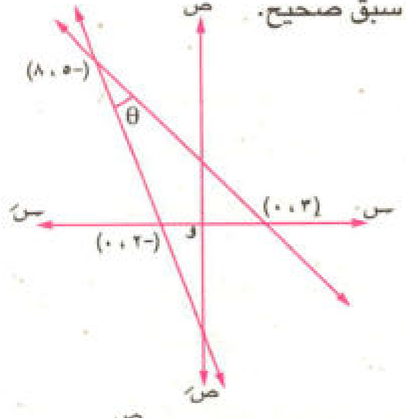
(أ) $\pm \frac{١}{٢}$

(ب) ± ١

(جـ) ١ ، $\frac{١}{٢}$

(د) جميع ما سبق صحيح.

(٣) فى الشكل المقابل :



طا θ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$

(ب) $\frac{٣}{١١}$

(جـ) $\frac{٥}{١١}$

(د) $\frac{٧}{١١}$

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : حتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

فإن النقطة ب = ...

(أ) (٨ ، ٠)

(ب) (٧ ، ٠)

(جـ) (٦ ، ٠)

(د) (٤ ، ٠)

(٥) فى الشكل المقابل :

ك = ...

(أ) $\frac{-٣}{٤}$

(ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$

(د) $\frac{٣}{٢}$

(٦) فى الشكل المقابل :

ك = ...

(أ) ٣

(ب) -٣

(جـ) $\frac{٩}{٢}$

(د) $\frac{-٩}{٢}$

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي س + ٢ ص + ٦ = ٠

وكان ب حـ = ٢ أ حـ

فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{١١}{١٠}$

(ب) $\frac{٢}{١١}$

(جـ) $\frac{١٠}{١١}$

(د) $\frac{١١}{٢}$

(٨) إذا دار المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ٢) حول نقطة أ بزاوية قياسها ٤٥° في اتجاه ضد عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ في وضعه الجديد هي ....

(أ) ٣ س + ص = ٦

(ب) س – ٣ ص = ٢

(جـ) س + ٣ ص = ٦



(د) س + ٣ ص = –٢

(٩) في الشكل المقابل :

ظا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$

(ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{١}{٣}$

(د) $\frac{١}{٣\sqrt{٢}}$

---

٢ أوجد معادلة أحد الضلعين المتساويين في المثلث القائم الزاوية إذا كانت معادلة الوتر هي ٣ س + ٤ ص + ٤ = ٠ ونقطة رأس الزاوية القائمة هي (٢ ، ٢)

«س – ٧ ص + ١٢ = ٠ أ، ٧ س + ص – ١٦ = ٠»

---

٣ إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية جيب تمامها يساوي $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ مع الخط المستقيم

لَ : ٣ س – ص + ٥ = ٠ . **فما هو ميل الخط المستقيم ل ؟**

أوجد : معادلة الخط المستقيم ل إذا كان يمر بالنقطة (١ ، –٢)

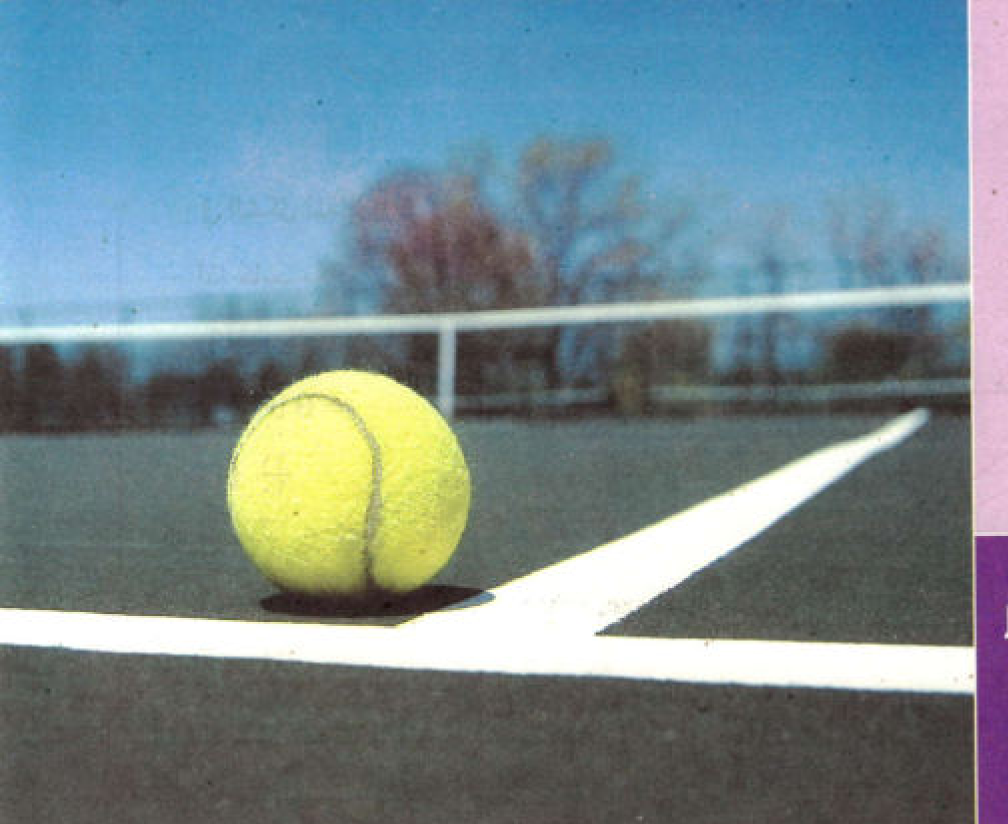
«غير معرف أ، $\frac{٤}{٣}$»

---

٤ أثبت أن الزاوية بين المستقيمين : ص = $\frac{١ + ب}{١ - ب}$ س + ٦ ، ص – ب س + ١ = ٠

قياسها ثابت لجميع قيم ب ≠ ١ وأوجد قياس هذه الزاوية.

«٤٥°»



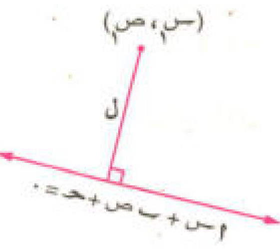
الدرس

4

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

* طول العمود (ل) المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

إلى الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + حـ = ٠



يتحدد من العلاقة : طول العمود (ل) = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

ملاحظات هامة

١ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) على المستقيم :

أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوى الصفر فإن النقطة تكون واقعة على المستقيم.

٢ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل (٠ ، ٠) على المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوى $\frac{|حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

٣ طول العمود المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) على محور السينات = |$ص_١$|

٤ طول العمود المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) على محور الصادات = |$س_١$|

٥ إذا كانت ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين فى المستوى الذى يحوى الخط المستقيم

أ س + ب ص + حـ = ٠ وكان المقداران أ $س_١$ + ب $ص_١$ + حـ

، أ $س_٢$ + ب $ص_٢$ + حـ لهما نفس الإشارة كانت النقطتان على جانب واحد من الخط المستقيم وإن اختلفا فى الإشارة كانت النقطتان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم.

مثال ١

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٢) + ك (٤ ، −٣)

الحل

∵ المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٢) + ك (٤ ، −٣) يمر بالنقطة (−١ ، ٢) وميله = $\frac{-٣}{٤}$

∴ الصورة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٣}{٤}$ ∴ ٤ ص − ٨ = −٣ س − ٣

∴ الصورة العامة هى : ٣ س + ٤ ص − ٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٣(٣) + ٤(٥) - ٥|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}}$ = ٤,٨ وحدة طول.

حاول بنفسك

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، ٣) إلى الخط المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٤ ، ٣)

مثال ٢

أوجد بُعد النقطة أ = (٢ ، ٤) عن المستقيم المار بالنقطة ب = (−٢ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{٦}$

الحل

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطة ب = (−٢ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{٦}$ هى :

$\frac{ص - ٠}{س + ٢} = \frac{٥}{٦}$ أى ٥ س − ٦ ص + ١٠ = ٠

∴ البُعد = طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستقيم

= $\frac{|٥ \times ٢ - ٦ \times ٤ + ١٠|}{\sqrt{٢٥ + ٣٦}} = \frac{٤}{\sqrt{٦١}}$ وحدة طول.

لاحظ أن

بعد نقطة عن مستقيم تعنى طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى هذا المستقيم.

مثال ٣

إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٧ ، حـ) إلى المستقيم : ٦ س − ٨ ص + ١٧ = ٠

يساوى ٣,٥ وحدة طول فأوجد قيمة : حـ

الحل

∵ $\frac{٧}{٢} = \frac{|٦ \times ٧ - ٨ \times حـ + ١٧|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$ ∴ $\frac{٧}{٢} = \frac{|٥٩ - ٨ حـ|}{١٠}$

∴ ٣٥ = |٥٩ − ٨ حـ| ∴ ٥٩ − ٨ حـ = ٣٥ أ، ٥٩ − ٨ حـ = −٣٥

∴ −٨ حـ = −٢٤ أ، −٨ حـ = −٩٤ ∴ حـ = ٣ أ، حـ = $\frac{٤٧}{٤}$

مثال ٤

مستقيم طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٥) عليه يساوى ٣ وحدات والمتجه (٣ ، ٤) متجه اتجاه له أوجد معادلة هذا المستقيم.

الحل

∵ المتجه (٣ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم. ∴ المتجه (٤ ، -٣) متجه عمودى على المستقيم.

∴ معادلة المستقيم هى : ٤ س - ٣ ص + حـ = ٠

، ∵ طول العمود عليه من النقطة (٢ ، ٥) = ٣ وحدة طول.

∴ $\frac{|٤ \times ٢ - ٣ \times ٥ + حـ|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٣$ ∴ |٨ - ١٥ + حـ| = ٣ × ٥ ∴ |حـ - ٧| = ١٥

∴ حـ - ٧ = ± ١٥ ∴ حـ = ٧ + ١٥ = ٢٢

∴ معادلة المستقيم هى : ٤ س - ٣ ص + ٢٢ = ٠

أ، حـ = ٧ - ١٥ = -٨

أ، ٤ س - ٣ ص - ٨ = ٠

مثال ٥

أ ب حـ مثلث رءوسه أ = (١ ، ٥) ، ب = (٥ ، -٣) ، حـ = (١ ، ٠) أوجد مساحته.

الحل

نعتبر أحد الأضلاع وليكن $\overline{ب حـ}$ هو قاعدة المثلث ونوجد الارتفاع وهو طول العمود من أ إلى الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ونوجد كذلك طول $\overline{ب حـ}$ ثم نحسب مساحة المثلث كما يلى :

∵ ب حـ = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (٠ + ٣)^٢} = \sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ وحدات طولية.

، معادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى : $\frac{ص + ٣}{س - ٥} = \frac{٠ + ٣}{١ - ٥} = \frac{٣}{-٤}$ أى ٣ س + ٤ ص - ٣ = ٠

∴ طول العمود من أ إلى $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{|٣ \times ١ + ٤ \times ٥ - ٣|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٣ + ٢٠ - ٣|}{٥} = \frac{٢٠}{٥}$ = ٤ وحدات طولية.

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤ = ١٠ وحدات مربعة.

حاول بنفسك

إذا كانت النقط : أ = (-٣ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٢) ، حـ = (-١ ، ٥) تمثل رؤوس مثلث أوجد :

١ طول $\overline{ب حـ}$

٢ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

٣ طول العمود الساقط من أ على $\overleftrightarrow{ب حـ}$

٤ مساحة Δ ب أ حـ

مثال ٦

أوجد مساحة الدائرة التى مركزها النقطة م (١ ، ٢) ويمسها المستقيم الذى معادلته :

ل : ٦ س + ٨ ص − ٢ = ٠ (حيث π = ٣,١٤)

الحل

∵ طول العمود المرسوم من المركز م (١ ، ٢) على المماس ل = $\frac{|٦ \times ١ + ٨ \times ٢ - ٢|}{\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$ وحدة طول.

، ∵ طول نصف قطر الدائرة = طول العمود المرسوم من المركز على المماس ل

∴ نق = ٢ وحدة طول. ∴ المساحة = π نق^٢ = ٣,١٤ × ٤ = ١٢,٥٦ وحدة مربعة.

مثال ٧

أثبت أن النقطتين : أ = (٣ ، ١) ، ب = (−٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم ل : ٣ س − ٤ ص + ٦ = ٠ وعلى بُعدين متساويين منه.

الحل

∵ طول العمود من أ على الخط المستقيم ل = $\frac{|٣ \times ٣ - ٤ \times ١ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول.

، طول العمود من ب على الخط المستقيم ل = $\frac{|٣(-٣) - ٤(٢) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول.

∴ أ ، ب على بُعدين متساويين من الخط المستقيم ل

، ∵ المقدار : ٣ س − ٤ ص + ٦ له إشارتان مختلفتان ١١ ، −١١

عند التعويض بإحداثيي كل من النقطتين أ ، ب

∴ النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم ل

مثال ٨

أثبت أن المستقيمين ل$_١$ ، ل$_٢$ متوازيان وأوجد البُعد بينهما فى كل مما يأتى :

١ ل$_١$: س − ٢ ص + ١١ = ٠ ، ل$_٢$: ٢ س − ٤ ص + ٧ = ٠

٢ ل$_١$: $\vec{ر}$ = (٢ ، −٥) + ك (٣ ، −٤) ، ل$_٢$: $\vec{ر}$ = (١ ، ٤) + ك$'$ (−٦ ، ٨)

الحل

١ ∵ ميل المستقيم ل$_١$ = $\frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

، ميل المستقيم ل$_٢$ = $\frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

∴ الميلان متساويان.

∴ المستقيمان متوازيان.

ملاحظة

لإيجاد البُعد بين ل$_١$ ، ل$_٢$ نعين نقطة على أحد المستقيمين ونوجد طول العمود الساقط منها على المستقيم الآخر.

* فبوضع س = ١ مثلاً في معادلة المستقيم $ل_١$

∴ ص = ٦ ∴ (١ ، ٦) ∈ $ل_١$

∴ البُعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم

من النقطة (١ ، ٦) على المستقيم $ل_٢$

$= \frac{|٢ \times ١ - ٤ \times ٦ + ٧|}{\sqrt{٤ + ١٦}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$ وحدة طول.

ملاحظة

البعد بين المستقيمين المتوازيين

أ س + ب ص + حـ = ٠ ، أ س + ب ص + ء = ٠

يساوي $\frac{|حـ - ء|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

٢ المتجه ى = (٣ ، −٤) متجه اتجاه للمستقيم $ل_١$

، المتجه ىَ = (−٦ ، ٨) متجه اتجاه للمستقيم $ل_٢$

، ∵ ىَ = (−٦ ، ٨) = −٢ (٣ ، −٤) = −٢ ى ∴ $ل_١ // ل_٢$

، ∵ النقطة ﻫ = (٢ ، −٥) ∈ $ل_١$

، ∵ $ل_٢$: س = ١ − ٦ كَ ، ص = ٤ + ٨ كَ ∴ $ل_٢$: $\frac{س - ١}{-٦} = \frac{ص - ٤}{٨}$

∴ $ل_٢$: ٤ س + ٣ ص − ١٦ = ٠

∴ البعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، −٥) على المستقيم $ل_٢$

$= \frac{|٤ \times ٢ + ٣ (-٥) - ١٦|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = ٤,٦$ وحدة طول.

مثال ٩

أثبت أن النقطة : (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفي الزاوية بين المستقيمين :

ل : ٩ س − ١٣ ص − ٨ = ٠ ، لَ : س = ٥ + ٣ ك ، ص = ك + ٣

الحل

النقطة تقع على أحد منصفي الزاوية بين المستقيمين ل ، لَ إذا كانت على بُعدين متساويين من المستقيمين.

بُعد النقطة (٤ ، ٦) عن المستقيم ل $= \frac{|٩ \times ٤ - ١٣ \times ٦ - ٨|}{\sqrt{٨١ + ١٦٩}} = \frac{|٣٦ - ٧٨ - ٨|}{\sqrt{٢٥٠}}$

$= \frac{|-٥٠|}{٥\sqrt{١٠}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول (١)

، معادلة لَ هي : $\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٣}{١}$ أي : س − ٣ ص + ٤ = ٠

∴ بُعد النقطة (٤ ، ٦) عن المستقيم لَ $= \frac{|٤ - ٣ \times ٦ + ٤|}{\sqrt{١ + ٩}} = \frac{|-١٠|}{\sqrt{١٠}}$

$= \sqrt{١٠}$ وحدة طول (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ النقطة (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفي الزاوية بين المستقيمين ل ، لَ

تمارين 8 على طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم



من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) −٣

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) −٣

(٣) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم ٣ س − ٤ ص − ١٥ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى الخط المستقيم : ٤ س + ٣ ص − ٥ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، −٤) إلى الخط المستقيم س + ٥ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٠ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) −٥

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم س + ص = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) ٠

(٧) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (٤ ، ٣)

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(٨) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٤) على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٦ ، ٨)

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٫٦ (ب) ٢٫٦ (جـ) ٠٫٦ (د) ٣٫٦

(٩) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٥) على المستقيم ل : س = −٢ + ٤ ك ، ص = −٣ ك

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٠) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، –٣) ، (١ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –٣) والمتجه (٢ ، –١) متجه اتجاه له يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) ٢ $\sqrt{5}$ (جـ) ٣ $\sqrt{5}$ (د) ٤ $\sqrt{5}$

(١٢) أ ب جـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٧) ، ب (٧ ، –١) ، جـ (٣ ، ٢) فإن طول العمود النازل من أ إلى $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يساوى .... وحدة طول.

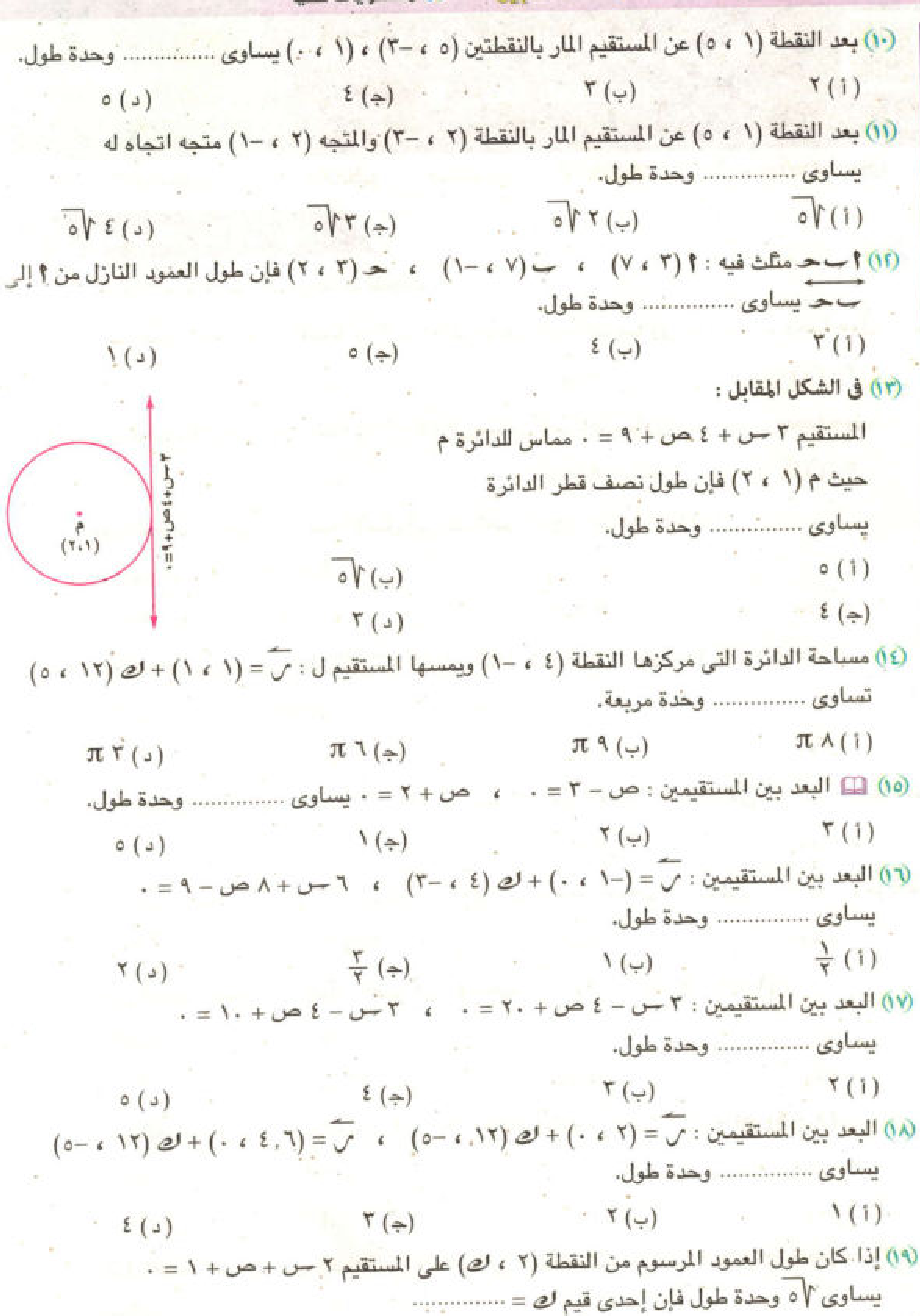
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(١٣) فى الشكل المقابل :

المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ مماس للدائرة م

حيث م (١ ، ٢) فإن طول نصف قطر الدائرة

يساوى .... وحدة طول.



(أ) ٥ (ب) $\sqrt{5}$

(جـ) ٤ (د) ٣

(١٤) مساحة الدائرة التى مركزها النقطة (٤ ، –١) ويمسها المستقيم ل : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١٢ ، ٥) تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٨ π (ب) ٩ π (جـ) ٦ π (د) ٣ π

(١٥) البعد بين المستقيمين : ص – ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٥

(١٦) البعد بين المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (–١ ، ٠) + ك (٤ ، –٣) ، ٦ س + ٨ ص – ٩ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) ٢

(١٧) البعد بين المستقيمين : ٣ س – ٤ ص + ٢٠ = ٠ ، ٣ س – ٤ ص + ١٠ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٨) البعد بين المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٠) + ك (١٢ ، –٥) ، $\overrightarrow{ر}$ = (٦،٤ ، ٠) + ك (١٢ ، –٥) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٩) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ك) على المستقيم ٢ س + ص + ١ = ٠ يساوى $\sqrt{5}$ وحدة طول فإن إحدى قيم ك = ...

(أ) –٤ (ب) –٥ (جـ) –٨ (د) –١٠

(٢٠) إذا كان البعد بين المستقيمين ل١ : ٣ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ ، ل٢ : ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠

يساوى ٣ وحدات طول ، حـ > ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ٥٤ (ب) ٦ (جـ) ٣٠ (د) ٣

(٢١) فى الشكل المقابل :

طول العمود المرسوم من نقطة أ على المستقيم ب حـ ←→

يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٢) فى الشكل المقابل :

طول أ ب = ... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢

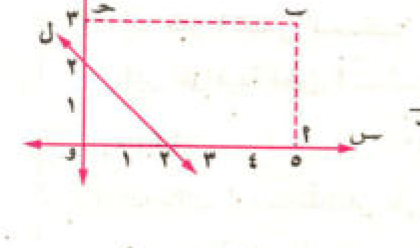
(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) معادلة أحد المستقيمين الذى ميله = $-\frac{٥}{١٢}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة طول هى ....

(أ) ٥ س + ١٢ ص − ٢٨ = ٠ (ب) ٥ س + ١٢ ص − ٢٤ = ٠

(جـ) ٥ س + ١٢ ص + ٢٤ = ٠ (د) ٥ س − ١٢ ص + ٢٨ = ٠

(٢٤) فى الشكل المقابل :



طول العمود المرسوم من النقطة ب على المستقيم ل

يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٣ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٦}$

(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م دائرة ، أ ب ←→ مماسًا لها وكانت معادلة المستقيم أ م ←→

هى س − ٣ ص + ٤ = ٠ ، كانت النقطة ب (٤ ، −٤)

فإن : ب حـ × ب ء = ... وحدة مربعة.

(أ) −٢ (ب) ٢ $\sqrt{١٠}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٥}$ (د) ٤٠

(٢٦) مربع فيه معادلتى المستقيمين الحاملين لضلعين متقابلين فيه هما ص = ٣ ، ص = −٢

فإن معادلتى المستقيمين الحاملين للضلعين الآخرين يمكن أن يكونا ....

(أ) ص = ٣ ، ص = −٢ (ب) س = ٣ ، س = ٢

(جـ) س = ٧ ، س = ٢ (د) ص = ٤ ، ص = −١



(٢٧) في الشكل المقابل :

ارتفاع القطعة الدائرية

الصغرى المظللة = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٢ (د) ١



(٢٨) في الشكل المقابل :

قطاع دائري ، المستقيم ل مماسًا لدائرته

فإن : أ م = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{٧}{١٣}$ (د) ٣



(٢٩) إذا كان المستقيم ل يمر بنقطة الأصل وكانت النقطتان (١ ، −٢) ، (٣ ، ٤) على أبعاد متساوية من المستقيم ل فإن ميل المستقيم ل يساوي ....

(أ) ٣ أو $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ أو $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ أو ٣ (د) $\frac{١}{٢}$ أو ٢

(٣٠) لجميع قيم θ فإن طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم : س جتا θ + ص جا θ = ل يساوي ....

(أ) $|ل|$ (ب) $|ل \text{ جتا } \theta|$ (جـ) $|ل \text{ جا } \theta|$ (د) $\left|\frac{ل}{\sqrt{١ + ل^٢}}\right|$

(٣١) إذا كان أ تنتمي للمستقيم : ٣ س − ٤ ص + ٤ = ٠ ، ب تنتمي للمستقيم ٣ س − ٤ ص − ١ = ٠ فإن أقل قيمة لطول $\overline{أب}$ تساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣٢) إذا كانت أ ، ب نقطتان على المستقيم س − ٢ ص + ٥ = ٠ حيث طول $\overline{أب}$ يساوي ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طولية ، جـ نقطة على المستقيم س − ٢ ص − ١ = ٠ فإن مساحة المثلث أ ب جـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢ $\sqrt{٥}$ (ب) ١٢ (جـ) ٦ $\sqrt{٥}$ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ى إلى المستقيم ل إذا كانت :

(١) ى = (٠ ، ٠) ، ل : $\vec{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٣ ، ٤)

(٢) ى = (٢ ، −٤) ، ل : ١٢ س + ٥ ص − ٤٣ = ٠

(٣) ى = (٥ ، ٢) ، ل : ٨ س + ١٥ ص − ١٩ = ٠

(٤) ى = (−٢ ، −٧) ، ل : س + ص + ٩ = ٠

(٥) ى = (٢ ، -٦) ، ل : $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ٢$

(٦) ى = ($٢\sqrt{ب}$ ، $-\sqrt{أ}$) ، ل : (أ - ب) س + $٢\sqrt{أ ب}$ ص - ٢ أ $\sqrt{ب}$ = ٠

---

٢ احسب طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة م = (٣ ، -١) ويمسها المستقيم الذى معادلته ل : ٤ س + ٣ ص + ٦ = ٠ «٣ وحدة طول»

---

٣ أوجد بعد النقطة (١ ، -٢) عن الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) والذى يصنع زوايا متساوية القياس مع كل من الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات. «$\sqrt{٢}$ وحدة طول»

---

٤ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، حـ) على الخط المستقيم : ٢ س + ٣ ص + ٥ = ٠ يساوى $\sqrt{١٣}$ وحدة طول **فأوجد قيمة : حـ** «٢ أ ، $-\frac{٢٠}{٣}$»

---

٥ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) على المستقيم : ٣ س - ٤ ص + حـ = ٠ يساوى ٢ وحدة طول **فأوجد قيمة : حـ** «٥ أ ، -١٥»

---

٦ إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (٧ ، -١) على المستقيم : أ س + ص = ٠ يساوى $٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول **فأوجد قيم : أ الممكنة.** «٣ أ ، $\frac{-١٣}{٩}$»

---

٧ **أثبت أن المستقيمين :** $ل_١$: ٢ س + ص - ٣ = ٠ ، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٨) + ك (-١ ، ٢) متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. «$٣\sqrt{٥}$ وحدة طول»

---

٨ **أثبت أن المستقيمين :** $ل_١$: ٣ س - ٤ ص - ١٢ = ٠ ، $ل_٢$: ٦ س - ٨ ص + ٢١ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. «٤,٥ وحدة طول»

---

٩ **أثبت أن المستقيمين :** $ل_١$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٥ ، ٢) ، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، -٣) + ك (١٠ ، ٤) متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. «$\sqrt{٢٩}$ وحدة طول»

---

١٠ **طرق :** طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة : ٣ س - ٤ ص - ٧ = ٠

ومسار الطريق الثانى تمثله المعادلة : ٣ س - ٤ ص + ١١ = ٠

أثبت أن : الطريقين متوازيان ثم أوجد أقصر بعد بينهما. «٣,٦ وحدة طول»

---

١١ إذا قطع المستقيم : ٤ س - ٣ ص = ١٢ محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب **فأوجد :**

(١) مساحة سطح المثلث و أ ب حيث و نقطة الأصل.

(٢) أقصر مسافة من نقطة الأصل إلى الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ «٦ وحدة مربعة ، ٢,٤ وحدة طول»

١٢ إذا كانت النقط ٢ = (-٤ ، ١) ، ب = (٢ ، ٣) ، حـ = (-٢ ، ٦) هى رءوس مثلث فأوجد :

(١) طول $\overline{بحـ}$

(٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$

(٣) طول العمود الساقط من ٢ إلى $\overleftrightarrow{بحـ}$

(٤) مساحة Δ ٢بحـ

«٥ وحدات طول ، ٣ س + ٤ ص - ١٨ = ٠ ، ٥,٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة مربعة»

١٣ أوجد مساحة المثلث الذى رءوسه النقط ٢ = (٣ ، ٢) ، ب = (-٢ ، ٥) ، حـ = (١ ، -٣) «١٠,٥ وحدة مربعة»

١٤ ٢بحـء متوازى أضلاع فيه : ٢ = (-١ ، ٤) ، ب = (٣ ، -٢) ، حـ = (-١ ، -٥) أوجد :

(١) إحداثيى النقطة ء

(٢) طول $\overline{بحـ}$

(٣) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$

(٤) طول العمود الساقط من ٢ إلى $\overleftrightarrow{بحـ}$

(٥) مساحة متوازى الأضلاع ٢بحـء

«(-٥ ، ١) ، ٥ وحدات طول ، ٣ س - ٤ ص - ١٧ = ٠ ، ٧,٢ وحدة طول ، ٣٦ وحدة مربعة»

١٥ أثبت أن النقط : ٢ = (٣ ، -١) ، ب = (-٥ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، ٤) ، ء = (٦ ، ١)

هى رءوس متوازى أضلاع وأوجد مساحته. «٢٥ وحدة مربعة»

١٦ أثبت أن النقط : ٢ = (٢ ، ٣) ، ب = (٦ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، -٢) ، ء = (-٢ ، ١)

هى رءوس شبه منحرف وأوجد مساحته. «١٨ وحدة مربعة»

١٧ الربط بالهندسة : ٢بحـء شبه منحرف فيه : $\overleftrightarrow{٢ء}$ // $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، فإذا كانت :

٢(٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٣) ، حـ(٦ ، ١) ، ء(٤ ، ص)

أوجد قيمة ص ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف ٢بحـء «-٣ ، ١٢ وحدة مربعة»

١٨ أوجد معادلة المستقيم الذى متجه اتجاهه (-١ ، ٧) وطول العمود النازل عليه من النقطة (٣ ، ١) يساوى ٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول. «٧ س + ص + ٨ = ٠ ، أ ٧ س + ص - ٥٢ = ٠»

١٩ أثبت أن النقطتين : (١ ، ١) ، (-٢ ، ٣) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم ٢ س - ص + ٣ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه.

٢٠ أثبت أن المستقيم : ٣ س - ٤ ص + ٣ = ٠ يمس كلًا من الدائرتين اللتين مركزاهما النقطتان م = (٥ ، ٢) ، م = (-٢ ، ٣) واللتان طولا نصفى قطريهما ٢ ، ٣ وحدة طول على الترتيب ، وبين هل الدائرتان تقعان فى جانب واحد أم فى جانبى هذا المستقيم ؟

٢١ **الربط بالهندسة :** دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما :

٤ س − ٣ ص + ١٠ = ٠ ، ٥ س − ١٢ ص + ٢٦ = ٠ أثبت أن الوترين متساويان فى الطول.

---

٢٢ **أثبت أن :** النقطة (١١ ، ٨) هى مركز الدائرة الداخلة للمثلث الذى معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه

هى : ر = (−٣ ، ٢٠) + ك (١ ، ٠) ، ٣ س + ٤ ص = ٥ ، ٥ س + ١٢ ص + ٥ = ٠

---

٢٣ **أثبت أن :** أ (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

٩ س − ١٣ ص − ٨ = ٠ ، س − ٣ ص + ٤ = ٠

---

٢٤ **أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء الذى رءوسه النقط :**

أ = (٢ ، ٠) ، ب = (٤ ، ١) ، حـ = (٣ ، ٥) ، ء = (−٤ ، ٨) «٢٣,٥ وحدة مربعة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) أ ب حـ ء مربع حيث أ (٢ ، −٣) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى ٤ س + ٣ ص − ٩ = ٠

فإن مساحة المربع = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع فيه : أ (٢ ، −١) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى س + ص = ٢

فإن طول ضلع المثلث أ ب حـ = ... وحدة طولية.

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\sqrt{٢}$

(٣) معادلة الخط المستقيم الذى طول العمود المرسوم من (٠ ، ٠) عموديًا عليه يساوى ٤ وحدات وهذا الخط يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) س + $\sqrt{٣}$ ص ± ٨ = ٠ (ب) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٤ = ٠

(جـ) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٢ = ٠ (د) $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٨ = ٠

(٤) نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذى أضلاعه تنطبق على المستقيمات :

س = ٠ ، ص = ٠ ، س + ص = ١ هى ....

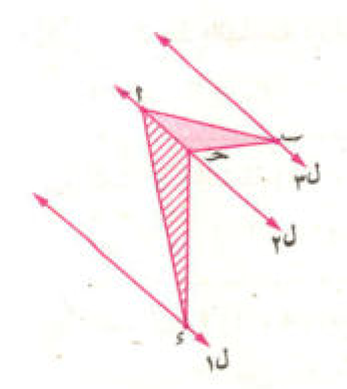
(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ٠) (د) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

(٥) إذا كان : حـ هو طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم :

س + ب ص = ٢ حـ فإن : ب يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\text{حـ}}$ (د) حـ

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة $ل_١$ هى ٢ س + ٣ ص + ك = ٠

، معادلة $ل_٢$ هى ٢ س + ٣ ص − ١ = ٠

، معادلة $ل_٣$ هى ٢ س + ٣ ص − ٤ = ٠

وكانت $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ ا ب حـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ ا ء حـ})} = \frac{١}{٢}$

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) −٣

(٧) النسبة التى يقسم بها المستقيم س − ص − ٢ = ٠ القطعة المستقيمة $\overline{\text{اب}}$ حيث ا (٣ ، −١) ، ب (٨ ، ٩) هى............

(أ) ١ : ٢ من الداخل (ب) ٢ : ١ من الخارج

(جـ) ٢ : ٣ من الداخل (د) ٣ : ٢ من الخارج

---

٢ أوجد نقطة على المستقيم س + ص + ٩ = ٠ وتبعد عن المستقيم س + ٢ ص + ٢ = ٠ بمقدار $\sqrt{٥}$ وحدة طولية. «(−١١ ، ٢) ، (−٢١ ، ١٢)»

---

٣ إذا كانت : ا = (٣ ، ٤) ، ب = (٤ ، ٦) ، حـ = (−١ ، ٢) ، ء = (٢ ، ٠)

فأوجد طول : $\overline{\text{حـَ ءَ}}$ حيث حـَ ، ءَ نقطتا تقاطع العمودين المرسومين من حـ ، ء على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{اب}}$

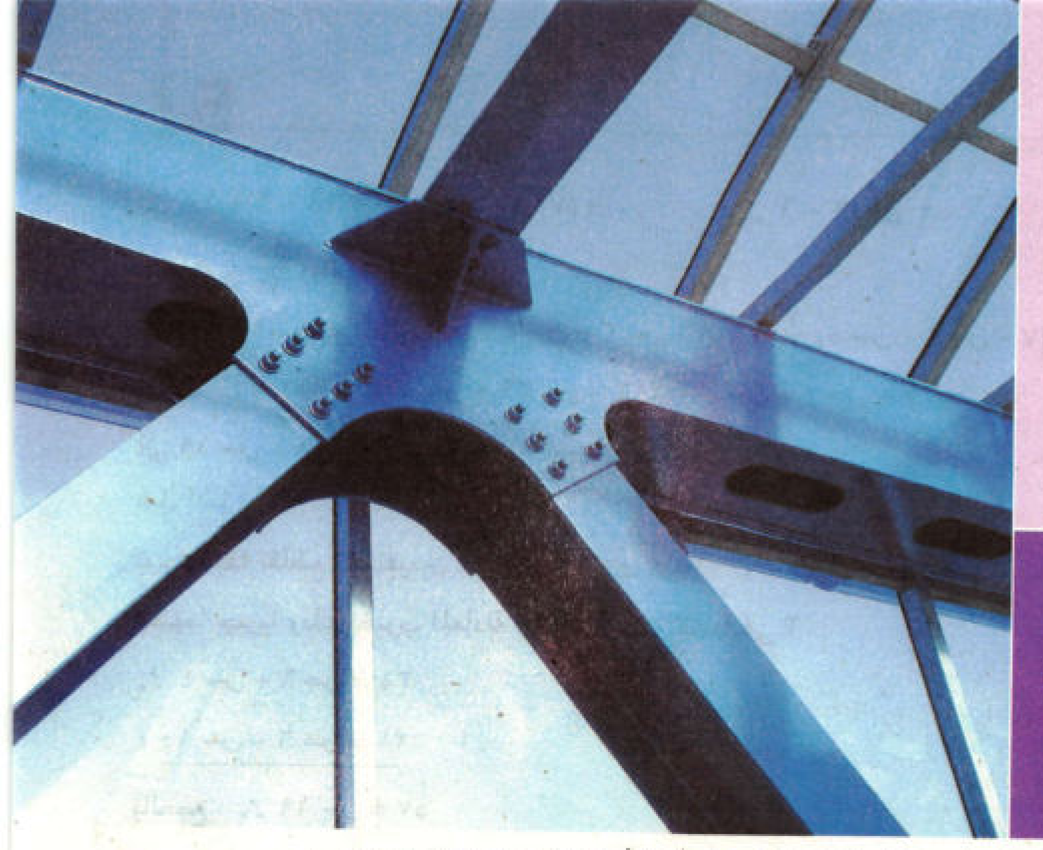
« $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول»

---

٤ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٤) وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوى ٢ وحدة طول وبين أن هناك مستقيمين يحققان هذه الشروط. «س − ٢ = ٠ ، ٣ س + ٤ ص + ١٠ = ٠»

---

٥ إذا كانت : ا = (٣ ، ٥) ، ب = (١١ ، ١١) نقطتين ثابتتين فأوجد النقطة (أو النقط) حـ التى تنتمى لمحور السينات بحيث تكون مساحة Δ ا ب حـ تساوى ٣٠ وحدة مربعة. «($\frac{١٩}{٣}$ ، ٠) أ، ($\frac{-٤١}{٣}$ ، ٠)»



الدرس

5

المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

إذا تقاطع المستقيمان ل$_1$: أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ = ٠ ، ل$_2$: أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ = ٠

فى نقطة فإن المعادلة العامة لجميع المستقيمات المارة بنقطة تقاطعهما هى :

م (أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$) + ل (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$) = ٠ (١)

حيث م $\in$ ح ، ل $\in$ ح

- فى حالة أن م = صفر فإننا نحصل على معادلة المستقيم ل$_2$
- فى حالة أن ل = صفر فإننا نحصل على معادلة المستقيم ل$_1$
- فى حالة أن م $\neq$ صفر ، ل $\neq$ صفر فإننا نحصل على المعادلة العامة لأى مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ بخلافهما وفى هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة (١) على الصورة :

  أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ + ك (أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$) = صفر

  حيث ك ثابت لا يساوى الصفر.

مثال ١

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ٣ ص = ١٨ ، ٥ س - ٢ ص - ٧ = ٠ ويمر بالنقطة (٥ ، ٣)

الحل

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين بخلافهما هى :

٢ س + ٣ ص - ١٨ + ك (٥ س - ٢ ص - ٧) = ٠ (١)

، ∵ النقطة (٥ ، ٣) تقع على هذا المستقيم. ∴ فهى تحقق معادلته.

∴ ٢ × ٥ + ٣ × ٣ - ١٨ + ك (٥ × ٥ - ٢ × ٣ - ٧) = ٠

∴ ١٠ + ٩ − ١٨ + ك (٢٥ − ٦ − ٧) = ٠ ∴ ١ + ١٢ ك = ٠

∴ ك = $\frac{-١}{١٢}$ وبالتعويض فى (١) :

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ٢ س + ٣ ص − ١٨ + $\frac{-١}{١٢}$ (٥ س − ٢ ص − ٧) = ٠

وبالضرب × ١٢ : ∴ ٢٤ س + ٣٦ ص − ٢١٦ − ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠

أى ١٩ س + ٣٨ ص − ٢٠٩ = ٠ أى س + ٢ ص − ١١ = ٠

حل آخر :

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص = ١٨ ، ٥ س − ٢ ص = ٧

بحلهما جبريًا وذلك بضرب المعادلة الأولى فى ٢ والثانية فى ٣

∴ ٤ س + ٦ ص = ٣٦

، ١٥ س − ٦ ص = ٢١

بالجمع : ∴ ١٩ س = ٥٧

∴ س = ٣ وبالتعويض فى أى من المعادلتين. ∴ ص = ٤

∴ نقطة التقاطع هى (٣ ، ٤) ثم نوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٣) كما سبق دراسة ذلك.

حاول بنفسك

أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ٣ ص = ٩ ، ٤ س + ٥ ص = ١٥ ويمر بالنقطة (٥ ، −٤)

مثال ٢

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س + ٢ ص = ١٠

، ٥ س − ٣ ص − ٤ = ٠ ويكون عموديًا على المستقيم : ٢ س + ٧ ص − ٤ = ٠ .

الحل

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين بخلافهما هى :

٣ س + ٢ ص − ١٠ + ك (٥ س − ٣ ص − ٤) = ٠ (١)

∵ ميل المستقيم : ٢ س + ٧ ص − ٤ = ٠ هو $\frac{-٢}{٧}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب $\frac{٧}{٢}$

ومن المعادلة (١) : ∴ ٣ س + ٢ ص − ١٠ + ٥ ك س − ٣ ك ص − ٤ ك = ٠

∴ س (٣ + ٥ ك) + ص (٢ − ٣ ك) − ١٠ − ٤ ك = ٠

∴ ميله = − $\frac{٣ + ٥ ك}{٢ - ٣ ك}$ ∴ $\frac{٧}{٢}$ = − $\frac{٣ + ٥ ك}{٢ - ٣ ك}$

∴ ٦ + ١٠ ك = −١٤ + ٢١ ك ∴ ك = $\frac{٢٠}{١١}$

وبالتعويض فى (١) :

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ٣ س + ٢ ص − ١٠ + $\frac{٢٠}{١١}$ (٥ س − ٣ ص − ٤) = ٠

أى ٣٣ س + ٢٢ ص − ١١٠ + ١٠٠ س − ٦٠ ص − ٨٠ = ٠

أى ١٣٣ س − ٣٨ ص − ١٩٠ = ٠

أى ٧ س − ٢ ص − ١٠ = ٠

مثال ٣

أثبت أن المستقيمين : ٤ س − ٣ ص + ٧ = ٠ ، ر⃖ = (٢ ، ٥) + ك (−٤ ، ٣) متقاطعان على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

∵ $م_١$ = $\frac{-٤}{-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، $م_٢$ = $-\frac{٣}{٤}$ ∴ $م_١$ × $م_٢$ = $\frac{٤}{٣}$ × $-\frac{٣}{٤}$ = −١

∴ المستقيمان متقاطعان على التعامد.

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نوجد أولاً المعادلة العامة للمستقيم الثانى

∵ المستقيم الثانى يمر بالنقطة (٢ ، ٥) وميله = $-\frac{٣}{٤}$

∴ المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ٥}{س - ٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

أى أن المعادلة العامة هى : ٣ س + ٤ ص − ٢٦ = ٠

* بحل المعادلتين : ٤ س − ٣ ص + ٧ = ٠ (١) ، ٣ س + ٤ ص − ٢٦ = ٠ (٢) معًا

بضرب المعادلة (١) × ٤ : ∴ ١٦ س − ١٢ ص + ٢٨ = ٠ (٣)

بضرب المعادلة (٢) × ٣ : ∴ ٩ س + ١٢ ص − ٧٨ = ٠ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) :

∴ ٢٥ س − ٥٠ = ٠ ∴ س = ٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ ص = ٥ ∴ نقطة التقاطع هى : (٢ ، ٥)



على المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نقطة تقاطع المستقيمين : س + ٤ = ٠ ، ص − ٣ = ٠ هى ....

(أ) (٤ ، ٣) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (−٤ ، ٣) (د) (٤ ، −٣)

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٢ ، ص = ٥ هى ....

(أ) ٥ س − ٢ ص = ٠ (ب) ٢ س − ٥ ص = ٠

(جـ) ٢ س + ٥ ص = ٠ (د) ٥ س + ٢ ص = ٠

(٣) معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين : ص = ٤ ، س = $\frac{٣}{٤}$ ص هى ....

(أ) ص = ٣ (ب) س = ٣ (جـ) ص = ٤ (د) س = ٤

(٤) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$: س + ٢ ص − ٤ = ٠ ، $ل_٢$: س − ٢ ص = ٠ ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٢ (ب) ص = ١ (جـ) ص = ٣ (د) ص = ٢

(٥) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص = ٣ ، س + ٤ ص + ٢ = ٠ ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص − ٢ = ٠ (ب) س − ص = ٢ (جـ) س − ٢ = ٠ (د) س + ٢ = ٠

(٦) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٦ ويمر بالنقطة (٢ ، −١) هى ....

(أ) س − ص + ٣ = ٠ (ب) س − ص − ٣ = ٠

(جـ) س + ص + ٣ = ٠ (د) ٢ س − ص − ٣ = ٠

(٧) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين :
٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠ ، س + ٣ ص = ٧ هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، ١) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٢ ، −١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (٢ ، −١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (−١ ، ٢)

(٨) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) وبنقطة تقاطع المستقيمين ل$_1$: ٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠
، ل$_2$: $\overleftarrow{ر}$ = (−٢ ، ٠) + ك (٣ ، ٢) هى ....

(أ) س − ص + ١ = ٠ (ب) س − ص + ٢ = ٠

(جـ) س + ص − ١ = ٠ (د) س + ص + ٢ = ٠

(٩) المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ل$_1$: س − ٥ = ٠
، ل$_2$: س + ص = ١٣ ومتجه اتجاهه (٤ ، ١) هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، ١) + ك (٥ ، ٨) (ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٦) + ك (٤ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٨) + ك (٤ ، ١) (د) $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، −٨) + ك (١ ، ٤)

(١٠) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س − ٥ ص − ١٣ = ٠ ، ٢ ص − ٣ س + ٧ = ٠
ويوازى المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ١) + ك (٥ ، ٤) هى ....

(أ) ٤ س + ٥ ص − ١٤ = ٠ (ب) ٤ س − ٥ ص + ١٤ = ٠

(جـ) ٥ س − ٤ ص − ١٤ = ٠ (د) ٤ س − ٥ ص − ١٤ = ٠

(١١) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص − ٢ = ٠ ، ٣ س − ص − ١٤ = ٠
ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥° هى ....

(أ) س + ص = ٠ (ب) س + ص = ٢

(جـ) س − ص = ٢ (د) ص − س = ٢

(١٢) عدد المستقيمات التى تمر بنقطة تقاطع مستقيمين = ...

(أ) صفر. (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(١٣) إذا مر المستقيم (س − ٤ ص + ١٤) + ك (٤ س + ص + ٥) = ٠ بالنقطة (٢ ، ١)
فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{-٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{-٦}{٧}$

(١٤) إذا مر محور السينات بنقطة تقاطع المستقيمين أ س + ص + ٣ = ٠ ، ب س + ص + ١ = ٠
فإن : أ = ...

(أ) ب (ب) ٣ ب (جـ) $\frac{١}{٣}$ ب (د) −٣ ب

(١٥) نقطة تقاطع المستقيمان : $\overleftarrow{ر}_1$ = (٦ ، ٠) + ك$_1$ (٣ ، −٢) ، $\overleftarrow{ر}_2$ = (٢ ، ١) + ك$_2$ (١ ، ١)
هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (−١ ، ١) (د) (−٣ ، ٢)

(١٦) معادلة المستقيم المارة بنقطة تقاطع المستقيمين س = −٣ ، ص = ٢ وينصف الزاوية بينهما هى ....

(١) س − ص + ٥ = ٠ . (٢) س + ص + ١ = ٠ .

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط.

(جـ) (١) ، (٢) معًا. (د) لا شىء مما سبق.

(١٧) فى الشكل المقابل :

معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى س + ص + ١ = ٠ .

، معادلة $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى ٢ س − ص + ٥ = ٠ .

، معادلة $\overleftrightarrow{بحـ}$ هى س − ٤ ص − ٤ = ٠ .

، $\overline{أء} \perp \overline{بحـ}$ فإن معادلة $\overleftrightarrow{أء}$ هى ....

(أ) ٤ س + ص + ٨ = ٠ . (ب) ٨ س + ٢ ص − ٥ = ٠ .

(جـ) ٤ ص − س − ٦ = ٠ . (د) ص + ٤ س + ٧ = ٠ .

(١٨) انطلقت قذيفة من مكان ما لتصيب هدفًا ثابتًا متبعة المسار فى الخط المستقيم ٢ س + ص − ١ = ٠ .
وكذلك قذيفة من مكان آخر لتصيب نفس الهدف متبعة المسار فى الخط المستقيم س − ٣ ص + ٤ = ٠ .
فإن معادلة المستقيم الذى تسلكه قذيفة من نقطة (٥ ، −٣) لتصيب نفس الهدف هى ....

(أ) ٥ س + ٦ ص − ٧ = ٠ . (ب) ٣ س − ٢ ص − ٢١ = ٠ .

(جـ) ٤ س − ص − ٢٣ = ٠ . (د) ٢ س + ٧ ص + ١١ = ٠ .

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٣ س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٣ ص = ١ ويمر بالنقطة (١ ، −١) «ص + ١ = ٠»

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص = ٢ ، ٤ س + ٣ ص − ٣ = ٠ ونقطة الأصل. «٢ س + ٣ ص = ٠»

٣ أوجد معادلة المستقيم المتجهة المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$\vec{ر}$ = ك (−٣ ، ٢) ، ٣ س − ٢ ص = ١٣ ويوازى محور الصادات. «$\vec{ر}$ = (٣ ، −٢) + ك (٠ ، ١)»

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س − ٣ ص + ٥ = ٠ ، ٢ س − ص − ٤ = ٠ .
ويكون موازيًا للمستقيم : س − ٢ ص + ١ = ٠ . «٥ س − ١٠ ص + ١١ = ٠»

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٥ س − ص = ٥ ، س + ٢ ص = ١ ويكون عموديًا على المستقيم الثانى. «٢ س − ص − ٢ = ٠»

٦ أثبت أن المستقيمين : ٢ س − ٣ ص + ٤ = ٠ ، ر = (١ ، ٢) + ك (−٢ ، ٣)

متقاطعان على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما. «(١ ، ٢)»

---

٧ أثبت أن المستقيمين : س − ٤ ص + ١٤ = ٠ ، ٤ س + ص + ٥ = ٠ متعامدان ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٢ ، ١) «(−٢ ، ٣) ، ٢ ص + س − ٤ = ٠»

---

٨ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص − ١ = ٠ ، س − ص + ٣ = ٠ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات. «٨ س + ص + ٣ = ٠»

---

٩ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين : ٥ س − ص = ٥ ، س + ٢ ص = ١

ويقطع من الجزءين الموجبين لمحورى الإحداثيات طولين متساويين. «س + ص − ١ = ٠»

---

١٠ إذا كان ل١ : ٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠ ، ل٢ : ر = (−٢ ، ٠) + ك (٣ ، ٢) فأوجد :

(١) المعادلة الكارتيزية للمستقيم ل٢ (٢) قياس الزاوية بين المستقيمين ل١ ، ل٢

(٣) نقطة تقاطع المستقيمين ل١ ، ل٢

(٤) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين والنقطة (٣ ، ٤)

(٥) طول العمود المرسوم من نقطة تقاطع المستقيمين إلى الخط المستقيم الذى معادلته : ٣ س − ٤ ص − ٩ = ٠

(٦) مساحة سطح المثلث المحدد بالمستقيمين ل١ ، ل٢ ومحور السينات.

---

١١ الربط بالحياة : طريقان مستقيمان معادلة مسار الأول : ٣ س − ٤ ص − ١٤ = ٠

ومعادلة مسار الثانى : ٤ س + ٣ ص − ٢ = ٠

أثبت أن الطريقين متعامدان ، ثم أوجد :

(١) نقطة تقاطعهما.

(٢) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة التقاطع والنقطة (٣ ، −٢)

(٣) طول أقصر بعد من نقطة تقاطع الطريقين على طريق آخر معادلته : ٤ س + ٣ = ٠

(٤) مساحة سطح المنطقة المثلثة المحددة بالطريقين ومحور الصادات.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نقطة تقاطع المستقيمين المختلفين $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ ، $\frac{س}{ب} + \frac{ص}{أ} = ١$ هى ....

(أ) (أ ، ب) (ب) $(\frac{١}{٢} أ ، \frac{١}{٢} ب)$

(جـ) $(\frac{أ+ب}{أب} ، \frac{أ+ب}{أب})$ (د) $(\frac{أب}{أ+ب} ، \frac{أب}{أ+ب})$

(٢) لقيم ك المختلفة فإن المعادلة (٢ + ك) س + (١ + ك) ص = ٥ + ٧ ك تمثل ....

(أ) مستقيمات متوازية.

(ب) مستقيمات متقاطعة فى النقطة (−٢ ، ٩)

(جـ) مستقيمات متقاطعة فى النقطة (٢ ، −٩)

(د) لا شىء مما سبق.

(٣) إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه معادلات المستقيمات التى تحمل أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ هى س + ٢ ص = ٣ ، س = ١ ، س − ٣ ص = ٤ ، ٥ س + ص + ١٢ = ٠

على الترتيب فإن قياس الزاوية بين القطران $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ء ب}$ تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٤) إذا مرت الثلاث مستقيمات : ٣ س + ص − ٢ = ٠ ، ك س + ٢ ص − ٣ = ٠ ، ٢ س − ص − ٣ = ٠ بنقطة واحدة فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(٥) إذا كانت المستقيمات : س + أ = ٠ ، ص + ٤ = ٠ ، س + ٢ ص + ٤ = ٠ تحمل متوسطات مثلث فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٢ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

$\vec{ر}$ = (٥ ، ٢٠) + ك (٢ ، ٣) ، $\vec{ر}$ = (١١ ، ٤) + كَ (٣ ، ١) وطول العمود النازل عليه من النقطة (−٢ ، ١) يساوى ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

«ص + ٧ س − ٣٧ = ٠»

---

٣ إذا كانت : أ = (١ ، ١) ، ب = (٧ ، ٤) ، ء = (٢ ، ٧) ثلاثة رؤوس فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء الذى فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° أوجد :

(١) معادلة $\overleftrightarrow{ب جـ}$ (٢) معادلة $\overleftrightarrow{جـ ء}$

(٣) إحداثيى النقطة جـ

«ص + ٢ س − ١٨ = ٠ ، ٦ ص + س − ٤٤ = ٠ ، $\left(\frac{٦٤}{١١} ، \frac{٧٠}{١١}\right)$»

الرياضيات

الجزء الخاص بالامتحانات



- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

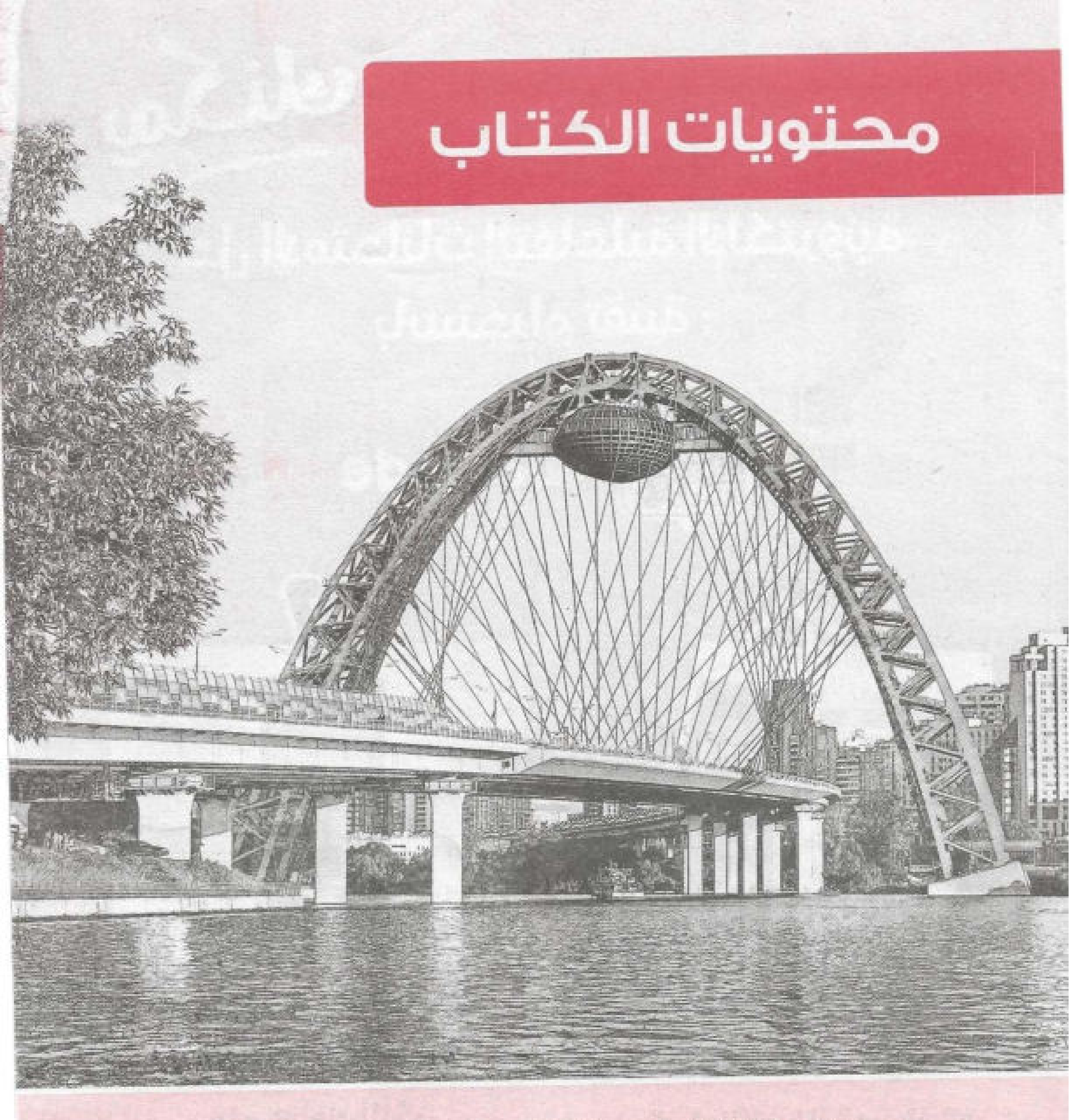


الفصل الدراسي الثاني



إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب



- الاختبارات التراكميـة القصيرة.
- الاختبارات الشهرية.
- امتحانـات الكتـاب المدرسـى.
- الامتحانـات النهائيـة.
- الإجابـات.

الاختبارات التراكمية القصيرة

أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الهندسة التحليلية.



أولاً اختبـارات تراكميـة قصيـرة فـى الجبـر

الدرجة الكلية



اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & س - ١ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) −١ (ب) صفر (ج) ٤ (د) ٦

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ \frac{١}{٢}ك & ٤ \end{pmatrix}$ حيث $أ = ب^{مد}$

فإن : ك = ...

(أ) −٢ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (ج) ٨ (د) −٦

(٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \\ -١ & ٧ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{٢١} + أ_{٣٢} = $ ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (ج) صفر (د) ١٠

(٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & س & ٢ \\ -١ & ٦ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٦ \\ ٢ & ص \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : س ص = ...

(أ) −١٥ (ب) −٢ (ج) ٢ (د) ١٥

(٥) إذا كان : $\begin{pmatrix} ١ + ت & ١ - ت \\ جاس & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$

وكان : أ ب جـ د = ١ ، $٠ < س < \frac{\pi}{٢}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (ج) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٦) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} جا ٣٠° & ١ \\ ظا^{٢} ٦٠° & ظا ٤٥° \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} م - جتا ٦٠° & ١ \\ ف + قا^{٢} ٤٥° & ن + جتا^{٢} ٩٠° \end{pmatrix}$

وكان : أ = ب فإن : م + ف − ن = ...

(أ) ٢ (ب) −١ (ج) −٢ (د) ١

(٧) إذا كان : $\begin{pmatrix} ١ + ت & ١ - ت \\ ت & - ت \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

فإن : المعادلة التى جذراها $أ^٢$ ، ٢ ء هى ....

(أ) $س^٢ - ٤ = ٠$ (ب) $س^٢ + ٤ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٢ = ٠$ (د) $س^٢ + ٢ = ٠$

(٨) إذا كان : $س = \begin{pmatrix} أ - ب & ١ \\ ٣ & ب - ٢ \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} أ - ٦ & ٦ \\ ٢ & ٤ - أ \end{pmatrix}$

وكان : ٢ س = $ص^{مد}$ فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٩) المصفوفة (٣ ٢ ١) على النظم ....

(أ) ٢ × ١ (ب) ١ × ٣ (جـ) ٣ × ٢ (د) ٣ × ١

(١٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix} = ٢ I$ حيث I مصفوفة الوحدة

فإن : أ + ب + حـ + ء = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١١) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان $أ_{س ص} = \frac{س}{ص}$

فإن : $أ_{١١} × أ_{٢١} × أ_{١٢} × أ_{٢٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} س & ٢ & ٣ \\ ع & ص & ر \\ -٣ & ٥ & م \end{pmatrix}$ فأى مما يأتى يكفى لإيجاد قيمة س ؟

(أ) $أ = أ^{مد}$ (ب) $أ = - أ^{مد}$

(جـ) أ مصفوفة قطرية. (د) لا شىء مما سبق.

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإن عدد عناصر أ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) إذا كان : أ + أ^{مد} = $\boxed{}$ فإن : أ مصفوفة ....

(أ) صف. (ب) عمود. (جـ) متماثلة. (د) شبه متماثلة.

(٣) إذا كان : $\begin{pmatrix} س \\ ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(٤) $\begin{pmatrix} -٥ & -٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}^{مد} = $ ....

(أ) $\boxed{}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) I

(٥) لأى مصفوفة مربعة ب ≠ $\boxed{}$ فإن المصفوفة أ = ب − ب^{مد} تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) صفرية. (د) وحدة.

(٦) إذا كانت المصفوفة أ متماثلة وشبه متماثلة فى نفس الوقت فإن : ....

(أ) أ = $\boxed{}$ (ب) أ = I

(جـ) أ مصفوفة قطرية. (د) أ مصفوفة صف.

(٧) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $أ_{ص ع}$ = ص − ٢ ع ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٢ حيث $ب_{ص ع}$ = ع − ص فإن : أ + ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٢ & -٢ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} -١ & -٢ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن : $\frac{أ + ب + حـ + و}{ء + س + ص + ع}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) هـ

(٩) إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يمكن أن يمثل قاعدة لإيجاد عناصر المصفوفة أ ؟

(أ) $أ_{ص ع}$ = ٢ ص − ع (ب) $أ_{ص ع}$ = ص + ع

(جـ) $أ_{ص ع}$ = $ص^{ع}$ (د) $أ_{ص ع}$ = ٣ ص + ٢ ع

(١٠) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ س − ١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١١) إذا كان : س + $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}^{مد}$ = ☐ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) I

(١٢) $(س^{مد})^{مد}$ − س = ...

(أ) ☐ (ب) س (جـ) ٢ س (د) صفر



اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين بحيث : أ ب = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ فإن : $ب^{مد}$ $أ^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٢ × ١ (جـ) ١ × ٢ (د) ٣ × ٣

(٣) إذا كان : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & س \end{pmatrix} = I$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) صفر (د) ٤

(٤) إذا كان : $\begin{pmatrix} 2 & س \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ص & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) −٦

(٥) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{60}$ = ...

(أ) $2^{30} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $2^{60} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(جـ) $2^{90} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $2^{120} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٦) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٣^{س} & ٢س + ص \\ س + ص & ٣^{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ب \\ أ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٧) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان أ + $أ^{مد}$ = I

فإن : مجموع عناصر أ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) إذا كانت كل من أ ، ب مصفوفة متماثلة فإن المصفوفة (أب أ) تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) قطرية. (د) صفرية.

(١٠) إذا كانت [ ] مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢ فإن عدد عناصرها = ...

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ٢ (د) ٤

(١١) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ، ب = (٢ ٣) فإن : ب أ = ...

(أ) (-٤) (ب) (٤) (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & -٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٣ & -٦ \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٩ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٩ & -٢ \end{pmatrix}$

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ تساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $(ب\,أ)^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٤ \\ -١٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ \\ -١٠ \end{pmatrix}$ (د) (-٦)

(٣) إذا كانت : أ(٣ ، ٥) ، ب(٢ ، ٠) ، حـ(-٣ ، ٢)

فإن مساحة سطح المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٨ (ب) ١٤ (جـ) ٧ (د) ٢

(٤) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س^{٢} & -٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر فى ك هى ....

(أ) ∅ (ب) {-٢ ، ٢}

(جـ) {-٢ ت ، ٢ ت} (د) {- ت ، ت}

(٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix} = ٤$ فإن : $\begin{vmatrix} س - ص & ٤\,ص \\ ع - ل & ٤\,ل \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٦) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} س & ى \\ هـ & ص \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن : ٢ ى + ٣ هـ = ...

(أ) ى (ب) س + ص (جـ) هـ + ص (د) س

(٧) إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ وكان : $\text{أ}^{٢٥} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{حـ} \end{pmatrix}$

فإن : أ + ب + حـ + ء = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٧ (د) ٢٨

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{١ - جتا}\,\theta & \text{٣ + جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر فإن : قيمة θ = ...

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

(٩) إذا كان : $\text{أ}^{\text{مد}}\,\text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن : ب × أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٦ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٦ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & \text{س} \\ \text{ص} & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{أ} \times \text{ب} = \begin{pmatrix} ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} -١ & \text{س} \\ \text{س} & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ \text{س} & ٢ \end{vmatrix} = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٣ أ، −٢ (ب) −٣ أ، ٢ (جـ) ٣ أ، ٢ (د) −٣ أ، −٢

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{٢ ص} & \text{س} \\ \text{ع} & ٠ \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

فإن : س × ص × ع = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٤

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{٢} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٦ & ٥ \\ -٢ & ٩ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٦ & -٥ \\ -٢ & ٩ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{-١} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -٥ \end{pmatrix}$

(٣) قيم س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & س \\ س - ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

(أ) ٤ ، -٢ (ب) -٤ ، ٢ (جـ) -٤ ، -٢ (د) ٤ ، ٢

(٤) مساحة المثلث الذى رؤوسه : أ(٤ ، ٥) ، ب(٦ ، -١) ، حـ(١ ، ٦)

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ وكان $أ = أ^{-١} \times ب$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٧ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٨ & -٧ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix}$

(٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ك - ١ & ٢ \\ ٣ & ك + ١ \end{vmatrix} = ٢ك^٢ + ١$ فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٧) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ وكان $|٢أ| = ٨$ فإن : $|٣أ| =$ ....

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٨) إذا كان : أ مصفوفة مربعة فإن المصفوفة $(أ + أ^{مد})$ تكون ....

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (جـ) صفرية. (د) قطرية.

(٩) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} -١ & -٢ \\ ١ & ك \end{pmatrix}$ وكان $أ^٢ = -أ$ فإن : ك = ... حيث ك ∈ ص

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ٣

(١٠) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٦ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix} = ٦$ وكان $\begin{vmatrix} أك & ك حـ \\ ب & ء \end{vmatrix} = -٢٤$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) -٤

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ٥ \\ ٥ & ب \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ب & ٢ \\ ٢ & حـ \end{vmatrix} = ٠$ ، $\begin{vmatrix} أ & ١ \\ ١ & حـ \end{vmatrix} = ٠$

فإن : $\begin{vmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ -١ & ب & ٠ \\ ٢ & ٥ & حـ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ± ١٠ (ب) ± ٥٠ (جـ) ± ١٠٠ (د) ± ٢٠



اختبار 6 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينة : ص < ٢ س + ٣ هى ....

(أ) (–١ ، ١) (ب) (–١ ، –١) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (–٣ ، –٣)

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ \\ ٥ \end{pmatrix}$

فإن العملية الوحيدة الممكنة من العمليات الآتية هى ....

(أ) أ + ب (ب) $أ^{مد} + ب^{مد}$ (جـ) أ ب (د) $أ ب^{مد}$

(٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ١ & ٣ \\ ٠ & ٢س & ٥ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} = ٨ س$ فإن مجموعة حل المعادلة هى ....

(أ) {٢ ، –٢} (ب) {٠ ، –٢ ، ٢}

(جـ) $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$ (د) $\{٠ ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$

(٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ \frac{-٣}{٢} & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ ب = ...

(أ) I (ب) ٢ I (جـ) $\frac{١}{٢}$ I (د) ٣ I

(٥) عند حل المعادلتين : أ س + ب ص = ٤ ، حـ س + ء ص = ٢ وجد أن المعكوس

الضربى للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ يساوى $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) –٢

(٦) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ص & -٢ \end{pmatrix}$ وكان أ × أ$^{-1}$ = أ^{٢} فإن : س × ص = ...

(أ) -٣ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ٣

(٧) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} - ٤ س - ١٠ = ٠

فإن : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ل & -١ \\ ٣ & & م \end{vmatrix}$ تساوى ....

(أ) -١٧ (ب) -١٢ (جـ) -٨ (د) -٦

(٨) إذا كانت : س + $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ = $\boxed{}$ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٠ & -٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ & -٥ \\ ٠ & -٧ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix}$

(٩) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٢ ، ص > ٢

، س + ص > ٢ هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٢ ، ١)

(١٠) مساحة المثلث الذى رؤوسه (١ ، ٦) ، (٠ ، ١٠) ، (٠ ، ٠) تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{جا } \theta & ٠ & ٠ \\ ٢ & \text{جتا } \theta & ٠ \\ ١ & ٣ & س \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} \text{جا } \theta & \text{جتا } \theta \\ -\text{جتا } \theta & \text{جا } \theta \end{vmatrix}$ = ٠ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) جا θ

(١٢) مجموعة حل المتباينة : س + ٥ ≥ ٣ س + ١ > ٢ س + ٢ فى ح هى ....

(أ) ح -]١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢] (جـ) ∅ (د) {١ ، ٢}

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 7 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣

هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإنه يمكن إجراء العملية ....

(أ) أ + ب (ب) $ب^{مد}$ + $أ^{مد}$ (جـ) أ $ب^{مد}$ (د) أ ب

(٤) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

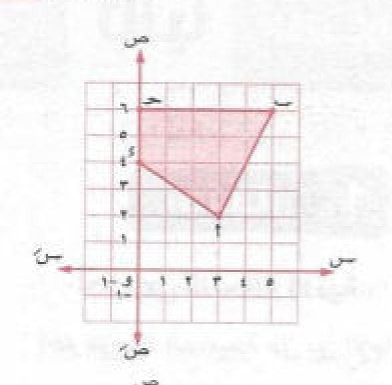
(٥) إذا كانت مساحة المثلث الذى رؤوسه (ك ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٢) هى ٤ وحدات مربعة

فإن : ك = ...

(أ) صفر أ، −٨ (ب) −٤ أ، ٤ (جـ) صفر أ، ٨ (د) ٨ أ، −٨

(٦) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة وكان $أ^{٢}$ = I فإن : $أ^{٦}$ = ...

(أ) ☐ (ب) أ (جـ) ٢ أ (د) أ + I



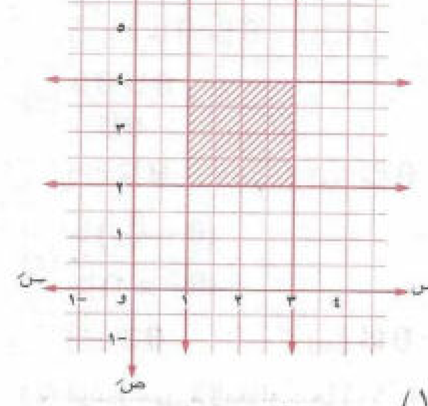
(٧) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام من المتباينات فإن القيمة الصغرى لدالة الهدف ر = ٣ س + ٢ ص هى ....

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٣



(٨) الجزء المظلل فى الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينات ....



(أ) س > ١ ، ص > ٢

(ب) ١ < س < ٣ ، ٢ < ص < ٤

(جـ) ١ ≤ س ≤ ٣ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

(د) س + ص ≤ ٣ ، س − ص ≥ ٧

(٩) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} س - ١ & ٠ \\ & س^{٢} \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : س ∈ ....

(أ) {−١ ، ٢} (ب) {٠ ، −١} (جـ) {١ ، −٢} (د) {٠ ، ١}

(١٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ١٢ \\ ٣ & س \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ± ٦

(١١) إذا كان ضعف العدد س لا يقل عن ثلاثة أمثال العدد ص فإن ....

(أ) ٢ س < ٣ ص (ب) ٢ س ≥ ٣ ص

(جـ) ٢ س > ٣ ص (د) ٢ س ≤ ٣ ص

(١٢) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينات : س ≤ ١ ، س + ص ≤ ٥ ، ص ≤ ٢ والتى تجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ص أقل ما يمكن هى ....

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (١ ، ٤) (د) (٣ ، ٢)

ثانيًا اختبــارات تراكميــة قصيرة فى حساب المثلثات

الدرجة الكلية

١٢

اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أبسط صورة للمقدار : (حا θ + حتا θ)^{٢} − ٢ حا θ حتا θ هى ....

(أ) ٢ حا θ حتا θ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) حا^{٢} θ − حتا^{٢} θ

(٢) $\frac{\text{طا } \theta \text{ طتا } \theta}{\text{قا } \theta}$ = ...

(أ) حا θ (ب) حتا θ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٣) $\frac{\text{حا } (\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{حتا } (٢\pi - \theta)}$ = ...

(أ) طا θ (ب) طتا θ (جـ) ١ (د) −١

(٤) أبسط صورة للمقدار : حا (٩٠° − θ) قتا (٩٠° − θ) تساوى ....

(أ) ١ (ب) حا^{٢} θ (جـ) حتا^{٢} θ (د) حا θ حتا θ

(٥) إذا كان : س + ص = ٣٠° فإن : طا (س + ٢ ص) طا (٢ س + ص) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢ $\sqrt{٣}$

(٦) إذا كان : حا θ − حتا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : حا θ حتا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٤١}{٥٠}$ (د) $\frac{٩}{٥٠}$

(٧) إذا كان : حا θ + قتا θ = ٥ فإن : حا^{٢} θ + قتا^{٢} θ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٥

(٨) إذا كان : طا θ = ٣ فإن : قا^{٢} θ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) −١٠ (د) ٠,٩

(٩) ٣ طا هـ طتا هـ + ٢ حا هـ قتا هـ + حتا هـ قا هـ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٠) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع

، $\overrightarrow{\text{ما أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ما ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ما حـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ما ء}}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٤

(١١) إذا كان : ٣ جا θ + ٤ جتا θ = ٥ فإن : ٣ جتا θ − ٤ جا θ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٢) القيمة العددية للمقدار : ٥ جتا θ × ٣ قا θ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٥

الدرجة الكلية

١٢

اختبـار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الحل العام للمعادلة : جتا θ = ١ هو .... «حيث ن ∈ ص»

(أ) ن π (ب) ٢ ن π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ + ن π (د) $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π

(٢) $\frac{١ - \text{جتا}^٢ \theta}{١ - \text{جا}^٢ \theta}$ + ١ = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ ظا^٢ θ (جـ) قا^٢ θ (د) قتا^٢ θ

(٣) أبسط صورة للمقدار : جا θ جتا θ ظتا θ + جا^٢ θ تساوي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤) إذا كان : جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ، θ ∈] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π [فإن : θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$π (ب) $\frac{١}{٣}$π (جـ) $\frac{٢}{٣}$π (د) $\frac{١١}{٦}$π

(٥) إذا كانت : س ، ص ∈ [٠ ، ٢ π[، θ = س + ص فإن مجموعة قيم θ التى تحقق أن

جا س جا ص = ١ تساوى ....

(أ) {π ، ٢ π}　(ب) {π ، ٣ π}　(جـ) $\left\{\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right\}$　(د) $\left\{\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٣}\right\}$

(٦) إذا كانت : س ∈ [٠ ، π[فإن مجموعة حل المعادلة : جتا س = $\frac{١}{٢}$ هى نفسها

مجموعة حل المعادلة ....

(أ) ظا س = ٢ جا س　(ب) ٢ جتا² س = جتا س

(جـ) ٢ جتا² س + ٣ جتا س = ٢　(د) جتا $\frac{١}{٢}$ س = ١

(٧) جا² θ + جتا² θ + ظا² θ = ...

(أ) ١　(ب) قا² θ　(جـ) ظتا² θ　(د) ظا² θ

(٨) إذا كانت : ك = ٤ جا ٣ س − ٥　فإن : ك ∈ ....

(أ) [−٤ ، ٤]　(ب) [٨ ، ١١]　(جـ) [٥ ، ٧]　(د) [−٩ ، −١]

(٩) إذا كان : ظا θ = ١ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) ٣٠°　(ب) ٦٠°　(جـ) ١٣٥°　(د) ٢٢٥°

(١٠) إذا كان : $٣^{\text{جا}\,\theta}$ = ١ حيث θ ∈ [٠ ، ٣٦٠°[　فإن : θ = ...

(أ) ٤٥°　(ب) ٩٠°　(جـ) ١٨٠°　(د) ٢٧٠°

(١١) إذا كان : ظا θ = ٤　فإن : $\frac{\text{جا}^٢ \theta + \text{جتا}^٢ \theta}{\text{جا}^٢ \theta - \text{جتا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) $\frac{١٧}{١٥}$　(ب) ١　(جـ) $\frac{-٧}{١٥}$　(د) −١

(١٢) مجموعة حل المعادلة : جا س + جتا س = ٠ حيث ١٨٠° < س < ٣٦٠°

تساوى ....

(أ) {٢١٠°}　(ب) {٢٢٥°}　(جـ) {٢٤٠°}　(د) {٣١٥°}



اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٢٧ َ ٥٦ ° (ب) ٤٨ َ ٣٩ °

(جـ) ٣٣ َ ٣٣ ° (د) ١٢ َ ٥٠ °

(٢) فى الشكل المقابل :

س ص ≃ .... سم.

(أ) ٩,٨ (ب) ٦,٩

(جـ) ٨,٤ (د) ١٤,٦

(٣) إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ١٨٠°] ، حا θ + ١ = ٠ فإن : θ = ... °

(أ) ٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٢٧٠

(٤) إذا كان : ظا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن : قا^{٢} θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٤}$



(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م ، أ ب = ٨ سم

، ق (∠ أ ب حـ) = θ°

فإن : مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^{٢}

(أ) ٨ حا θ (ب) ٨ ظا θ (جـ) ٣٢ ظا θ (د) ٣٢ حا θ

(٦) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٣ سم ، محيطه = ١٢ سم

فإن : ق (∠ حـ) ≃ ....

(أ) ٣٧° (ب) ١٤° (جـ) ١٨° (د) ٥٣°



(٧) الحل العام للمعادلة : جتا θ = −١ هو .... «حيث ن ∈ ص»

(أ) $\frac{\pi}{2}$ + π ن (ب) $\frac{\pi}{3}$ + π ن (جـ) π + ٢ π ن (د) $\frac{\pi}{6}$ + ٢ π ن

(٨) إذا كان : قتا θ − $\frac{1}{\text{ظا}\ \theta}$ = $\frac{1}{5}$ فإن : ظا θ + $\frac{1}{\text{جا}\ \theta}$ = ...

(أ) $\frac{1}{10}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{1}{25}$ (د) ١

(٩) إذا كان : ٢ جا س − ١ = ٠ حيث س أكبر زاوية موجبة : س ∈ [٠ ، ٣٦٠°]

فإن : س = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٢١٥° (جـ) ٣٣٠° (د) ٣٠°

(١٠) جا² $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ + جتا² $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ − ١ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) جا² θ (د) جتا² θ

(١١) إذا كان : جا θ = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[فإن : $\sqrt{1 + \text{ظا}^2\ \theta}$ = ...

(أ) $\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}}$ (ب) $\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}} - \text{ب}}$ (جـ) $\frac{\text{أ}}{\sqrt{1 + \text{أ}^2}}$ (د) $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^2 - \text{أ}^2}}$

(١٢) الحل العام للمعادلة : ٣ ظا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = $\sqrt{3}$ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) $\frac{\pi}{6}$ + ٢ π ن (ب) $\frac{\pi}{6}$ + π ن

(جـ) $\frac{7\pi}{6}$ + ٢ π ن (د) $\frac{\pi}{3}$ + π ن



الدرجة الكلية

١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ٠° ≤ θ < ١٨٠° ، $\sqrt{3}$ ظا θ − ١ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢) يمكن حل المثلث القائم الزاوية فى كل الحالات الآتية ما عدا أن يكون المعطى ....

(أ) طولا ضلعين فى المثلث. (ب) طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

(جـ) قياسا زاويتين فى المثلث. (د) طول أحد ضلعى القائمة وطول الوتر.

(٣) الحل العام للمعادلة : طا $\theta = \sqrt{3}$ هو .... «حيث ن ∈ ص»

(أ) $\frac{\pi}{3}$ + ن π (ب) $\frac{\pi}{3}$ + ٢ ن π (جـ) $\frac{4\pi}{3}$ + ٢ ن π (د) $\frac{\pi}{6}$ + ن π

(٤) أبسط صورة للمقدار : جا (٩٠° − θ) قتا (١٨٠° − θ) تساوى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا θ (د) ظتا θ

(٥) إذا كان : جا أ + جا ب = ٢ فإن ....

(أ) جتا أ + جتا ب = ٠ (ب) جتا أ − جتا ب = ١

(جـ) جا أ − جا ب = ١ (د) جا (أ + ب) = −١

(٦) إذا كان : △ أ ب جـ قائم الزاوية وأطوال أضلاعه هى : أ ، أ + ١ ، أ − ١ حيث أ > ١

فإن قياس أكبر زواياه الحادة هى .... تقريبًا.

(أ) ٣٦° ٥٢َ (ب) ٤٨° ١٨َ (جـ) ٥٣° ٨َ (د) ٦٢° ٤٢َ

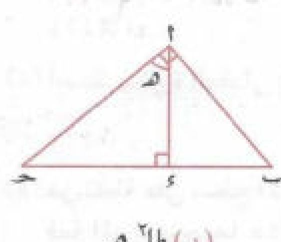
(٧) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٤٠ مترًا عن قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكانت ٧٢° فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوى .... متر.

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢١ (جـ) ١٢٢ (د) ١٢٣

(٨) $(\text{جا}^2 40° + \text{جتا}^2 40°)^6$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٦ (د) −٦

(٩) فى الشكل المقابل :



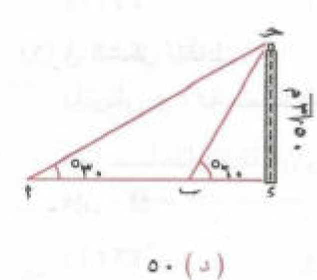
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = جا² هـ

فإن : ب جـ = ...

(أ) جا هـ (ب) طا هـ (جـ) جتا هـ (د) طا² هـ

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا قيست زاويتى ارتفاع قمة برج طوله ٥٠ $\sqrt{3}$ متر من النقطتين أ ، ب على نفس الخط الأفقى المار بقاعدة البرج فكان قياسيهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يساوى .... متر.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{3}$ (ب) ٥٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

(١١) المقدار $\frac{١ - جتا^٢ \theta}{جا^٢ \theta - ١}$ فى أبسط صورة هو ....

(أ) $- ظا^٢ \theta$ (ب) $- ظتا^٢ \theta$ (جـ) $ظا^٢ \theta$ (د) $ظتا^٢ \theta$

(١٢) إذا كانت : $قا \theta - ظا \theta = \frac{١}{٥}$ فإن : $قا \theta + ظا \theta =$ ....

(أ) $\frac{-١}{١٠}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) ١

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ١٨ سم^٢ وطول قوسه ٦ سم يساوى .... سم.

(أ) ١٨ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ١٥

(٢) فى الشكل المقابل :

أ جـ = ... سم

(أ) ١٣,٢ (ب) ٨,٣

(جـ) ٣,٧ (د) ٥,٩

(٣) الحل العام للمعادلة : $جا (٩٠° - \theta) = ١$ هو .... «حيث $ن \in$ ص»

(أ) $ن \pi$ (ب) $\frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ (جـ) $٢ ن \pi$ (د) $\pi + ٢ ن \pi$

(٤) أبسط صورة للمقدار : $جا^٢ \theta + جتا^٢ \theta + ظا^٢ \theta - قا^٢ \theta$ هى ....

(أ) ١ (ب) ‎-١ (جـ) صفر (د) ٢

(٥) من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة ٣٥ متر من قاعدة منزل رصد شخص زاوية ارتفاع قمة المنزل فوجدها ٤٥° فإن ارتفاع المنزل = ... متر.

(أ) ٤٥ (ب) ٣٥ (جـ) ٢٥ (د) ٥٥

(٦) فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متباعدتان إذا كان $م_١$ ، $م_٢$

هما مساحتا القطاعين وكان : $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{٩}{٥}$

فإن : $\theta =$ ....

(أ) ٧٢° (ب) ٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

(٧) مساحة قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١٢٠° فى دائرة مساحتها ٢٤ سم^2 تساوى .... سم^2.

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٣٦

(٨) قطاع دائرى محيطه ١٢ سم ومساحته ٩ سم^2 فإن قياس زاويته المركزية ....

(أ) $\frac{١}{٢}^{د}$ (ب) $١^{د}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}^{د}$ (د) $٢^{د}$

(٩) إذا كان : ٢٥ حا θ حتا θ = ١٢ فإن : حتا θ − حا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) ± $\frac{١}{٥}$ (جـ) ± $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$

(١٠) $\frac{\text{حا } θ}{\text{قتا } θ} + \frac{\text{حتا } θ}{\text{قا } θ}$ = ...

(أ) ١ (ب) حا θ + حتا θ (جـ) قتا θ قا θ (د) طا θ

(١١) إذا كانت : θ ∈] ٠ ، ٣٦٠° [، ٢ حتا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) ٣٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٢٤٠°

(١٢) إذا كانت : ٠ ≤ س ≤ ٣٦٠° فإن عدد حلول المعادلة : ٢ حا س = طا س هى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حا^2 θ + حتا^2 θ + طا^2 θ = ...

(أ) قا^2 θ (ب) قتا^2 θ (جـ) طا^2 θ (د) ظتا^2 θ

(٢) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٨

(٣) إذا كان : جا θ + جتا θ = ٠ حيث : ٠° < θ < ١٨٠° فإن : θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٤) الحل العام للمعادلة : جتا θ = ١ هو .... «حيث ن ∈ ص»

(أ) ن π (ب) ٢ ن π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ + ن π (د) $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π

(٥) فى الشكل المقابل :

ء ∈ $\overline{بحـ}$ ، أء = ءب = ءحـ = ٥ سم

، ق (∠ أءب) = ٨٠°

فإن : أحـ = ... سم.

(أ) ١٠ جا ٤٠° (ب) ١٠ جا ٥٠° (جـ) ٥ جا ٨٠° (د) ٥ جا ٤٠°

(٦) إذا كان : قا θ − ظا θ = ٢ فإن : قا θ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٧) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{بحـ}$ = ... سم

(أ) ٥ (ب) $\frac{٢}{٣}$ ٦

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ ٣ (د) ٣

(٨) عدد حلول المعادلة : جتا^{٢} θ − ٤ جتا θ + ٤ = ٠ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها ٣٠° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢ $\sqrt{٣}$ سم تساوى .... سم^{٢}.

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ (ب) π − ٣ (جـ) π + ٣ (د) $\frac{\pi}{٣}$ − ٢

(١٠) $\frac{٢}{١ + ظا^{٢} \theta}$ + ٢ جا^{٢} θ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٢ جا^{٢} θ (د) قا^{٢} θ

(١١) في الشكل المقابل :

مساحة المنطقة المظللة

تساوى .... سم^2

(أ) ٨ π (ب) ١٦ π

(جـ) ٤ π (د) ٢ π

٤ سم

٢ سم ٢ سم

(١٢) في الشكل المقابل :

دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، ب حـ = أ حـ ، ق (∠ أ حـ م) = ٣٦°

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٢٠ π (ب) ٣٠ π (جـ) ٤٠ π (د) ٥٠ π

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 7 حتى درس 7 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان س هو طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٩ $\sqrt{٣}$ سم^2

فإن : س = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٣}$ (د) ٣

(٢) طول نصف قطر دائرة القطاع الدائرى الذى مساحته ٤٥ سم^2 وطول قوسه ١٠ سم

يساوى .... سم

(أ) ٤,٥ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٦

(٣) مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٢ سم

تساوى .... سم^2 (لأقرب سم^2)

(أ) ١٣١ (ب) ٩٩١ (جـ) ٥٠ (د) ٢٤٨

(٤) مساحة الشكل الرباعى المحدب الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما °٣٠ تساوى .... سم^{٢}

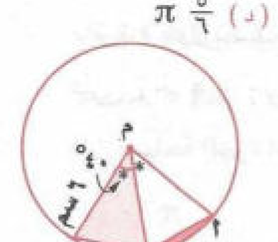
(أ) ٤٨ (ب) ١٠٨ (جـ) ٢٤ (د) ٩٦

(٥) إذا كانت : $\theta \in [\,٠ ، \pi\,[$ فإن قيمة θ التى تجعل جذرى المعادلة :

س^{٢} + ٢ س + ٢ جا θ = ٠ متساويين هى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}\pi$ (د) $\frac{٥}{٦}\pi$

(٦) فى الشكل المقابل :



دائرة م ، م جـ = ٦ سم

، ق (∠ أ م ب) = ق (∠ جـ م ب) = °٤٠

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

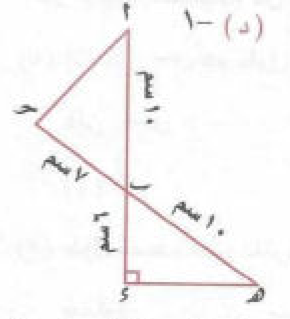
(أ) ٤ π (ب) ٥ π (جـ) ٦ π (د) ٧ π

(٧) إذا كان : أ + ب = °٣٠ فإن القيمة العددية للمقدار :

جا (٣ أ + ٢ ب) + جا (٩ أ + ٨ ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) صفر (د) −١

(٨) فى الشكل المقابل :



مساحة Δ أ ب جـ تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

(جـ) ٣٢ (د) ٣٥

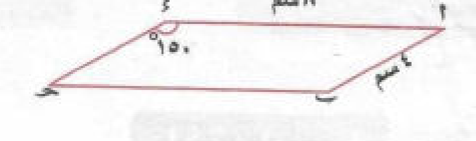
(٩) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٨ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٨ سم لأقرب سم^{٢} تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٢٩ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(١٠) الحل العام للمعادلة : جتا θ = ٠ هو .... «حيث ن ∈ ص»

(أ) π ن (ب) ٢ π ن (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ + π ن (د) $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

(١١) في الشكل المقابل :



أ ب ح ء متوازي أضلاع

مساحته = ... سم^2

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(١٢) في الشكل المقابل :

ب ء = ٦ سم ، مساحة الشكل أ ب ح ء = ٢٤ $\sqrt{3}$ سم^2

، ق (∠ ب هـ ح) = ١٢٠°

فإن : أ ح = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

الدرجة الكلية
______
٨

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت : أ(٤ ، -٣) ، ب(٤ ، ٤) ، حـ(-٢ ، -١) وكانت حـ ء تكافئ أ ب فإن النقطة ء هى ....

(أ) (-٢ ، ٦) (ب) (٢ ، -٦) (جـ) (٠ ، ٧) (د) (٠ ، -٧)

(٢) إذا كان : أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى (ن) أى من القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة ؟

(أ) أ ب ، و ن (ب) أ ب ، هـ ء (جـ) أ ب ، ن حـ (د) أ ب ، ن ء

(٣) سيارة قطعت ٢٠ متر فى اتجاه الشمال ثم قطعت نفس المسافة فى اتجاه الغرب فإن إزاحة السيارة هى ....

(أ) ٤٠ متر فى اتجاه الغرب. (ب) ٤٠ متر فى اتجاه الشمال الغربى.

(جـ) ٢٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه الشمال الغربى. (د) ٢٠ $\sqrt{2}$ متر فى اتجاه الجنوب الغربى.

(٤) أى مما يأتى يمثل كمية متجهة ؟

(أ) الزمن. (ب) درجة الحرارة. (جـ) الإزاحة. (د) الكتلة.

(٥) إذا تحرك راكب دراجة مسافة ١٢ كم فى اتجاه الشمال ثم عاد وتحرك من النقطة التى وصل إليها ٤ كم فى اتجاه الجنوب فإن المسافة التى قطعها راكب الدراجة خلال الرحلة كلها .... كم

(أ) ١٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٦) أ ب حـ ء مستطيل فإذا تحرك جسم من أ إلى حـ ثم إلى ب ثم إلى ء فإن الإزاحة الحادثة ....

(أ) مقدارها أ ب فى اتجاه ب أ (ب) مقدارها أ ء فى اتجاه ء أ

(جـ) مقدارها أ ء فى اتجاه أ ء (د) مقدارها ء حـ فى اتجاه ء حـ

(٧) أ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م فإذا كان س ، ص منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ على الترتيب فإن : $\overrightarrow{سص}$ يكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{حـم}$ (ب) $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) $\overrightarrow{حـأ}$ (د) $\overrightarrow{أم}$

(٨) إذا كانت النقطة ب صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات وكانت حـ (١ ، –٣) ، $\overrightarrow{أب}$ يكافئ $\overrightarrow{حـء}$ فإن النقطة ء هى ....

(أ) (–٢ ، ٣) (ب) (٢ ، –٣) (جـ) (–٣ ، ٣) (د) (–٣ ، –٣)

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، –٨) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، –٢) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (–٢ ، ك) متوازيين فإن : ك = ...

(أ) –٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (–٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، –٥) فإن : $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) (٢ ، ٨) (ب) (٨ ، ٢) (جـ) (٢ ، –٨) (د) (–٢ ، ٨)

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ – ٦ $\overrightarrow{ص}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ بصورته القطبية = ...

(أ) (١٢ ، ٣٠°) (ب) (١٢ ، ١٥٠°) (جـ) (١٢ ، ٢١٠°) (د) (١٢ ، ٣٣٠°)

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\left(٣ ، \frac{\pi}{٤}\right)$ فإن : ٢ $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (ب) $\left(٦ ، \frac{\pi}{٤}\right)$ (جـ) $\left(٣ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (د) $\left(٣ ، \frac{\pi}{٤}\right)$

(٦) إذا كان : $\|-٤ \overrightarrow{أ}\|$ = ٥ $\|ك \overrightarrow{أ}\|$ فإن : ك = ...

(أ) ± $\frac{٤}{٥}$ (ب) ± $\frac{٥}{٤}$ (جـ) ± ٥ (د) ± ٤

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{ح} = (٥ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ء} = (-٢ ، ٤)$ فإن : $\|\overrightarrow{ح} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ء}\| =$ ....

(أ) ٢٥ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ١

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{ح} = (٧ ، ١٢)$ فإن : $\overrightarrow{ح} =$ ....

(أ) $٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$ (جـ) $٢\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ (د) $٣\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س - ٥ ، ١٠)$ وكان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : س = ...

(أ) -٢٠ (ب) -١٨ (جـ) -١٦ (د) -١٥

(١٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح} = (٥ ، \frac{\pi}{١٨})$

فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\| + \|\overrightarrow{ح}\| =$ ....

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$

وكان : $\overrightarrow{أ} \perp (ك\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ح})$ فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -٣\overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $-٣\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

(ب) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ في نفس الاتجاه.

(جـ) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

(د) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

الدرجة الكلية ١٢

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

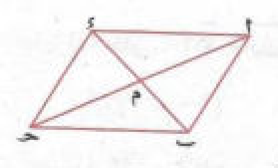
(١) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{حء}$ حيث $\overrightarrow{أب} = (٦ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ح} = (-١ ، ٣)$ فإن : $\overrightarrow{ء} =$ ....

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (-٥ ، -٧) (جـ) (-٥ ، ٧) (د) (٧ ، ٧)

(٢) المتجه $\overrightarrow{م} = -١٢\overrightarrow{س} - ١٢\overrightarrow{ص}$ يعبر عنه بالصورة القطبية بالمتجه ....

(أ) $\overrightarrow{م} = (١٢ ، \frac{\pi}{٤})$ (ب) $\overrightarrow{م} = (١٢\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤})$

(جـ) $\overrightarrow{م} = (١٢\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤})$ (د) $\overrightarrow{م} = (١٢\sqrt{٢} ، \frac{٥\pi}{٤})$



(٣) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع قطراه متقاطعان في م

فإن جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{أحـ}$ عدا العبارة ....

(أ) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بء}$ (ب) $٢\overrightarrow{أم}$ (جـ) $\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءحـ}$ (د) $\overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{ءحـ}$

(٤) في المثلث أ ب حـ : إذا كانت ء منتصف $\overline{بحـ}$ فإن : $\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{حـأ} + \overrightarrow{أء} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{بحـ}$ (ب) $\overrightarrow{ءأ}$ (جـ) $٢\overrightarrow{ءأ}$ (د) $\overrightarrow{حـب}$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ (جـ) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (د) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + \sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$ هي ....

(أ) $٤٥°$ (ب) $٣٠°$ (جـ) $٦٠°$ (د) $١٥°$

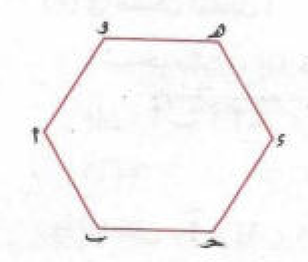
(٧) $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{بأ} =$ ....

(أ) صفر (ب) $٢\overrightarrow{أب}$ (جـ) $٢\overrightarrow{بأ}$ (د) $\overrightarrow{و}$

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢٠\overrightarrow{س} - ١٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٧\overrightarrow{س} + ٢٤\overrightarrow{ص}$

وكان : $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{م} // \overrightarrow{ن}$ (ب) $\overrightarrow{م} \perp \overrightarrow{ن}$ (جـ) $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{ن}$ (د) $\|\overrightarrow{م}\| = \|\overrightarrow{ن}\|$



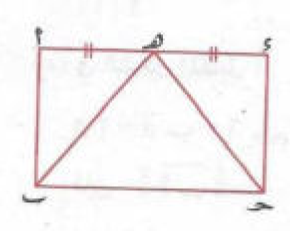
(٩) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم فإن :

$(\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{حـب}) + \overrightarrow{أو} + \overrightarrow{ءهـ} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{وهـ}$ (ب) $\overrightarrow{أهـ}$

(جـ) $\overrightarrow{أء}$ (د) $\overrightarrow{أحـ}$



(١٠) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، هـ منتصف $\overline{أء}$

، $\overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{بأ} - \overrightarrow{ءحـ} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{هـب}$ (ب) $\overrightarrow{بهـ}$

(جـ) $\overrightarrow{هـحـ}$ (د) $\overrightarrow{حـهـ}$

(١١) إذا كان : $٣\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (٥ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{أب} = (-٣ ، ١٠)$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) (٢ ، -١) (ب) (-١ ، ٢) (جـ) (٢ ، -٣) (د) (-٢ ، ٣)

(١٢) إذا كان : أ (ك ، ٢) ، ب (١ ، -١) وكان $\|\overrightarrow{أب}\| = ٥$ فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) -٣ (جـ) ٥ أو -٣ (د) ١٥

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ تؤثران فى نقطة مادية

فإن : معيار القوة المحصلة = ... نيوتن.

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) ٩ (جـ) $٣\sqrt{٢}$ (د) $٩\sqrt{٢}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{ع_أ} = ١٢٠\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_ب} = -٩٠\overrightarrow{ى}$ فإن : $\overrightarrow{ع_{بأ}}$ = ...

(أ) $٢١٠\overrightarrow{ى}$ (ب) $٣٠\overrightarrow{ى}$ (جـ) $-٣٠\overrightarrow{ى}$ (د) $-٢١٠\overrightarrow{ى}$

(٣) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، إذا كانت ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أ ء}$

فإن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ}$ = ... $\overrightarrow{أهـ}$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) -٤

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٦ ، ٨)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٢ك)$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ...

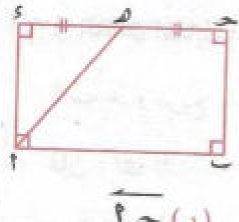
(أ) ٢ (ب) $\frac{-٩}{٤}$ (جـ) $\frac{-٩}{٨}$ (د) -٢

(٥) فى الشكل المقابل :

و أ = و ب = ٦ سم ، ق (∠ و) = ١٢٠°

فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٦\sqrt{٢}$



(٦) فى الشكل المقابل :

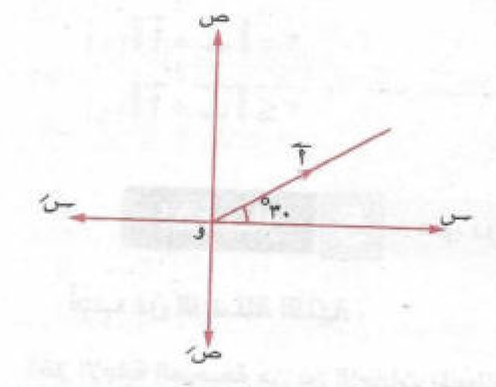
أ ب حـ ء مستطيل فيه : هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

فإن : $\overrightarrow{أ هـ} + \overrightarrow{ء هـ} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{أ ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ حـ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{أ ء}$ (د) $\overrightarrow{حـ أ}$

(٧) إذا كان المتجه ($\overrightarrow{أ}$ − ٢ $\overrightarrow{حـ}$) يكافئ $\overrightarrow{ب أ}$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ يكافئ ....

(أ) ٢ $\overrightarrow{أ}$ (ب) $\overrightarrow{حـ}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{ب حـ}$ (د) ٢ $\overrightarrow{حـ}$



(٨) فى الشكل المقابل :

$\|\overrightarrow{أ}\|$ = ٤ وحدة طول

فإن : $\overrightarrow{أ} =$ ....

(أ) (٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$) (ب) (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢)

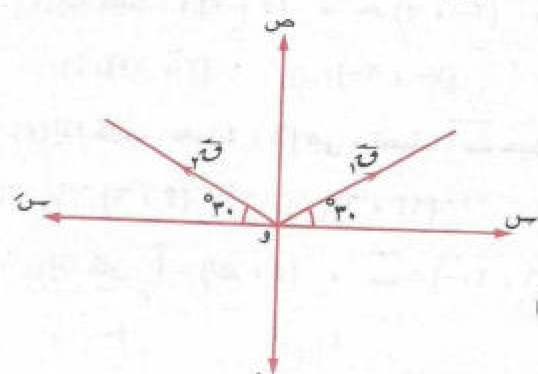
(جـ) (٤ ، $\sqrt{٣}$) (د) ($\sqrt{٣}$ ، ٢)

(٩) إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_١}$ = (٨ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣}$ = − ٥ $\overrightarrow{س}$ + (ب + ٢) $\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة واحدة والمجموعة فى حالة اتزان

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) −١٣ (جـ) ١ (د) −١



(١٠) فى الشكل المقابل :

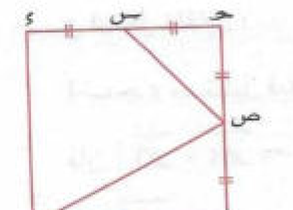
إذا كان : $ق_١ = ق_٢$ = ٣ نيوتن

فإن محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ هى

$\overrightarrow{ح} =$ ....

(أ) (٣ ، ١٨٠°) (ب) (٦ ، ١٨٠°)

(جـ) (٣ ، ٩٠°) (د) (٦ ، ٩٠°)



(١١) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع ، $\overrightarrow{أص} + \overrightarrow{س ص} = ك \overrightarrow{س حـ}$

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فإن : ....

(أ) $\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \| = ٢$ (ب) $\| \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} \| = ٢$

(جـ) $\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \| \leq ٢$ (د) $\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \| \geq ٢$

اختبار 5 حتى درس 1 من الوحدة الخامسة

الدرجة الكلية ١٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{و حـ} = \left(١٢ ، \frac{٥ \pi}{٦}\right)$ متجه موضع لنقطة حـ بالنسبة لنقطة الأصل و فإن نقطة حـ هى ....

(أ) (٦ ، ٦) (ب) $(٦ ، ٦\sqrt{٣})$ (جـ) $(-٦\sqrt{٣} ، ٦)$ (د) $(٦\sqrt{٣} ، -٦)$

(٢) إذا كانت : أ (٧ ، ٥) ، حـ (٥ ، -٢) فإن : $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب حـ} =$ ....

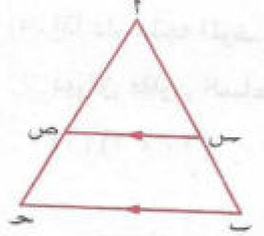
(أ) (١٢ ، ٣) (ب) (-٢ ، -٧) (جـ) (٢ ، ٧) (د) (٧ ، -٢)

(٣) إذا كانت : حـ (٤ ، ٦) هى منتصف $\overline{أ ب}$ حيث : ب (٢ ، ٨) فإن : أ = ...

(أ) (٦ ، ٤) (ب) (٦ ، ١٤) (جـ) (٣ ، ٧) (د) (٢ ، -٢)

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (ك ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢٠ ، ١٦)$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ...

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) -٥



(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ (١ ، ٢) ، ب (٦ ، ٢)

، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}} = \frac{٣}{٥}$

فإن النقطة س هى ....

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٤ ، ٢)

(٦) المتجه الذى يعبر عن السرعة المنتظمة ٦ كم/س لسيارة فى اتجاه الشمال الغربى هو ....

(أ) ٣ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ (ب) ٣ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(جـ) −٣ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ (د) −٦ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٦ $\sqrt{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(٧) المتجهات الآتية متجهات وحدة ما عدا ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، −١) (جـ) (٠,٦ ، ٠,٨) (د) (١ ، ١)

(٨) إذا كانت : حـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ وكان أ ب = ٤ ب حـ ، أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، ٤)

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٤)

(٩) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٢ ، ٥)

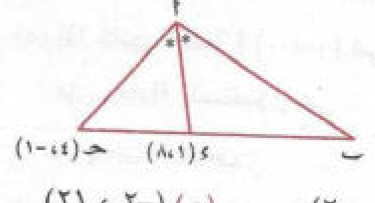
، ب (٧ ، −٢) هى ....

(أ) ٥ : ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٣ : ٢ (د) ٢ : ٥

(١٠) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٥) ، ب (٧ ، ١٠) ، حـ (٢ ، ٣)

فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) (٤ ، ٦) (ب) (٦ ، ٤) (جـ) (٦ ، ٩) (د) (٩ ، ٦)

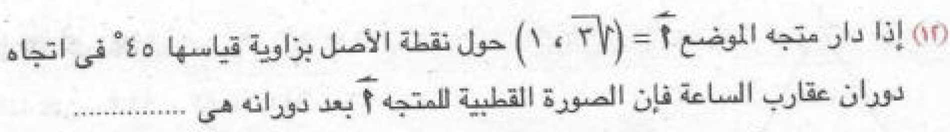


(١١) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ٤ أ حـ = ٣ أ ب

فإن النقطة ب هى ....

(أ) (−٥ ، ١٤) (ب) (−٤ ، ١٦) (جـ) (−٣ ، ٢٠) (د) (−٢ ، ٢١)



(١٢) إذا دار متجه الموضع أ = (٢√٣ ، ١) حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٤٥° فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الصورة القطبية للمتجه أ بعد دورانه هى ....

(أ) (٢ ، ٣٠°) (ب) (٢ ، ٣١٥°) (جـ) (٢ ، ٣٤٥°) (د) (٢ ، ١٥°)

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 6 حتى درس 2 من الوحدة الخامسة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ويوازى محور السينات هى ....

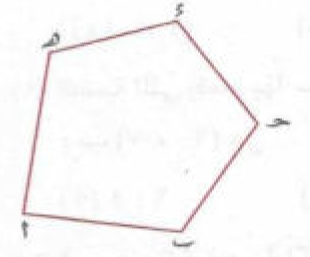
(أ) س + ٣ = ٠ (ب) ص + ٣ = ٠ (جـ) س − ٣ = ٠ (د) ص − ٣ = ٠

(٢) المعادلة المتجهة للمستقيم : ٤ س + ٣ ص = ١٢ هى ....

(أ) ر = (−٤ ، ٦) + ك (٤ ، ٣) (ب) ر = (٦ ، −٤) + ك (٣ ، ٤)

(جـ) ر = (٦ ، −٤) + ك (−٣ ، ٤) (د) ر = (٦ ، −٤) + ك (−٣ ، −٤)

(٣) فى الشكل المقابل :



جميع العبارات الآتية تعبر عن أهـ ما عدا العبارة ....

(أ) أجـ + جـ د + د هـ (ب) أب + ب د + د هـ

(جـ) أد + د هـ (د) أب + ب جـ + جـ د + د هـ

(٤) إذا كان : ى = (٢ ، −٣) متجه اتجاه المستقيم فإن جميع المتجهات الآتية تكون متجهات اتجاه لنفس المستقيم ما عدا المتجه ....

(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (−٢ ، −٣) (جـ) (٤ ، −٦) (د) (−٤ ، ٦)

(٥) إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٠) هى صورة النقطة ب (٤ ، ٢) بالانعكاس فى المستقيم ل فإن معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ٢ ص (ب) ٢ س + ص = ٥

(جـ) ٢ س − ص = ٥ (د) س + ص = ٦

(٦) المتجه الذى يعبر عن إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الجنوب الشرقى هو ....

(أ) ٢٠ $\sqrt{2}$ س + ٢٠ $\sqrt{2}$ ص (ب) −٢٠ $\sqrt{2}$ س + ٢٠ $\sqrt{2}$ ص

(ج) −٢٠ $\sqrt{2}$ س − ٢٠ $\sqrt{2}$ ص (د) ٢٠ $\sqrt{2}$ س − ٢٠ $\sqrt{2}$ ص

(٧) إذا كان : أ (٣ ، −٥) ، ب (−١ ، ٥) ، م (٦ ، ك) وكان أب // أم

فإن : ك = ...

(أ) −١٥ (ب) −١٠ (ج) −٥ (د) ٥

(٨) النسبة التى يقسم بها محور الصادات أب حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٦ ، ٧)

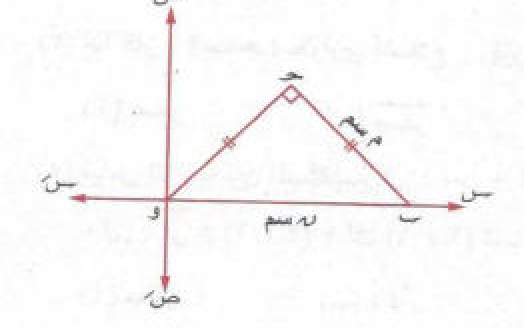
تساوى ....

(أ) ١ : ٣ من الخارج. (ب) ٣ : ١ من الداخل.

(ج) ١ : ٢ من الخارج. (د) ٣ : ٢ من الداخل.

(٩) فى الشكل المقابل :

معادلة المستقيم وحـ هى ....



(أ) ص = $\frac{م}{ن}$ س

(ب) ص = س

(ج) ص = $\frac{ن}{م}$ س

(د) ص = م ن س

(١٠) المستقيم : ٦ س − ٨ ص = ٤٨ يصنع مع محورى الإحداثيات

مثلثًا محيطه = ... وحدة طول.

(أ) ٤٨ (ب) ٢٤ (ج) ١٢ (د) ٨

(١١) متجه اتجاه العمودى على المستقيم : س = ٣ + ٢ ك ، ص = ٤ − ك هو ....

(أ) (٢ ، −١) (ب) (١ ، ٢) (ج) (٢ ، ١) (د) (٤ ، −٢)

(١٢) معادلة أحد المستقيمين المنصفين للزاوية بين محورى الإحداثيات هى ....

(أ) ص = ٢ (ب) س = ٢ ص (ج) ص = س (د) ص = ٤ س

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 7 حتى درس 3 من الوحدة الخامسة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) والمستقيم س = ٠ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

(٢) إذا كان متجه الاتجاه العمودى على مستقيم هو $\overrightarrow{ن}$ = (٣ ، ٤) فإن ميل هذا المستقيم هو ....

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(٣) إذا كان : أ ب جـ ء متوازى أضلاع فإن : $\overrightarrow{ب أ}$ + $\overrightarrow{ب جـ}$ + $\overrightarrow{ء ب}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\overrightarrow{صفر}$ (جـ) $\overrightarrow{أ جـ}$ (د) $\overrightarrow{ء ب}$

(٤) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: س + ٢ ص + ٥ = ٠
، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (١ ، ٢) تساوى ....

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٥°

(٥) إذا كانت : ب (٠ ، ٣) ، جـ (٣ ، ٠) وكانت أ تقع فى ثلث المسافة من ب إلى جـ فإن نقطة أ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (-١ ، -٢) (د) (-٢ ، -١)

(٦) إذا كانت : $\overrightarrow{أ}$ = (م-١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، -٤) وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن قيمة م = ...

(أ) $\frac{-١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٧) قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين : س = ١ ، ص = ٢ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٨) قياس الزاوية المنفرجة المحصورة بين المستقيمين :

ص = (٢ − $\sqrt{٣}$) (س + ٥) ، ص = (٢ + $\sqrt{٣}$) (س − ٧) تكون ....

(أ) ١٥٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٢٠°

(٩) العمودى على المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (١ ، −$\sqrt{٣}$) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٥٠°

(١٠) سيارتان أ ، ب تسيران فى خط مستقيم فإذا كان : $\overrightarrow{ع}_{أ}$ = ٣٠ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع}_{ب}$ = ٥٠ $\overrightarrow{س}$

فإن : $\overrightarrow{ع}_{أب}$ = ... $\overrightarrow{س}$

(أ) ٨٠ (ب) ٢٠ (جـ) −٢٠ (د) −٨٠

(١١) إذا كان المستقيم : $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{ب} = ١$ يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا مساحة سطحه ٩ وحدات مربعة فإن : ب = ...

(أ) ± ٣ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) ± ٦

(١٢) مجموعة قيم ك التى تجعل قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين س + ك ص − ٨ = ٠ ، ٢ س − ص − ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ هى ....

(أ) $\{٣ ، \frac{-١}{٣}\}$ (ب) $\{-٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (جـ) $\{٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (د) $\{٣\}$



اختبار 8 حتى درس 4 من الوحدة الخامسة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، م) متجهى اتجاه لمستقيمين متوازيين فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) $\frac{-٩}{٢}$

(٢) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٢) هى ....

(أ) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ٠$ (ب) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ١$

(جـ) $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٢} = ٠$ (د) $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٢} = ١$

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين الذين ميلاهما $\frac{١}{٢}$ ، -٢ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ٦٠°

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) على المستقيم : س + ص = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٥) أ ب جـ مثلث فيه : ب (٣ ، ٥) ، جـ (-٣ ، -٧) ، ء ∈ $\overline{ب جـ}$
بحيث مساحة △ أ ب ء = $\frac{١}{٢}$ مساحة △ أ ب جـ فإن : ء = ...

(أ) $(٣ ، \frac{١٧}{٣})$ (ب) $(\frac{٣}{٢} ، ٢)$ (جـ) (٠ ، -١) (د) (١ ، ١)

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، -٤) متجه اتجاه لمستقيم ما فإن جميع المتجهات التالية تكون متجهات اتجاه لنفس المستقيم ما عدا المتجه ....

(أ) (-٣ ، ٤) (ب) (٩ ، -١٢) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (١,٥ ، -٢)

(٧) البعد بين المستقيمين : ٣ س - ٤ ص + ٢٠ = ٠ ، ٣ س - ٤ ص + ١٠ = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٨) طول العمود النازل من النقطة (-١ ، ٤) إلى محور الصادات يساوى .... وحدة طول

(أ) ٧ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٤

(٩) أ ب جـ ء مربع فيه أ (٢ ، -٣) ، معادلة $\overleftrightarrow{جـ ء}$: ٣ س - ٤ ص + ٢ = ٠ فإن مساحة المربع
أ ب جـ ء = ... وحدة مربعة.

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٦ (د) ٢٥

(١٠) قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٢$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = -٤ $\overrightarrow{س}$ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(١١) $\overrightarrow{أ ب}$ + $\overrightarrow{ب جـ}$ + $\overrightarrow{جـ ء}$ + $\overrightarrow{ء أ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{جـ ء}$ (ب) $\overrightarrow{ب ء}$ (جـ) $\overrightarrow{٠}$ (د) $\overrightarrow{جـ ب}$

(١٢) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، ٠) + ك (٤ ، ٣)
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 9 حتى درس 5 من الوحدة الخامسة

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س − ٣ ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ ص − ٧ = ٠

يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٧٥°

(٢) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم : ر = (١٠ ، ٠) + ك (٤ ، ٣)

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤

(٣) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ١ ، ص = ٢ هى ....

(أ) س − ص = ٠ (ب) س − ٢ ص = ٠ (جـ) ٢ س − ص = ٠ (د) ٢ س + ص = ٠

(٤) فى الشكل المقابل :

٢ أ ء = ...

(أ) أ ب + أ حـ (ب) أ ب + ب ء

(جـ) ٢ أ ب + ٢ حـ ء (د) ب أ + حـ أ

(٥) أى النقط الآتية تقع على المستقيم : ر = (−٢ ، ١) + ك (١ ، −٣) ؟

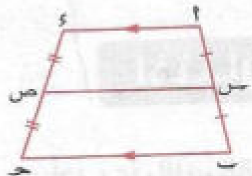
(أ) $\left(\frac{-5}{3}، -2\right)$ (ب) $\left(\frac{-3}{2}، \frac{1}{2}\right)$ (جـ) $\left(\frac{3}{2}، \frac{-1}{2}\right)$ (د) $\left(\frac{-7}{2}، 2\right)$

(٦) المستقيم : $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٧} = ١$ يصنع مع محورى الإحداثيات مثلثًا مساحة سطحه

تساوى .... وحدة مساحة

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٤ (د) ٢٨

(٧) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف إذا كان :

$\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ب حـ} = ك \overrightarrow{ص س}$

فإن : قيمة ك = ... حيث ك ∈ ع

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٨) إذا كان $\overrightarrow{ى_1} = (٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ى_2} = (-٢ ، ٤)$ متجهى اتجاه المستقيمين

فإن قياس الزاوية بين المستقيمين يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٩) المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين $ل_1$: س − ٥ = ٠

، $ل_2$: س + ص = ١٣ ومتجه اتجاهه (٤ ، ١) هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٤ ، ١) + ك (٥ ، ٨) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، ٦) + ك (٤ ، ١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، ٨) + ك (٤ ، ١) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، −٨) + ك (١ ، ٤)

(١٠) إذا كان المستقيمان : ص = ٥ س + حـ ، ص = أ س + ء متوازيين

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) −٤ (د) ٤

(١١) النقطة التى تقع فى $\frac{٢}{٥}$ المسافة من أ إلى ب للقطعة المستقيمة $\overline{أب}$

حيث أ (٣ ، −٢) ، ب (−١ ، ٥) هى ....

(أ) (−١ ، ٣) (ب) $\left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ (جـ) (٣ ، −١) (د) $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٧}{٥}\right)$

(١٢) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين $ل_1$: س + ٢ ص − ٤ = ٠

، $ل_2$: س − ٢ ص = ٠ ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٢ (ب) ص = ١ (جـ) ص = ٣ (د) ص = ٢



الاختبـارات الشهرية

أولًا : نماذج اختبارات شهر مارس.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر أبريل.

محتوى امتحان شهر مـارس

الجبـر

من : تنظيم البيانات فى مصفوفة.

إلى : المعكوس الضربى للمصفوفة.

حساب المثلثات

من : المتطابقات المثلثية.

إلى : زوايا الارتفاع والانخفاض.

الهندسة

من : الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.

إلى : تقسيم القطعة المستقيمة.

محتوى امتحان شهر أبريـل

الجبـر

من : المتباينة الخطية.

إلى : البرمجة الخطية والحل الأمثل.

حساب المثلثات

من : القطاع الدائرى.

إلى : المساحات.

الهندسة

من : معادلة الخط المستقيم.

إلى : المعادلة العامة للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين.

أولًا

نماذج اختبارات شهر مارس

اختبار 1

الدرجة الكلية

٢٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

(١) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ل & -١ \\ ٢ & م & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ن & م + ١ \\ ل & ٢ \end{pmatrix}$ وكان : $أ = ب^{مد}$

فإن : ل + م + ن = ...

(أ) −٥ (ب) ٦ (جـ) −٤ (د) ٢

(٢) كل مما يأتى يساوى $(١ - جا\,\theta)\left(١ + \frac{١}{قتا\,\theta}\right)$ ما عدا ....

(أ) $\frac{١}{١ + ظا^٢\,\theta}$ (ب) $جتا^٢\,\theta$ (جـ) $١ - جا^٢\,\theta$ (د) $قا\,\theta\,ظا\,\theta$

(٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه أ (٠ ، ٤) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٦ ، ١)

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٧ (ب) ١,٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٦

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٧ ، ٨)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٤)$ فإن كل العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (١١ ، ١٢)$ (ب) $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٣ ، ٤)$

(جـ) $٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (١٠ ، ١٢)$ (د) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أ} = (٤ ، ٦)$

(٥) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين بحيث : $أ ب^{مد} + ب أ^{مد} = \boxed{}$

فإن : $أ ب^{مد}$ تكون مصفوفة ....

(أ) صفرية. (ب) متماثلة. (جـ) شبه متماثلة. (د) قطرية.

(٦) أى من المتجهات الآتية يمثل متجه السرعة لسيارة تتحرك بسرعة مقدارها ١٠٠ كم/س فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب ؟

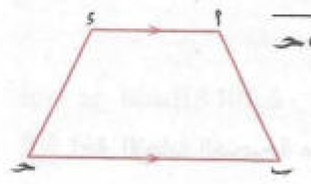
(أ) $-٥٠\,\overrightarrow{س} + ٥٠\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$ (ب) $٥٠\sqrt{٣}\,\overrightarrow{س} - ٥٠\,\overrightarrow{ص}$

(جـ) $-٥٠\sqrt{٣}\,\overrightarrow{س} + ٥٠\,\overrightarrow{ص}$ (د) $-٥٠\,\overrightarrow{س} - ٥٠\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \left(١٠ ، \frac{\pi}{٤}\right)$ فإن الصورة القطبية للمتجه $\frac{١}{٢} \overrightarrow{أ}$ هى ....

(أ) $\left(٥ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (ب) $\left(١٠ ، \frac{\pi}{٨}\right)$ (جـ) $\left(١٠ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ (د) $\left(٥ ، \frac{\pi}{٤}\right)$

(٨) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : ب جـ = ٢ أ ء ، $\overline{أء} // \overline{بجـ}$

فإن : $\overrightarrow{بجـ} + ٢ \overrightarrow{ءجـ} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{أجـ}$ (ب) $\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أء}$

(جـ) $\overrightarrow{بء}$ (د) $٢ \overrightarrow{أجـ}$

(٩) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \times ع = \begin{pmatrix} ٦ \\ ١ \end{pmatrix}$ فإن : ع = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$ (جـ) $\frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ وكان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٣)$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٤\sqrt{١٣}$

فإن : $\overrightarrow{ب} =$ ....

(أ) $\pm \overrightarrow{أ}$ (ب) $\pm ٢ \overrightarrow{أ}$

(جـ) $\pm ٤ \overrightarrow{أ}$ (د) $\left(٨\sqrt{١٣} ، ١٢\sqrt{١٣}\right)$

(١١) مجموعة الحل للمعادلة : $حا^٢ \theta - حتا \theta = \frac{١}{٤}$ حيث $٠ \leq \theta \leq ٢\pi$ هى ....

(أ) $\left\{\frac{٢\pi}{٣} ، \frac{\pi}{٣}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(جـ) $\left\{\frac{-\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣}\right\}$ (د) $\left\{\frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(١٢) إذا كان : $٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص} = (ك ، \theta^{\circ})$ ، $\overrightarrow{أ} = \left(ك ، \frac{\pi}{٢} + \theta^{\circ}\right)$

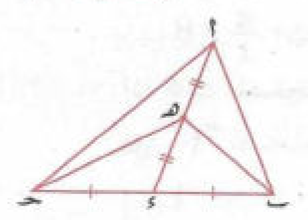
فإن : $\overrightarrow{أ} =$ ....

(أ) $-٤ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$ (ب) $٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$

(جـ) $-٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$ (د) $٤ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص}$

٢ أجب عن السؤالين الآتيين : (٤ درجات)

١ فى الشكل المقابل :



ء منتصف $\overline{بجـ}$

، هـ منتصف $\overline{أء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = ٢ \overrightarrow{هـب} + ٢ \overrightarrow{هـجـ}$

[٢] دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر $\overline{أب}$ يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠° ، احسب طول $\overline{أب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. **(٤ درجات)**

اختبار 2

الدرجة الكلية ٢٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

(١) $جا^2 θ + جا^2 θ طا^2 θ =$ ....

(أ) $٢ جا^2 θ طا^2 θ$ (ب) $٢ جا^2 θ ظتا^2 θ$

(جـ) $جا^2 θ$ (د) $طا^2 θ$

(٢) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $أب + ب أ =$ ....

(أ) ☐ (ب) $-٤ I$ (جـ) $٤ I$ (د) $-٢ I$

(٣) عند حل نظام المعادلات : ٢ س + ٣ ص − ع = ١ ، ٣ س + ٥ ص + ٢ ع = ٨ ، س − ٢ ص − ٣ ع = −١ يكون $\frac{Δ_س}{Δ} =$ ....

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (ك ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٠ ، ٤)$

وكان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{حـ ب}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) −٦ (جـ) ١ (د) ٢

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{س ص} = (٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ص ع} = (٤ ، ٥)$ فإن : $\overrightarrow{س ع} =$ ....

(أ) (٦ ، ٨) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٨ ، ٨) (د) (٤ ، ٣)

(٦) الحل العام للمعادلة : طا θ + ١ = ٠ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) $θ = \frac{٣}{٤} π + ن π$ (ب) $θ = \frac{٧}{٤} π + ٢ ن π$

(جـ) $θ = \frac{π}{٤} + ن π$ (د) $θ = \frac{π}{٢} + ٢ ن π$

(٧) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٢ × ٢ حيث $أ = (أ_{ص ع})$ ، $أ_{ص ع} = ص + ع$

فإن : $أ^{مد} =$ ....

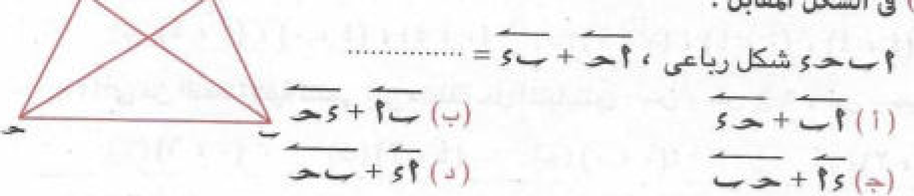
(أ) أ (ب) ٢ أ (جـ) − أ (د) −٢ أ

(٨) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} = (٣\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤})$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (٤\sqrt{٣} ، \frac{٤\pi}{٣})$ قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإن معيار محصلة القوتين = ... وحدة قوة.

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ٥

(٩) مجموع جذور المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ١ & -٤ \\ ٠ & س + ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ - س \end{vmatrix} = ٠$ يساوى ....

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) −١



(١٠) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى ، $\overrightarrow{أحـ} + \overrightarrow{بء} = $ ....

(أ) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{حـء}$ (ب) $\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{ءحـ}$

(جـ) $\overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{حـب}$ (د) $\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بحـ}$

(١١) إذا كان $\overrightarrow{س}$ متجه وحدة فى اتجاه الشرق ، $\overrightarrow{ص}$ متجه وحدة فى اتجاه الشمال فإن القوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها $٤\sqrt{٣}$ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب هى $\overrightarrow{ق} = $ ....

(أ) $٦ \overrightarrow{س} + ٢\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$ (ب) $-٦ \overrightarrow{س} + ٢\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$

(جـ) $٢\sqrt{٣} \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$ (د) $-٢\sqrt{٣} \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٤ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجه بحيث $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ يمكن أن يساوى ....

(أ) $٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$ (ب) $-٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

(جـ) $٤ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$ (د) $-٤ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٧ ، ١٢)$
أوجد : $\overrightarrow{حـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ **(٤ درجات)**

٢ أوجد مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه أ (٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٤) ، حـ (٠ ، −٢) **(٤ درجات)**

اختبار 1

الدرجة الكلية

٢٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

(١) مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤ تمثل منطقة مثلثة رؤوسها النقط ....

(أ) (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٤) (ب) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(جـ) (٤ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٤ ، ٤)

(٢) أى من النقط الآتية تنتمى إلى منطقة حل المتباينتين : س + ص ≥ ٦ ، س – ص ≤ ٧ ؟

(أ) (٦ ، ٠) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٣ ، –٥)

(٣) قطاع دائرى محيطه ٨ سم وطول قوسه ٢ سم فإن مساحته = ... سم^{٢}

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٦

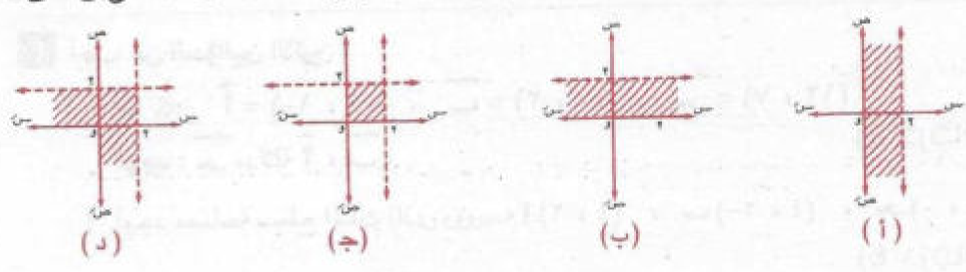
(٤) النقطة التى تنتمى لمنطقة حل المتباينتين : ٠ ≥ س ≥ ٥ ، ٠ ≥ ص ≥ ٢ وتجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ٣ ص أكبر ما يمكن هى ....

(أ) (٤ ، ٥) (ب) (٥ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٤ ، ٢)

(٥) مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى ارتفاعها ٥ سم وطول نصف قطرها ١٢ سم = ... سم^{٢}

(أ) ٥٥ (ب) ٦٨ (جـ) ٦٣ (د) ٧١

(٦) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : ٠ ≥ س < ٢ فى ح × ح ؟



(٧) مجموعة قيم ك التى تجعل قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س + ك ص − ٨ = ٠ ، ٢ س − ص − ٥ = ٠ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ هى ....

(أ) $\{٣ ، \frac{-١}{٣}\}$ (ب) $\{-٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (جـ) $\{٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (د) $\{٣\}$

(٨) المستقيم الذى معادلته : ر = (−١ ، ٣) + ك (٢ ، ٤) يمر بالنقطة ....

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (١ ، ٥) (جـ) (−٣ ، −١) (د) (٠ ، ٢)

(٩) مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم : ٢ س + ٣ ص = ٦ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١٢

(١٠) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٤) على المستقيم : ر = (٣ ، ٠) + ك (٦ ، ٨) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١,٦ (ب) ٢,٦ (جـ) ٠,٦ (د) ٣,٦

(١١) إذا مر مستقيم بالنقطة (٢ ، ١) وكان المتجه ى = (١ ، ٣) عموديًا عليه فإن معادلة المستقيم هى ....

(أ) س + ٢ ص + ٥ = ٠ (ب) س + ٣ ص − ٥ = ٠

(جـ) س − ٣ ص = ٠ (د) ٣ س − ص − ٥ = ٠

(١٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : ر = (٢ ، ٢) + ك (١ ، ١) والمستقيم س = ٠ هو ....

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويكون عموديًا على المستقيم : ر = (٢ ، ٥) + ك (−٢ ، ١) **(٤ درجات)**

٢ مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينات الآتية معًا :

س $\leq$ ٤ ، ص $<$ س + ٢ ، س + ٢ ص $\leq$ −٢ فى ح × ح **(٤ درجات)**

اختبار 2

الدرجة الكلية
....
٢٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (٢ ، ١) ، ٢ س + ص + ٥ = ٠ يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٥٤° $١٣'$ (جـ) ٩٠° (د) ٧٢°

(٢) البُعد بين المستقيمين : ٢ س − ص = ٦ ، $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، −٦) + ك (−١ ، −٢) يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٦ $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(٣) إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى $\frac{١}{٢}$ ، أ (−٢ ، ٥) فأى من النقط الآتية تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ؟

(أ) (٠ ، ٦) (ب) (١ ، $\frac{١٣}{٤}$) (جـ) (٢ ، ٦) (د) (٦ ، ٤)

(٤) دائرة طول نصف قطرها نق سم وكان محيط قطاع دائرى فيها (٢ نق + ٨) سم فإن مساحة هذا القطاع .... $سم^٢$

(أ) $نق^٢$ (ب) ٤ $نق^٢$ (جـ) ٨ $نق^٢$ (د) ٤ نق

(٥) فى المستوى الديكارتى : المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات :
س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤ تكون منطقة ....

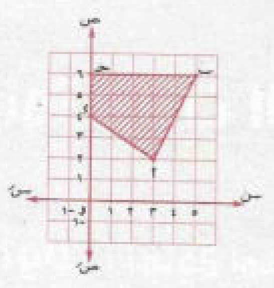
(أ) دائرية. (ب) مربعة. (جـ) مستطيلة. (د) مثلثة.

(٦) متجه اتجاه المستقيم العمودى على المستقيم الذى معادلته : ٢ س − ص + ٥ = ٠ هو ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (−١ ، ٢) (جـ) (٢ ، −١) (د) (−٢ ، −١)

(٧) معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، −١) ، ب (٤ ، ٣) هى ....

(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س + ٢ ص = ٥
(جـ) ٢ س − ص = ٥ (د) س − ٢ ص = ٥



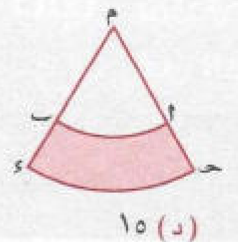
(٨) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام من المتباينات فإن القيمة الصغرى لدالة الهدف م = ٣ س + ٢ ص هى ....

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٣

(٩) المستقيم ل : س = ١ – ٢ ك ، ص = –١ + ٤ ك يمر بالنقطة ....

(أ) (١ ، ١) (ب) (١ ، –١) (جـ) (–١ ، –١) (د) (–١ ، ١)



(١٠) فى الشكل المقابل :

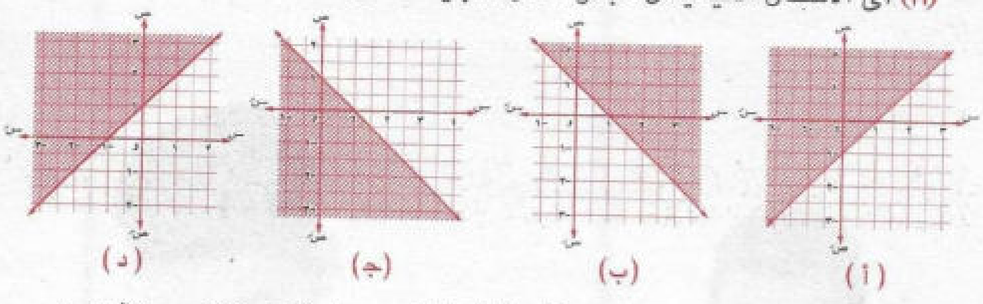
م أ = ٢ أ حـ

، مساحة القطاع م أ ب = ١٢ سم²

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(١١) أى الأشكال الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : س + ص ≤ ١ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٢) إذا كان (أ ، ب) ينتمى لمجموعة حل المتباينة : س + ٢ ص ≤ ٥ حيث أ ، ب عددان صحيحان فإن أقل قيمة للمقدار ٢ أ + ٤ ب = ...

(أ) ٥ (ب) –٥ (جـ) ١٠ (د) ٦

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك (١ ، –٢) ، ٢ س + ص + ٢ = ٠ متوازيان ثم أوجد أقصر مسافة بينهما. **(٤ درجات)**

٢ $\overline{أب}$ وتر فى دائرة طوله ٨ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة سطح القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{أب}$ **(٤ درجات)**

امتحانات الكتاب المدرسى



أولًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات.

ثانيًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندسة التحليلية.

أولاً

نماذج امتحانات الكتاب المدرسى
فى الجبر وحساب المثلثات

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات :

س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(٢) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ١ × ٣ ، ب^{مد} مصفوفة على النظم ١ × ٣

فإنه يمكن إجراء العملية الآتية ....

(أ) أ + ب (ب) ب^{مد} + أ^{مد} (جـ) أ ب^{مد} (د) أ ب

(٣) مجموعة حل المعادلتين : ٢ س − ٣ ص = ١ ، ٣ س + ٢ ص = ٨ هى ....

(أ) {(١ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ١)} (جـ) {(٢ ، ٣)} (د) {(٣ ، ٢)}

(٤) قطاع دائرى محيطه ١٠ سم وطول قوسه ٢ سم فإن مساحته بالسنتيمترات المربعة

تساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٥) مجموعة حل المعادلة : جا س + جتا س = ٠ حيث °١٨٠ < س < °٣٦٠

تساوى ....

(أ) {°٢١٠} (ب) {°٢٢٥} (جـ) {°٢٤٠} (د) {°٣١٥}

---

٢ **(أ)** حل نظام المعادلتين الخطيتين التاليتين باستخدام المصفوفات :

٢ س − ٣ ص = ٤ ، ٣ س + ٤ ص = ٢٣

(ب) أثبت صحة المتطابقة :

جا θ جا (°٩٠ − θ) ظا θ = ١ − جتا^{٢} θ

٣ **(أ)** أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه (−٤ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٥) باستخدام المحددات.

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا س + ١ = ٠ حيث س ∈] ٠ ، ٢ π[

---

٤ **(أ) أوجد قيم س التي تحقق المعادلة :** $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & س & س \\ ٥ & ٢ & س \end{vmatrix} = ٣$

(ب) رُصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ٥٠ مترًا ، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ٣٥° ، أوجد بُعد القارب عن قمة الفنار.

---

٥ **(أ)** $\overline{أب}$ وتر في دائرة طوله ٨ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° أوجد لأقرب رقم عشري واحد مساحة سطح القطعة الدائرية الصغرى التي وترها $\overline{أب}$

(ب) عين مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا في ح × ح :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ ص ≥ ٧ ، ٣ س + ٤ ص ≥ ١٤

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم س ، ص التي تجعل قيمة الدالة :

ر = ٣٠ س + ٥٠ ص أكبر ما يمكن.

النموذج الثاني

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، ب^{مد} مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإن المصفوفة أب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ٣ (ب) ٣ × ١ (جـ) ٢ × ١ (د) ١ × ٢

(٢) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هي ....

(أ) (١ ، −٣) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (١ ، ١)

(٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & س & ٢ \\ ٤ & & ٣ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤) أبسط صورة للمقدار : ١ + ظا^2 θ هى ....

(أ) جا^2 θ (ب) جتا^2 θ (جـ) قا^2 θ (د) قتا^2 θ

---

٢ (أ) **حل نظام المعادلتين الخطيتين التاليتين باستخدام طريقة كرامر :**

٢ س − ٣ ص = ٢ ، س + ٢ ص = ٥

(ب) **أثبت صحة المتطابقة :** $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{\text{قا س}} = ١ - \text{جتا}^2 \text{ س}$

---

٣ (أ) **أوجد المصفوفة أ التى تحقق العلاقة :** $\text{أ} \times \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٢٣ \\ ٨ & ١٣ \end{pmatrix}$

(ب) **أوجد الحل العام للمعادلة :** $\text{جا} \left(\frac{\pi}{٢} - \theta \right) = \frac{١}{٢}$

---

٤ (أ) إذا كان : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $\text{أ}^2 - ٥ \text{ أ} + ٢٢ I = \boxed{}$

(ب) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية °٩٠ ومساحة سطحها ٥٦ سم^2

، أوجد طول نصف قطر دائرتها.

---

٥ (أ) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ مترًا عن قاعدة عمود رأسى، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود ′٢٤ °١٩ أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض.

(ب) **أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ٢ س + ص تحت القيود :**

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ س + ٣ ص ≤ ١٨ ، −٤ س + ص ≥ −٨



النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$

فإن : ٢ $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = ...

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (−٣ ، ك) متوازيين فإن : ك = ...

(٣) إذا كانت : أ = (−٤ ، ٤) ، ب = (٥ ، −٨) ، حـ ∈ $\overline{أب}$

بحيث أحـ : حـب = ٢ : ١ فإن : حـ = (.............. ، ....)

(٤) إذا كان المستقيمان : ٣ س − ٢ ص + ٧ = ٠ ، أ س + ٣ ص + ٥ = ٠

متعامدين فإن : أ = ...

(٥) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ومتجه الاتجاه له (٣ ، ٤)

هى ....

---

٢ (أ) إذا كان : ‖ −٨ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٥ ‖ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ فأوجد : قيمة ك

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢) على المستقيم الذى معادلته :

٥ س − ١٢ ص − ٧ = ٠

---

٣ (أ) أ ب حـ ء شكل رباعى ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{حـء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{أء}$ = ٢ $\overrightarrow{هـو}$

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص = ٥ ، $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٠) + ك (١ ، ١) ويمر بالنقطة (٥ ، ٣)

٤ **(أ)** إذا كانت نقطة حـ (٢ ، ٥) تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ٤ : ١ وكانت : أ (٨ ، ٣)

فأوجد إحداثيي نقطة ب

(ب) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط : ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (-٥ ، -١)

قائم الزاوية فى ص ، ثم احسب مساحة الدائرة المارة برؤوسه.

---

٥ إذا كان $ل_١$: ٢ س + ٢ ص - ٧ = ٠ ، $ل_٢$: ٢ س - ٣ ص + ٤ = ٠ **فأوجد :**

(١) قياس الزاوية بين : $ل_١$ ، $ل_٢$

(٢) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ والنقطة (٣ ، ٤)

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (-١ ، ٢) فإن : $\overleftarrow{أب}$ = ...

(٢) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (٤ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (١ ، -٢) فإن : $\|\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}\|$ = ...

(٣) إذا كانت : أ = (-٣ ، ٤) ، ب = (٦ ، -٨)

فإن محور السينات يقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة ....

(٤) قياس الزاوية بين المستقيمين الذين ميلاهما $\frac{١}{٢}$ ، -٢ يساوى ....°

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم : س + ص = ٠

يساوى ....

---

٢ **(أ)** إذا كان : ك $\|٤ \overleftarrow{أ}\|$ = $\|-٣ \overleftarrow{أ}\|$ **فأوجد : قيمة ك**

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (-١ ، ٠) ونقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س - ص + ٤ = ٠ ، س + ص + ٥ = ٠

٣ (أ) إذا كانت : أ = (٣ ، ٤) ، ب = (٥ ، –١) ، حـ = (٢ ، –٢) ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع أ ب حـ ء فأوجد إحداثيي الرأس ء

(ب) أثبت أن المستقيمين : ر = (٠ ، ٤) + ك (١ ، –٢) ، ٢ س + ص + ٢ = ٠ متوازيان ثم أوجد أقصر بُعد بينهما.

---

٤ (أ) إذا كانت : أ = (–١ ، ٤) ، ب = (٥ ، –١) أوجد إحداثيي نقطة حـ التي تقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٢

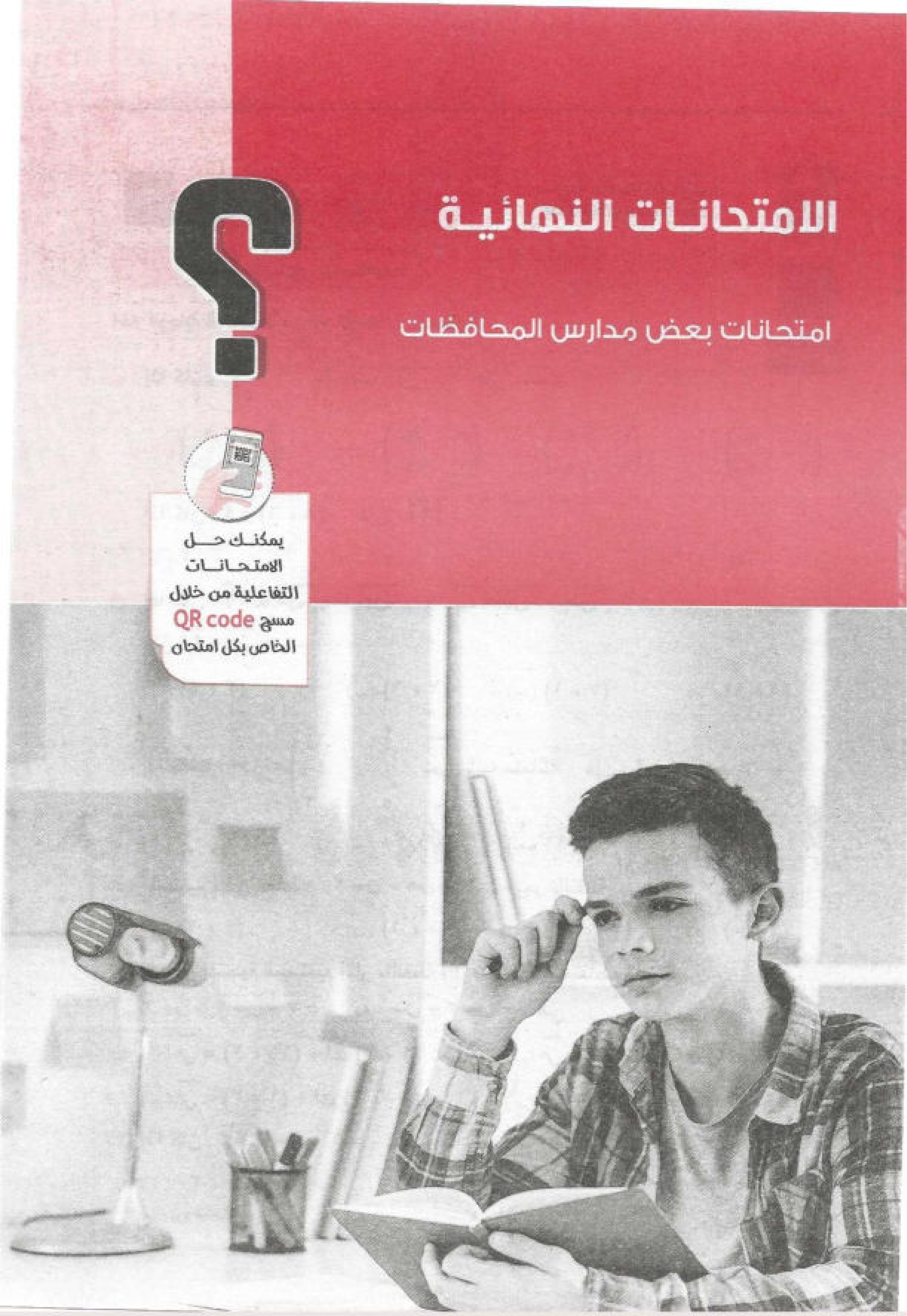
(ب) دائرة مركزها نقطة الأصل.
أثبت أن الوترين المرسومين في الدائرة الذين معادلتاهما :
٣ س + ٤ ص + ١٠ = ٠ ، ٥ س – ١٢ ص + ٢٦ = ٠
متساويان في الطول.

---

٥ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب حـ فإذا كانت :

أ (٧ ، –١) ، ب (٣ ، –١) ، حـ (٢ ، ١) ، ء (٥ ، ص)

أوجد : (١) قيمة ص (٢) مساحة سطح شبه المنحرف أ ب حـ ء


الامتحانـات النهائيـة
امتحانات بعض مدارس المحافظات
يمكنك حـل
الامتحـانـات
التفاعلية من خلال
مسح QR code
الخاص بكل امتحان



١ محافظة القاهرة

مديرية التربية والتعليم
إدارة شرق مدينة نصر

اختبار تفاعلى ①

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢- & ٥ \end{pmatrix}$ + ب = ▭ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢- & ٦- \\ ٢ & ٥- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢- & ٢- \\ ٢ & ٥- \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢- & ٢- \\ ١ & ٥- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢- & ٦- \\ ٢ & ٤- \end{pmatrix}$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، ٨) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$

فإن : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) (٤ ، ٣) (ب) (٦ ، ٢) (جـ) (١ ، ٧) (د) (١ ، ٨)

(٤) إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ب & أ & ٠ \\ حـ & ٠ & ٤- \\ ٠ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ١١ (د) −١١

(٥) المستقيم الذى معادلته : ٢ س − ص + ٥ = ٠ يمر بالنقطة ....

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (١ ، ٥) (جـ) (−٣ ، −١) (د) (٠ ، ٢)

(٦) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين

٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠ ، س + ٣ ص = ٧ هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، ١) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (٢ ، −١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (٢ ، −١) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (−١ ، ٢)

(٧) إذا كان : $\sqrt{٣}$ ظا س − ١ = ٠ حيث ٠° < س < ١٨٠° فإن : س = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ـس & ٥ \\ ٣ & ـس^٢ \end{vmatrix} = ١$ فإن : ـس = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) ١

(٩) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٤٠ متر عن قاعدة سارية علم وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة السارية ١٥° فإن ارتفاع هذه السارية = ... (لاقرب متر).

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(١٠) قطاع دائرى نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٢ سم فإن مساحته = ... سم^٢

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١١) إذا كانت : $ـس = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $ـس^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ـس} + ٣ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ١٠ \overrightarrow{ـس} + ل \overrightarrow{ص}$ متوازيين فإن : ل = ...

(أ) ٧ (ب) −٧ (جـ) ٣٠ (د) −٣٠

(١٣) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (−٤ ، ٣) وميله $\frac{٥}{٢}$ هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٤ ، ٣) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٢ ، ٥)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (−٤ ، ٣) + ك (٥ ، ٢) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (٣ ، −٤)

(١٤) المعادلة الإحداثية للخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ومتجه الاتجاه له (٢ ، −١) هى ....

(أ) ٢ ـس + ص + ٥ = ٠ (ب) ـس + ٢ ص − ١١ = ٠

(جـ) ٤ ـس + ٣ ص − ٥ = ٠ (د) ٣ ـس + ٤ ص − ٥ = ٠

(١٥) النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة : ـس + ص ≤ ٧ هى ....

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٢ ، −٥) (جـ) (٢ ، ٧) (د) (٧ ، −٢)

(١٦) أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه فإن : $\overrightarrow{ب أ} + \frac{١}{٢} \overrightarrow{أ جـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{م جـ}$ (ب) $\overrightarrow{ب ء}$ (جـ) $\overrightarrow{ب م}$ (د) $\overrightarrow{ب جـ}$

(١٧) مساحة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ (٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٤) ، حـ (٠ ، −٢)

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(١٨) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س − ٣ ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ ص − ٧ = ٠

تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٥°

(١٩) مساحة الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ٥ سم يساوى .... (لأقرب سم^{٢})

(أ) ٤٠ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٣ (د) ٤٤

(٢٠) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، ٥) إلى المستقيم : ٣ س + ٤ ص + ١ = ٠

يساوى .... وحده طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢١) مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية ١٥٠° وطول نصف قطر دائرتها

٨ سم يساوى .... (لأقرب سم^{٢}).

(أ) ٦٠ (ب) ٦٧ (جـ) ٦٨ (د) ٧٠

(٢٢) إذا كان س ، ص عددين صحيحين فإن مجموعة حل نظام المتباينات :

س > ٠ ، ص > ٠ ، س + ص < ٣ هى ....

(أ) {(٥ ، ٢)} (ب) ∅

(جـ) {(١ ، ١)} (د) {(٢ ، ١)}

(٢٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، $\frac{\pi}{٢}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ فإن : $\overrightarrow{أب}$ = ...

(أ) (−٤ ، ٣) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (٤ ، −٣) (د) (−٤ ، −٣)

(٢٤) النسبة التى يقطع بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٥)

، ب (٧ ، −٢) هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الداخل (ب) ٢ : ٣ من الداخل

(جـ) ٣ : ٢ من الخارج (د) ٢ : ٥ من الخارج

(٢٥) المستقيم $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٦} = ١$ يصنع مع محورى الإحداثيات مثلث مساحته = ... وحدة مساحة.

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٢٦) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س & ٧ \\ ٣ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٧ (د) −٧

(٢٧) إذا كان : قتا θ − ظتا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن : قتا θ + ظتا θ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ حل نظام المتباينات التالى بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≥ ٦ ، س + ص ≥ ٤

---

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، −٤) فأوجد : قيمة ك حيث $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

٢ محافظة الجيزة

إدارة ٦ أكتوبر
توجيه الرياضيات



اختبار تفاعلى ②

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & −١ \\ س − ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق (∠ب) = ٥٠° تساوى .... سم²

(أ) ٢١,٤ (ب) ٤٢,٩ (جـ) ١٨ (د) ٣٣,٤

(٣) إذا كان ٢ جا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ وكانت : θ ∈]٠ ، ٢π[فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° أو ١٥٠° (ب) ٦٠° أو ١٢٠° (جـ) ١٥٠° أو ٢١٠° (د) ١٢٠° أو ٢٤٠°

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، −٤) ، $\overrightarrow{ب جـ}$ = (٢ ، ١) فإن : $\overrightarrow{جـ أ}$ = ...

(أ) (١ ، −٥) (ب) (٥ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٥) (د) (−٥ ، ٣)

(٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ والمصفوفة ب على النظم ٣ × ١

فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ١ × ٢ (جـ) ٣ × ٢ (د) ٢ × ١

(٦) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٦

ويمر بالنقطة (٢ ، −١) هى ....

(أ) س − ص + ٣ = ٠ (ب) س − ص − ٣ = ٠

(جـ) س + ص + ٣ = ٠ (د) ٢ س − ص − ٣ = ٠

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان |٢ أ| = ٢٤ فإن : |٣ أ| = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٨١ (جـ) ١٨ (د) ٥٦

(٨) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم

تساوى = ... سم٢

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

(٩) قياس الزاوية بين المستقيمان : س = ٣ ، ص = ٥ هى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(١٠) النقط التى تمثل مجموعة حل المتباينتين : ص < ٠ ، س > ٠ فى ح × ح

هى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١١) طول العمود المرسوم من النقطة (−٥ ، ٧) إلى محور الصادات

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢

(١٢) من قمة برج ارتفاعه ١٠٠ متر وجد رجل أن قياس زاوية إنخفاض سيارة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج هى ٣٥° فإن بعد هذه السيارة عن قاعدة البرج لأقرب متر

يساوى .... متر

(أ) ١٢٢ (ب) ١٣٢ (جـ) ١٤٣ (د) ١٥٢

(١٣) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإن : $\overrightarrow{أب}$ يكافئ ....

(أ) $\overrightarrow{حـ ء}$ (ب) $\overrightarrow{ء حـ}$ (جـ) $\overrightarrow{ب حـ}$ (د) $\overrightarrow{أ حـ}$

(١٤) إذا كانت : س + $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ = ☐ فإن : س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & -٥ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

(١٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٨ ، ك) وكان : $\| \overrightarrow{أ} \|$ = ١٠ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) -٦ (جـ) ± ٦ (د) ٢

(١٦) إذا كان المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ = (م ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ١) متوازيان فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) -٦

(١٧) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة م عند ب

أ ب = ب حـ = ٨ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

أ
م
٨ سم
ب
٨ سم
حـ

(أ) ١٢,٥٧ (ب) ٤,٥٧

(جـ) ٥,٢٧ (د) ٩,١٤

(١٨) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينتين : ٢ س + ص < ٥ ، س + ٢ ص < ٦

هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٣ ، ١) (جـ) (١ ، ٣) (د) (-١ ، ٣)

(١٩) إذا كان المستقيمان : ٤ س + أ ص + ٧ = ٠ ، $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (٣ ، ٩) متوازيان

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

(٢٠) إذا كانت المصفوفة : $\begin{pmatrix} س & ١٢ \\ ٣ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) -٦ (جـ) صفر (د) ± ٦

(٢١) فى الشكل المقابل :

قياس الزاوية θ = ...

(أ) ٣٠°
(ب) ٤٥°
(جـ) ٦٠°
(د) ٧٥°

ص ، ص َ ، س ، س َ ، أ (٤، ٣) ، (−٢، ٠) ، (٣، ٠) ، حـ ، و ، ب ، θ

(٢٢) إذا كان : ظتا θ − ظا θ = $\frac{1}{2}$ فإن : ظتا θ + ظا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{-1}{2}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٢٣) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −٢) هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الخارج (ب) ٢ : ٧ من الخارج
(جـ) ٣ : ٢ من الخارج (د) ٥ : ٢ من الداخل

(٢٤) إذا كانت : $أ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $أب = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : ب = ...

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س − ١ ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −٤) متجهان متعامدان

فإن : س = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ٤

(٢٦) إذا كانت : أ (−٣ ، −٧) ، ب (٤ ، ٠) فإن النقطة حـ التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٥ : ٢ هى ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢)

(٢٧) فى الشكل المقابل :

المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠

مماس للدائرة م حيث م (١ ، ٢)

فإن مساحة الدائرة م تساوى ....

٣س + ٤ص + ٩ = ٠ ، م (١، ٢)

(أ) ٢٥ π (ب) ٥ π (جـ) ١٦ π (د) ٩ π

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ عين بيانيًا مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيًا فى ح × ح : ـس ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص – ـس ≤ ٣ ، ٥ ـس + ٢ ص ≤ ٢٠ ثم **أوجد** : من مجموعة الحل قيم ـس ، ص التى تجعل قيمة الدالة : ر = ٥ ـس + ٣ ص أكبر ما يمكن.

---

٢ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث : ٣ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$

برهن أن : ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$





محافظة الإسكندرية

إدارة شرق
توجيه الرياضيات



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت المصفوفة أ على النظم ٤ × ٢ فإن عدد عناصر المصفوفة أ = ...

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٦

(٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ \text{ـس} & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧ & \text{ص} + ١ \end{pmatrix}$ فإن : ـس + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) ٥

(٣) مساحة الشكل الرباعى الذى طول قطريه ١٢ سم ، ١٠ سم قياس الزاوية المحصورة بينهم ٤٣َ ٦٢ْ لأقرب سم^٢ ≈ ....

(أ) ٦٠ (ب) ٧٠ (جـ) ٥٣ (د) ٥٥

(٤) حا^٢ θ + حتا^٢ θ + ظا^٢ θ = ...

(أ) ١ (ب) قا^٢ θ (جـ) ٢ (د) قا^٢ θ

(٥) أى مما يأتى يمثل كمية متجهة ؟

(أ) الإزاحة. (ب) درجة الحرارة. (جـ) الزمن. (د) الكتلة.

(٦) إذا كانت : $\overline{سـ} = (٢ ، ٥)$ ، ص = (٧ ، −١) فإن النقطة ع تقسم $\overrightarrow{سـص}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ هى ....

(أ) (٧ ، −١) (ب) (١٧ ، −١٣) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (−١٣ ، ١٧)

(٧) طول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم : ٣ سـ + ٢ ص − ١٢ = ٠ هو ....

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) ٦ (د) ٢

(٨) إذا كانت المصفوفة ح على النظم ٣ × ٢ فإن المصفوفة حمد على النظم ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ١ × ١ (جـ) ٣ × ٢ (د) ٢ × ٣

(٩) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : ٢ حا θ = ٣ يساوى ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

(١٠) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم طول قوسه ٦ سم = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(١١) الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{وأ}$ = (٤ ، ٤) هى ....

(أ) (٨ ، ٤٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٨ ، ٦٠°) (د) ($٤\sqrt{٢}$ ، ٤٥°)

(١٢) إذا كانت النقط (١ ، ٨) ، (٣ ، ص) ، (٩ ، −٤) تقع على استقامة واحدة فإن : ص = ...

(أ) ١١ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) −١١

(١٣) مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم : ٢ سـ + ٣ ص = ٦ تساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٣

(١٤) الربع الذى يمثل حل النظام للمتباينتان سـ > ٠ ، ص > ٠ هو ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٥) رصد شخص يقف على بعد ٥٠ م من قاعدة برج زاوية ارتفاع قمته فوجد قياسها ٢٥° ٣٩° فإن ارتفاع البرج لأقرب م

(أ) ٢٣ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٢٦

(١٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٥ & س^٢ \end{vmatrix}$ = ١٢ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٧) إذا كان معيار المتجه : ‖ ١٢ $\overrightarrow{ب}$ ‖ = ٢ ‖ ك $\overrightarrow{ب}$ ‖ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ± ٦ (د) ٢٤

(١٨) إذا كان : ل م ن مثلث فإن : $\overrightarrow{لم}$ + $\overrightarrow{من}$ + $\overrightarrow{لن}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{و}$ (ب) $\overrightarrow{لن}$ (جـ) $\overrightarrow{نل}$ (د) ٢ $\overrightarrow{لن}$

(١٩) طول العمود النازل من النقطة (−٢ ، −٤) على المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٠) + ك (٦ ، ٨) هو ....

(أ) ١,٦ (ب) ٢,٦ (جـ) ٣,٦ (د) ٢٤

(٢٠) قياس الزاوية بين المستقيمين : ل$_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٣ ، ١)
، ل$_٢$: ٣ س = ٣ + ص هي ....

(أ) ٣٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٢١) مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٨ سم قياس زاويتها المركزية ١,٢ ≃ ....

(أ) ٨,٥ (ب) ٢,١٤ (جـ) ٤,٢٨ (د) ٢

(٢٢) إذا كان : س = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : س$^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

(٢٣) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينات : س > ٢ ، ص < ٤ ، س − ص ≥ ٠

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٠ ، ٤) (جـ) (٣ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(٢٤) إذا كان : $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (−٢٠ ، ١٦) يكون المتجهان ....

(أ) متوازيان. (ب) متضادين. (جـ) متكافئان. (د) متعامدين.

(٢٥) نقطة تقاطع المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١}$ = (٣ ، ٥) + ك (٢ ، ٦) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٣ ، ٥) + ك (٦ ، −٢) هى ....

(أ) (٢ ، ٦) (ب) (٦ ، −٢) (جـ) (٣ ، ٥) (د) (٥ ، ٣)

(٢٦) إذا كان المستقيمين : ٤ س + ب ص + ٩ = ٠ ، $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (٢ ، ٦) متوازيين

فإن : ب = ... سم

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٢٧) إذا كانت المصفوفة : ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ك & ٥ \\ ٣ & ٧ & س + ص \\ ٩ & ص & س \end{pmatrix}$ متماثلة فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد بيانيًا حل النظام من المتباينات الخطية الآتية :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٠ ≥ س ≥ ٣ ، س ≤ ص

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٤) أوجد كلًا مما يأتي : $\overrightarrow{أب}$ ، ‖ ٢ $\overrightarrow{أ}$ − ٣ $\overrightarrow{ب}$ ‖



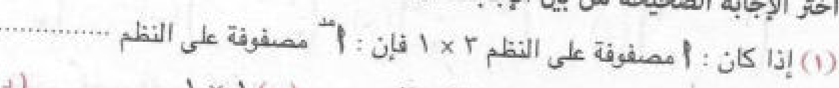
٤ محافظة القليوبية

مديرية التربية والتعليم
إدارة قليوب

اختبار تفاعلي ④



أولا أسئلة الاختيار من متعدد



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : أ مصفوفة على النظم ٣ × ١ فإن : $أ^{مد}$ مصفوفة على النظم ....

(أ) ٣ × ١ (ب) ٣ × ٣ (جـ) ١ × ١ (د) ١ × ٣

(٢) إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} ٢ س - ٤ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(٣) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين : حيث أب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $ب^{مد} أ^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كان : $\begin{pmatrix} س \\ ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(٥) إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، أ ب = I فإن : المصفوفة أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,٤ \\ ٠,٦ & ٠,١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٠,١ & ٠,٤ \\ ٠,٣ & -٠,٢ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٠,١ & -٠,٤ \\ -٠,٣ & ٠,٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠,٥ & ٠,٢٥ \\ ٠,٤ & -٠,١ \end{pmatrix}$

(٦) إذا كان : أ = (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، -٨) ، حـ = (٠ ، ٠)

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٤ (ب) -٢٤ (جـ) ١٢ (د) -١٢

(٧) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٢ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(٨) أقل قيمة للمقدار : ٣ س − ٢ ص تحت الشروط : -٣ ≤ س ≤ ٧ ، -٦ ≤ ص ≤ ٥ تساوى ....

(أ) ٣ (ب) -١٩ (جـ) -٢٨ (د) ١١

(٩) حا^{٢} س + حتا^{٢} س + ظا^{٢} س = ...

(أ) ١ (ب) ظا^{٢} س (جـ) قا^{٢} س (د) قتا^{٢} س

(١٠) إذا كان : ٢ حا س − $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث ٩٠ < س ≤ ٢٧٠ فإن : س = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٢٤٠°

(١١) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ٦ سم وقياس زاويتها المركزية ٣٠° = ...

(أ) ٣ (π − ١) (ب) ٣ (π − ٣) (جـ) π − ٣ (د) π − ٩

(١٢) مساحة الشكل الرباعى المحدب الذى طولا قطريه ٦ سم ، ١٠ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما $\frac{٢}{٣}$ π تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٦٠

(١٣) من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة ٦٠°

فإن ارتفاع الشجرة = ... متر

(أ) ٤ (ب) ٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٤ $\sqrt{3}$ (د) ٨

(١٤) عدد حلول المعادلة : جتا٢ س − ١٠ جتا س + ٢٥ = ٠ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٥) قطعت سيارة ٣٠ كم فى اتجاه الشمال ثم قطعت نفس المسافة فى اتجاه الشرق فإن

إزاحة السيارة هى ....

(أ) ٦٠ كم فى اتجاه الشرق. (ب) ٦٠ كم فى اتجاه الشمال.

(جـ) ٣٠ $\sqrt{2}$ فى اتجاه الشمال الشرقى. (د) ٣٠ $\sqrt{2}$ فى اتجاه الشمال.

(١٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٥ ، ١٢) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) ١٧ (د) ١٣

(١٧) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٣ ، ك) متجهين متعامدين فإن : ك = ...

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) −٤,٥

(١٨) إذا كان : $\overrightarrow{ب}$ = −٣ $\overrightarrow{أ}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

(جـ) $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ (د) −٣ $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{أ}$

(١٩) $\triangle$ أ ب حـ فيه : $\overline{أ ء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته

فإن : $\overrightarrow{أ ب}$ + $\overrightarrow{أ حـ}$ = ... $\overrightarrow{أ م}$

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٠) إذا كانت النقطة (٣ ، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ حيث : أ = (−٣ ، ٧)

فإن : النقطة ب = ...

(أ) (٦ ، −١) (ب) (−٦ ، ١)

(جـ) (٩ ، ٥) (د) (٠ ، ٦,٥)

(٢١) المستقيم الذى معادلته : ص = $\frac{٥}{٤}$ س + ١ يكون متجه اتجاهه ....

(أ) (٥ ، ٤) (ب) (٤ ، ٥) (جـ) (−٥ ، ٤) (د) (٥ ، −٤)

(٢٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س = ٣ ص ، س + ٢ ص = ٠ هو ....

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(٢٣) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) على المستقيم : س + ص = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) ٢

(٢٤) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٢ ، ص = ٣

هى ....

(أ) ٥ س − ٢ ص = ٠ (ب) ٢ س − ٣ ص = ٠

(جـ) ٢ س + ٥ ص = ٠ (د) ٣ س − ٢ ص = ٠

(٢٥) مساحة المثلث الذى يصنعه المستقيم : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ مع محورى الأحداثيات

يساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٢٤

(٢٦) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{أب}$

حيث : أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٧ ، −٢) هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ٣ من الداخل.

(جـ) ٣ : ٢ من الخارج. (د) ٢ : ٥ من الخارج.

(٢٧) الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم الذى معادلته المتجه : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٤) + ك (٣ ، ٢)

هى ....

(أ) ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ (ب) ٤ س − ٣ ص − ١٢ = ٠

(جـ) ٢ س − ٣ ص + ١٢ = ٠ (د) ٣ س − ٢ ص + ١٢ = ٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد مجموعة حل المتباينة الآتية بيانيًا فى ح × ح : ٣ س + ٤ ص ≥ ١٢

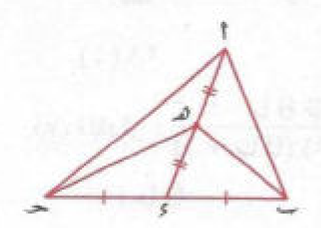
---

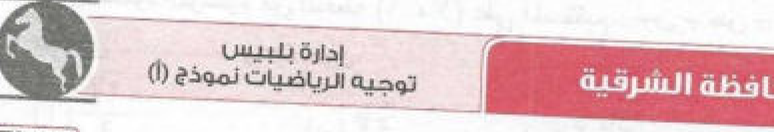
٢ فى الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{ب حـ}$

، هـ منتصف $\overline{أ ء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ} = ٢ \overrightarrow{هـ ب} + ٢ \overrightarrow{هـ حـ}$



اختبار تفاعلى ⑤

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\begin{pmatrix} س + ١ & -١ \\ ص - ٣ & ع \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فإن : ٢ س + ص + ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٦)$ فإن : $\| ٢\overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{أ} \| =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٥

(٣) إذا كانت المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^٢ + ٣ I =$ ....

(أ) أ (ب) ٤ أ (جـ) ٥ أ (د) ٤ I

(٤) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٣ س & ٤ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix} = ٦$ هى ....

(أ) {٢} (ب) {٥} (جـ) {٤} (د) {٩}

(٥) الصورة القطبية للمتجه : $\overrightarrow{ب} = -٣\sqrt{٢} \overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٢} \overrightarrow{ص}$ هى ....

(أ) $(٦ ، \frac{٥\pi}{٤})$ (ب) $(٦ ، \frac{\pi}{٤})$ (جـ) $(٦ ، \frac{٣\pi}{٤})$ (د) $(٦ ، \frac{٧\pi}{٤})$

(٦) مساحة المثلث أ ب حـ حيث : أ(٣ ، ٥) ، ب(٢ ، ٠) ، حـ(-٣ ، ٣)

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٨ (ب) ١٤ (جـ) ٧ (د) ٢

(٧) المقدار : $\frac{جا \theta \ ظا \theta}{(١ + جتا \theta)(١ - جتا \theta)}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) جا θ (ب) $جا^٢ \theta$ (جـ) قا θ (د) قتا θ

(٨) إذا كانت : المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : أ$^{-١}$ + (أ^{مد})^{مد} = ...

(أ) ٤ I (ب) ٣ I (جـ) ١٠ I (د) ٥ I

(٩) النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≤ ٦ هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (−٤ ، −٥) (جـ) (٢ ، −٣) (د) (١ ، ٢)

(١٠) القيمة العظمى لدالة : ر = ٥ س + ٤ ص تحت القيود : س ≤ ١ ، ص ≤ ١ ، س + ص ≥ ٦ عند النقطة ....

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (١ ، ٥) (جـ) (٥ ، ١) (د) (٦ ، ٠)

(١١) إذا تحرك جسيم فى اتجاه ٨٠ م فى اتجاه الشمال ثم ٦٠ م فى اتجاه الشرق فإن النسبة بين المسافة التى قطعها الجسيم ومعيار الإزاحة الحادثة هى ....

(أ) ١ : ١ (ب) ٤ : ٣ (جـ) ٥ : ٧ (د) ٧ : ٥

(١٢) سداسى منتظم طول ضلعه ٨ سم فإن مساحته = ... سم^٢

(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٤٤ $\sqrt{٣}$

(١٣) ميل المستقيم العمودى على المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (−٥ ، ١) يساوى ....

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) $\frac{-١}{٥}$

(١٤) قطاع دائرى مساحته ٦ π سم^٢ وقياس زاوية المركزية $\frac{\pi}{٣}$
فإن طول قوس القطاع = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٦ (جـ) ٦ π (د) ٢ π

(١٥) إذا كانت : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٤) ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ وكان : أب = ٤ ب حـ
فإن احداثى النقطة حـ = ...

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٤)

(١٦) رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ مترا فوجد أن زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥°
فإن بُعد الراصد عن الطائرة = ... مترًا

(أ) ٢٤٣١ (ب) ١٢٤١ (جـ) ٢٣١٥ (د) ٢٣٤١

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{أب}$ = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٠) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (٣ ، −٤)

(١٨) الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٥ ، π) هى ....

(أ) (٥ ، ٠) (ب) (−٥ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٥) (د) (٠ ، −٥)

(١٩) أ ب حـ ء مستطيل ، هـ منتصف $\overline{أء}$

فإن : $\overrightarrow{هـ ب}$ + $\overrightarrow{ب أ}$ − $\overrightarrow{ء حـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{هـ ب}$ (ب) $\overrightarrow{ب هـ}$

(جـ) $\overrightarrow{هـ حـ}$ (د) $\overrightarrow{حـ هـ}$

(٢٠) مساحة المثلث الذى يصنعه المستقيم : ٢ س − ٣ ص + ١٢ = ٠

مع محورى الإحداثيات = ... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢١) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٥) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س + ٢ = ٠ (ب) ص + ٥ = ٠

(جـ) س − ٢ = ٠ (د) ص − ٥ = ٠

(٢٢) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٤ & −٣ & ٠ \\ ٦ & ١ & ٥ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) −٣٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠

(٢٣) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: س + ٢ ص + ١ = ٠

، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٢ ، ١) يساوى ....

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (جـ) °٩٠ (د) °١٥٠

(٢٤) دائرة مركزها م (٣ ، −١) ، وتمس المستقيم : ٤ س + ٣ ص + ٦ = ٠

فإن مساحة سطحها = ... وحدة مربعة.

(أ) ٣ π (ب) ٩ π (جـ) ١٦ π (د) ٢٥ π

(٢٥) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص = ٣ ، س + ٤ ص + ٢ = ٠

ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) س + ٢ = ٠ (ب) س − ص = ٢

(جـ) س − ٢ = ٠ (د) ص − ٢ = ٠

(٢٦) إذا كان : جا θ ظا θ = $\frac{1}{2}$ حيث : θ ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، ٢ π[فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{2\pi}{3}$ (جـ) $\frac{5\pi}{3}$ (د) $\frac{4\pi}{3}$

(٢٧) أ ب حـ مثلث رؤوسه : أ (-١ ، ٥) ، ب (٤ ، -٢) ، حـ (-٣ ، ٠)

فإن معادلة المستقيم المار بالنقطة أ ، عمودى على $\overline{ب حـ}$ ....

(أ) ٧ س - ٢ ص + ١٧ = ٠ (ب) س + ٢ ص = ٠

(جـ) ٧ س + ٢ ص - ١٧ = ٠ (د) ٧ س - ٢ ص = ١٧

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ مثل أنظمة المتباينات : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ١٥

، ٤ س + ٣ ص ≤ ٢٤ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم : (س ، ص) التى تجعل (ر)

أقل ما يمكن حيث : ر = ٢ س + ٣ ص

---

٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، -٣) ، (٥ ، ١)





٦ محافظة الغربية

إدارة غرب طنطا
توجيه الرياضيات

أولا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين : $ل_1$: س + ٢ ص + ٥ = صفر

، $ل_2$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٤) + ك (١ ، ٢) يساوى ....°

(أ) صفر (ب) ٤٥ (جـ) ٩٠ (د) ١٣٥

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى الخط المستقيم : ٤ س + ٣ ص - ٥ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم : ٢ س + ٣ ص = ٦ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١٢

(٤) (١ + ظا٢ س) جا٢ س = ...

(أ) جا٢ س (ب) ظا٢ س (جـ) جتا٢ س (د) ١

(٥) إذا كان (أ ، ب) ينتمى لمجموعة حل المتباينة : س + ٢ ص ≤ ٥ حيث أ ، ب عددان صحيحان فإن أقل قيمة للمقدار : ٢ أ + ٤ ب = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ١٠ (د) ٦

(٦) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٦ \end{pmatrix}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٧) إذا كانت : أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، -١) فإن النقطة حـ التى تقع فى ربع المسافة من أ إلى ب هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (-٣ ، ٢)

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = -١٠ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ وكان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

فإن : ك = ...

(أ) -٣٠ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{١٠}$ (د) ٣٠

(٩) إذا كان : ‖ ١٢ $\overrightarrow{أ}$ ‖ = ٢ ‖ ك $\overrightarrow{أ}$ ‖ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) ± ٦ (جـ) -٦ (د) ٢٤

(١٠) قطاع دائرى محيطه ١٠ سم وطول قوسه ٢ سم فإن مساحته = ... سم٢

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١١) مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم فإن مساحته سم٢

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٣٢ $\sqrt{٣}$

(١٢) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هى ....

(أ) (١ ، -٣) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (١ ، ١)

(١٣) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{pmatrix}$ ، حـ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٩ & ٨ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{١٢} + حـ_{٢١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٥- (د) ٣

(١٤) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومتجه الاتجاه له (-١ ، ٤) هما ....

(أ) س = ١ - ك ، ص = ٥ + ٤ ك (ب) س = ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(جـ) س = ٥ + ٤ ك ، ص = - ك (د) س = - ك ، ص = ٥ + ٤ ك

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{بحـ}$ = (٢ ، ١) فإن : $\overrightarrow{حـأ}$ = ...

(أ) (١ ، -٥) (ب) (٥ ، -٣) (جـ) (-٣ ، ٥) (د) (-٥ ، ٣)

(١٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (-١ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ١) فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك - ١) $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$
فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٥}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

(١٨) مساحة القطعة الدائرية التى طول قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية ٢,١ ء
تساوى تقريبًا .... سم^{٢}

(أ) ٨,٥٧ (ب) ٢,١٤ (جـ) ٤,٢٨ (د) ١,٠٧

(١٩) إذا كانت أ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣ وكان : $أ_{س ص}$ = ٥ لكل س = ص
فإن : أ = ...

(أ) I (ب) ٥ I (جـ) ٥ [illegible] (د) [illegible]

(٢٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ ، | ٢ أ | = ٨ فإن : | ٣ $أ^{مد}$ | = ...

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٢١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : س - ٣ ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ ص - ٧ = صفر
يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ١٣٥°

(٢٢) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ك) على المستقيم :
٢ س + ص + ١ = ٠ يساوى $\sqrt{٥}$ وحدة طول فإن إحدى قيمة ك = ...

(أ) -٤ (ب) -٥ (جـ) -٨ (د) -١٠

(٢٣) النسبة التى تقسم بها محور السينات $\overrightarrow{أب}$ حيث : أ(٢ ، ٥) ، ب(٧ ، −٢)

هى ....

(أ) ٥ : ٢ من الداخل (ب) ٢ : ٣ من الداخل

(جـ) ٣ : ٢ من الخارج (د) ٢ : ٥ من الخارج

(٢٤) عمود إنارة طوله ٨ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥ متر فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة تساوى ....°

(أ) ٣٢ (ب) ٥١ (جـ) ٣٩ (د) ٥٨

(٢٥) (جاس + جتاس)^{٢} − ٢ جاس جتاس = ...

(أ) صفر (ب) جاس (جـ) ١ (د) جتاس

(٢٦) قيم س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

(أ) ٢ أ، ٤ (ب) −٢ أ، −٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

(٢٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$ = ٦ وكان : $\begin{vmatrix} أك & كحـ \\ ب & ء \end{vmatrix}$ = −٢٤ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −٤

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{بحـ}$ بحيث : ٣ $\overrightarrow{بء}$ = ٤ $\overrightarrow{ءحـ}$

أثبت أن : ٣ $\overrightarrow{أب}$ + ٤ $\overrightarrow{أحـ}$ = ٧ $\overrightarrow{أء}$

---

٢ عين مجموعة حل المتباينات الآتية معًا بيانيًا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≥ ٨ ، ٣ س + ٢ ص ≥ ١٢

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم : (س ، ص) التى تجعل (ر) أكبر ما يمكن حيث ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

٧ محافظة الدقهلية
إدارة غرب المنصورة



أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix} =$ ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة

(٢) إذا كان : (٢ ، ٣) ، (٤ ، ك) متجهين متوازيين فإن : ك = ...

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) −١٢

(٣) (١ + حتا θ) (١ − حتا θ) (١ + ظتا^٢ θ) = ...

(أ) −١ (ب) حا θ (جـ) ظا θ (د) ١

(٤) النقطة التى تقع فى منطقة حل المتباينة : س + ص $\geq$ ٥ هى ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٢) (د) (٠ ، ٧)

(٥) النسبة التى يقسم بها محور السينات $\overline{أب}$ حيث : أ = (٤ ، −٣) ، ب = (−٣ ، ٥) هى .... من الداخل.

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٢ : ٥ (جـ) ١ : ٤ (د) ٣ : ٥

(٦) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه = ١٢ سم تساوى .... سم^٢

(أ) ٣٦ (ب) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٧٢

(٧) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين الذين ميلاهما : $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{-١}{٧}$ يساوى ....

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °٤٥ (د) °٩٠

(٨) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطتين : (−٢ ، ٤) ، (٣ ، ١) هى ....

(أ) ٣ س + ٥ ص − ١٤ = ٠ (ب) ٣ س + ٥ ص + ١٤ = ٠

(جـ) ٣ س + ٥ ص = ٠ (د) ٣ س − ٥ ص = ٠

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{ح} = \left(١٢\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)$ متجه موضع النقطة ح بالنسبة لنقطة الأصل فإن إحداثيي ح ....

(أ) (١٢ ، ١٢)
(ب) (١٢ ، −١٢)
(جـ) (−١٢ ، ١٢)
(د) (−١٢ ، −١٢)

(١٠) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٨ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) ١٦
(ب) ± ٤
(جـ) ١٠
(د) −١٦

(١١) إذا كان : أ (١ ، ١) ، ب (١ ، −٢) فإن : $\| ٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \|$ = ...

(أ) ٣
(ب) −٣
(جـ) ٩
(د) −٩

(١٢) إذا كانت : $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$ فإن عدد حلول المعادلة : ٣ جا θ = ٤ يساوى ....

(أ) ٣
(ب) ٢
(جـ) ١
(د) صفر

(١٣) إذا كان : $أ^{مد} + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : $٢ (أ + ب)^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٦ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$
(ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$
(جـ) $\begin{pmatrix} ٦ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$
(د) $\begin{pmatrix} ٦ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

(١٤) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة (١ ، ٢) هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = ك (١ ، ٢)
(ب) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، ١)
(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = ك (−١ ، ٢)
(د) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، −١)

(١٥) إذا كان : أ ب حـ مثلث فإن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{أحـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{و}$
(ب) $\overrightarrow{أحـ}$
(جـ) $٢\overrightarrow{أحـ}$
(د) $\overrightarrow{بحـ}$

(١٦) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : أ − ب = ...

(أ) أ
(ب) I
(جـ) ب
(د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(١٧) من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ متر عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يبعد عن قاعدة الصخرة ١٠٠ متر بالراديان = ...

(أ) ٠,٤٦
(ب) ٠,٠٨
(جـ) ٠,٢٥
(د) ٠,٢٤

(١٨) إذا كانت النقطة حـ تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ من الخارج بنسبة ٢ : ١ فإن : $\frac{أب}{ب حـ}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٩) الربع الذى يمثل حل نظام المتباينتين : س > ٠ ، ص < ٠ هو الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢٠) الحل العام للمعادلة : حتا θ = ١ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) π ن (ب) π + π ن (جـ) ٢ π ن (د) $\frac{\pi}{٢}$ + π ن

(٢١) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & س \end{vmatrix}$ = صفر فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٢٢) إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = (١ ، −٣) متجه اتجاه لمستقيم ما فإن جميع المتجهات الآتية تكون متجهات اتجاه نفس المستقيم ماعدا المتجه ....

(أ) (−١ ، ٣) (ب) (٢ ، −٦) (جـ) (١ ، ٣) (د) (−٢ ، ٦)

(٢٣) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه = ٢٤ سم وطول قوسه = ١٢ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ٩٦ (د) ١٤٤

(٢٤) إذا كانت : أ (−١ ، −١) ، ب (٩ ، ٤) فإن إحداثيي النقطة التى تقع فى خمس المسافة من النقطة أ الى النقطة ب هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (−١ ، ٠) (جـ) (٠ ، −١) (د) (١ ، ٠)

(٢٥) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢س − ٣ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٦) إذا كان أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ (٥ ، ١) ، ب (٢ ، −٢) ، حـ (−٣ ، ك) فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٥ (د) −٥

(٢٧) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى المستقيم الذى معادلته : ٣ س + ٤ ص = ٥

يساوى .... لأقرب وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : هـ منتصف $\overline{ب حـ}$ أثبت أن : $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ء} + \overrightarrow{ء حـ} = ٢ \overrightarrow{أ هـ}$

---

٢ أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف : ر = ٢ س + ٣ ص

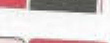
تحت القيود : س ≤ ٢ ، ص ≤ ١ ، س + ص ≤ ٤





٨ محافظة الإسماعيلية

القنطرة غرب
توجيه الرياضيات



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى (٨)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ص) وكان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

فإن : ....

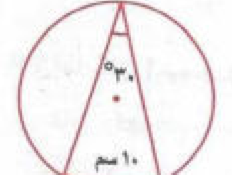
(أ) س + ٢ ص = ٠ (ب) س = ٢ ص

(جـ) ص = ٢ س (د) س ص = ٨

(٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س & ٧ \\ ٣ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٨ \\ ١١ & ١٨ \end{pmatrix}$ فإن : س + ص = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٣) مساحة الجزء المظلل = ... تقريبًا



(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ٩

(٤) أى النقط التالية تنتمى إلى مجموعة حل النظام : س > ٠ ، ص > ٠ ، ٢ س + ص > ٦ ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٤ ، –٢)

(٥) إذا كان : ‖ أ ‖ = ٤

فإن : أ = ...

(أ) (٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$) (ب) (٤ ، $\sqrt{٣}$)

(جـ) ($\sqrt{٣}$ ، ٢) (د) (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢)

(٦) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (١ ، ٢) هى ....

(أ) ر = ك (١ ، ٢) (ب) ر = ك (٢ ، ١)

(جـ) ر = (١ ، ٢) + ك (١ ، ٠) (د) ر = (١ ، ٢) + ك (٠ ، ١)

(٧) إذا كان : أ = ٣ س + ك ص وكان : ‖ أ ‖ = ٥ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) –٤ (جـ) ± ٤ (د) ٢

(٨) إذا كان المستقيم : أ س + ب ص = ١٢ يقطع جزءًا موجبًا من محور السينات طوله ٦ وحدات وجزءًا سالبًا من محور الصادات طوله ٤ وحدات فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) –٤ (د) –٢

(٩) إذا كانت : أ مصفوفة شبه متماثلة فإن المعكوس الجمعى للمصفوفة أ يساوى ....

(أ) أ (ب) أ^{مد} (جـ) – أ^{مد} (د) I

(١٠) فى الشكل المقابل :

م نقطة تلاقى متوسطات △ أ ب حـ

فإن : ب هـ + أ ء + حـ و = ...

(أ) حـ ب (ب) ب حـ

(جـ) صفر (د) أ ب + أ حـ

(١١) مساحة الدائرة التى مركزها النقطة (٤ ، −١) ويمسها المستقيم

ل : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ١) + ك (١٢ ، ٥) تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٨ π (ب) ٩ π (جـ) ٦ π (د) ٣ π

(١٢) فى نظام المعادلات : $أ_١$ س + $ب_١$ ص = $جـ_١$ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $جـ_٢$

إذا كان : $\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = ٥$ ، $\begin{vmatrix} جـ_١ & ب_١ \\ جـ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = -١٠$

، $\begin{vmatrix} أ_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & جـ_٢ \end{vmatrix} = ١٥$ فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (−٥٠ ، ٧٥) (د) (٧٥ ، −٥٠)

(١٣) قياس الزاوية بين مستقيمين ل ١ : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٥) + ك (−٣ ، ١)

، $ل_٢$: ٢ س = ٣ − ص يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٥٠°

(١٤) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متر عن قاعدة عمود رأسى وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود ٢٤َ ١٩° فإن ارتفاع العمود من سطح الأرض لأقرب متر = ...

(أ) ١٨ (ب) ٥٣ (جـ) ١٥١ (د) ٨١

(١٥) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين على النظم ٣ × ٢ فإن المصفوفة $(٥ أ + ٣ ب)^{مد}$

على النظم ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٥ × ٢ (جـ) ٢ × ٣ (د) ٣ × ٣

(١٦) إذا كانت : θ ∈ $]٠ ، \frac{π}{٢}[$ فإن مجموعة حل المعادلة : جا θ ظا θ = $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ) ∅ (ب) $\{\frac{π}{٣}\}$ (جـ) $\{\frac{٤ π}{٣}\}$ (د) $\{\frac{٥ π}{٣}\}$

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = $(٥ \sqrt{٢} ، \frac{٣ π}{٤})$ فإن : $\| \overrightarrow{أ ب} \|$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) $\sqrt{٣٩}$

(١٨) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيم : ٢ س + ص = ٣ ، س + ٤ ص + ٢ = ٠

ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص − ٢ = ٠ (ب) س − ص = ٢ (جـ) س − ٢ = ٠ (د) س + ٢ = ٠

(١٩) $جا^2 θ + جتا^2 θ + ظا^2 θ$ = ...

(أ) ١ (ب) $قا^2 θ$ (جـ) $ظا^2 θ$ (د) $قا^2 θ$

(٢٠) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ وكانت : $أ^{-1}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ س & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٥ (د) -٥

(٢١) إذا كان ميل المستقيم = $\frac{-٢}{٣}$ فإن متجه اتجاهه يكون ....

(أ) (٣ ، -٢) (ب) (-٣ ، ٢) (جـ) (٦ ، -٤) (د) كل ما سبق.

(٢٢) إذا كانت : أ مصفوفة متماثلة وكان : $أ^{مد}$ = ٢ أ فإن : أ = ...

(أ) - I (ب) I (جـ) ☐ (د) ٢ I

(٢٣) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم ومحيطه = ٢٠ سم تساوى .... $سم^2$

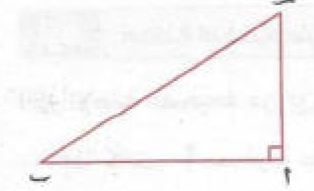
(أ) ٤٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٢٤) النقطة التى تقع على المستقيم : س = -١ + ٢ ك ، ص = ٣ - ك

والتى إحداثيها السينى = ٣ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٣ ، -١) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٣ ، ١)

(٢٥) فى الشكل المقابل :



ب جـ = ...

(أ) أ ب جا جـ (ب) أ ب قتا جـ

(جـ) أ ب ظا ب (د) أ ب قا جـ

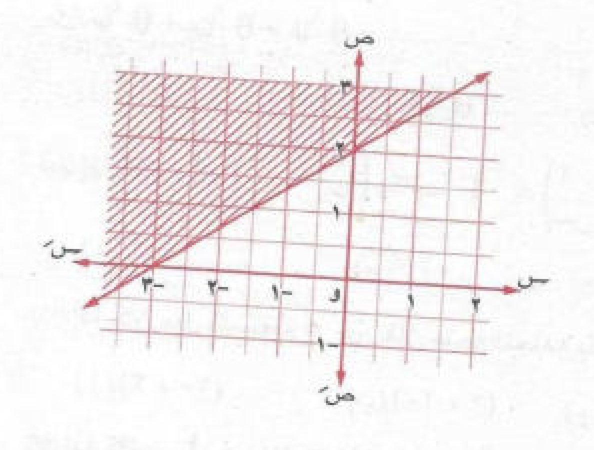
(٢٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، ٣) عمودى عليها هى ....

(أ) س + ٢ ص + ٥ = ٠ (ب) س + ٣ ص - ٥ = ٠

(جـ) س - ٣ ص = ٠ (د) ٣ س - ص - ٥ = ٠



(٢٧) أي من المتباينات الآتية تحقق الرسم البياني المقابل :



(أ) س − ٢ ص − ٦ ≥ ٠

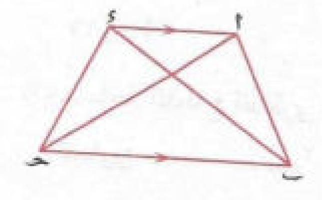
(ب) ٢ س − ٣ ص + ٦ ≥ ٠

(جـ) ٣ س − ٢ ص + ٢ ≥ ٠

(د) ٣ س + ٢ ص + ١٢ ≥ ٠

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :



١ في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{أء}$ // $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ = ٣ $\overleftarrow{أء}$

أثبت أن : $\overleftarrow{أجـ}$ + $\overleftarrow{ب ء}$ = ٤ $\overleftarrow{أء}$

---

٢ مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينات الآتية :

٣ س + ٢ ص ≥ ٦ ، ص + ٣ ≥ ٠ ، س − ص > ٠ في ح × ح



٩ محافظة كفر الشيخ

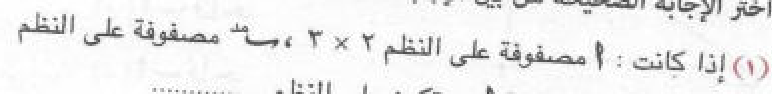
إدارة بلطيم
توجيه الرياضيات



اختبار تفاعلي (٩)

أولا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، بمد مصفوفة على النظم ١ × ٣ فإن المصفوفة أب تكون على النظم ....

(أ) ٣ × ٣ (ب) ٣ × ١ (جـ) ٢ × ١ (د) ١ × ٢

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات :

س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(٤) أبسط صورة للمقدار : ١ + ظتا^2 θ هى ....

(أ) حا^2 θ (ب) حتا^2 θ (جـ) قا^2 θ (د) قتا^2 θ

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

(٦) معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ٥ = ٠ ، ص − ٣ = ٠

وبنقطة الأصل هى ....

(أ) ٥ س − ٣ ص = ٠ (ب) ٥ س + ٣ ص = ٠

(جـ) ٣ س − ٥ ص = ٠ (د) ٣ س + ٥ ص = ٠

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ = $\left(٥ ، \frac{\pi}{١٨}\right)$

فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ + ‖$\overrightarrow{ب}$‖ + ‖$\overrightarrow{حـ}$‖ = ... وحدة طول.

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٨) إذا كانت : (١ ، ص) تنتمى إلى منطقة حل المتباينة : س + ٢ ص > ٧

فإن : ....

(أ) ص < ٣ (ب) ص > ٣ (جـ) ص = ٣ (د) ص > ٧

(٩) مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وطول قوسها ٥ سم

تساوى تقريبًا .... سم^2

(أ) ٠٫١٣ (ب) ٠٫٥١ (جـ) ٢٫٠٥ (د) ١٫٠٣

(١٠) إذا كان : ٢ $\overrightarrow{س}$ + $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ = ☐ فإن : المصفوفة $\overrightarrow{س}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\left(٦ ، \frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ فإن : $\overrightarrow{أب}$ = ...

(أ) (−٤ ، ٣) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (٤ ، −٣) (د) (−٤ ، −٣)

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، ٤) متجه اتجاه مستقيم ، فإن ميله يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(١٣) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) ص = −٣ (ب) س = ٢ (جـ) س = −٣ (د) ص = ٣

(١٤) إذا كان : ا ب حـ مثلثًا فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإن : $\overrightarrow{ا ب}$ + $\overrightarrow{ا حـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{ب حـ}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{ا ء}$ (جـ) $\overrightarrow{و}$ (د) $\overrightarrow{ا ء}$

(١٥) إذا كانت ☐ المصفوفة الصفرية على النظم ٣ × ٣ فإن عدد عناصر المصفوفة = ...

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ٣ (د) ٩

(١٦) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٣ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ا - ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}^{مد}$ فإن : (ا ب) = ...

(أ) (٦ ٧) (ب) (٧ ٦) (جـ) (٩ ٤) (د) (٤ ٧)

(١٧) إذا كان : ٢ جا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث ٩٠° ≤ θ ≤ ٢٧٠° فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

(١٨) عمود إنارة طوله ٨ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٥ متر ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذٍ لأقرب درجة يساوى ....

(أ) ٣٢° (ب) ٥١° (جـ) ٣٩° (د) ٥٨°

(١٩) إذا كان : $\overrightarrow{ا}$ = (٦ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، م) وكان : $\overrightarrow{ا} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : م = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٤

(٢٠) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

س − ٣ ص + ٥ = ٠ ، س + ٢ ص − ٧ = ٠ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

(٢١) إذا كانت : حـ منتصف $\overline{ا ب}$ حيث : حـ (٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ٦) فإن إحداثيى النقطة ا هو ....

(أ) (٧ ، ٦) (ب) (٣ ، ٦) (جـ) (−٧ ، ٠) (د) (٠ ، ٦)

(٢٢) إذا كان : $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ . & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $س^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ . & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ . & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ . & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ . & ١ \end{pmatrix}$

(٢٣) قطاع دائرى محيطه ١٠ سم وطول قوسه ٢ سم ، فإن مساحته = ... $سم^٢$

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٢٤) مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم ، فإن مساحته .... $سم^٢$

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٢٤\sqrt{٣}$ (د) $٣٢\sqrt{٣}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -٧ \overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (جـ) $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ (د) $٧ \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

(٢٦) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$

حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ٦) تساوى ....

(أ) ٢ : ٥ من الداخل.

(ب) ٥ : ٢ من الخارج.

(جـ) ١ : ٣ من الداخل.

(د) ٣ : ١ من الخارج.

(٢٧) إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطة ن (٢ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه له حيث $\overrightarrow{ى}$ = (-١ ، ٢)

فإن المعادلتين البارامتريتين للمستقيم ل هما ....

(أ) س = ٢ - ك ، ص = -٣ + ٢ ك (ب) س = ٢ - ك ، ص = ٣ - ٢ ك

(جـ) س = ٢ + ك ، ص = ٣ + ٢ ك (د) س = ٢ - ك ، ص = ٣ + ٢ ك

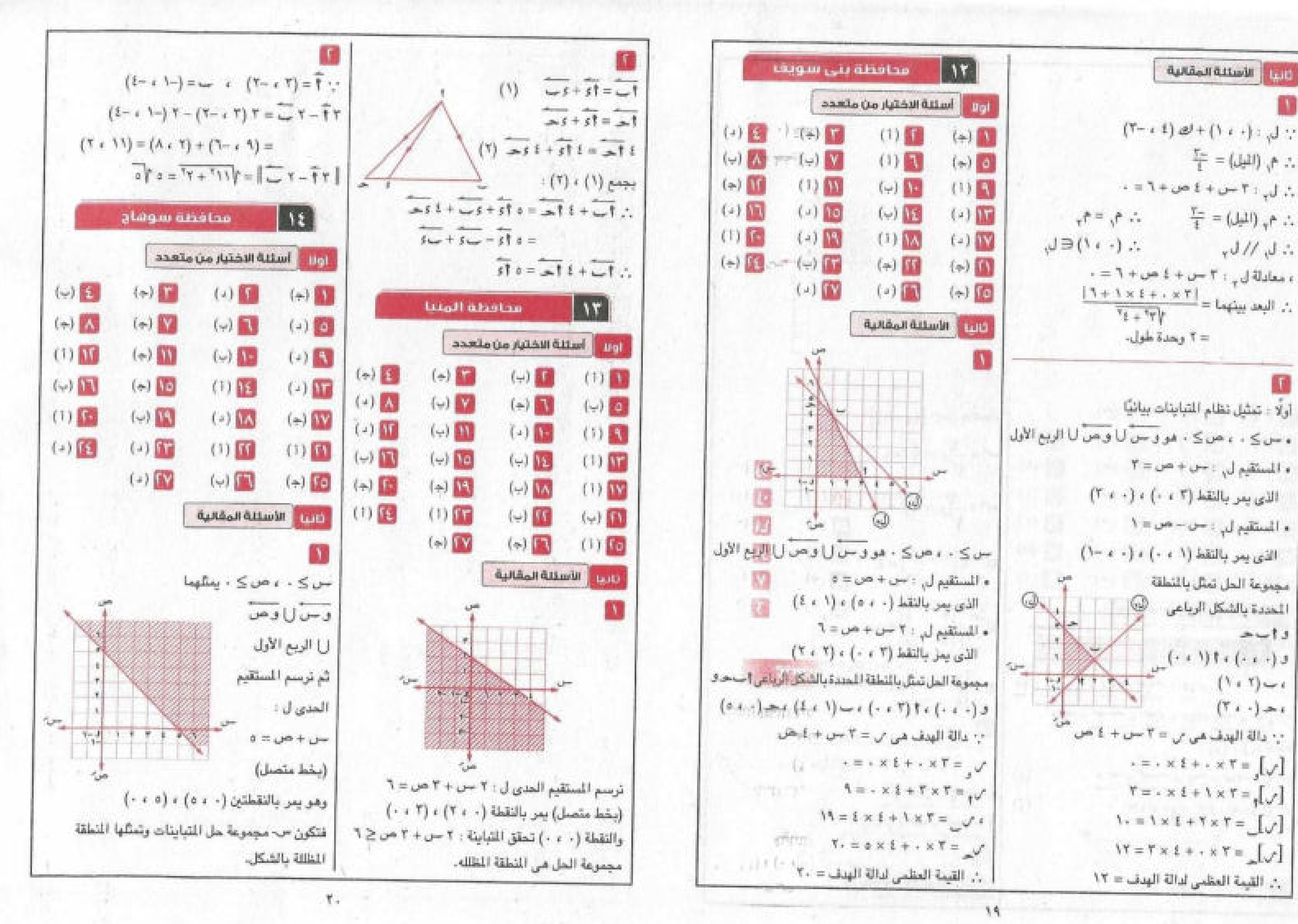
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ص < ٢ س + ٣

٢ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ} = ٢ \overrightarrow{أهـ}$



ثانيًا الأسئلة المقالية

1

∵ ل : (٠ ، ١) + ك (٤ ، -٣)

∴ م (الميل) = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ل₁ : ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

∴ م₁ (الميل) = $\frac{-٣}{٤}$ ∴ م₁ = م₂

∴ ل // ل₁ ∴ (٠ ، ١) ∈ ل

، معادلة ل₁ : ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

∴ البعد بينهما = $\frac{|٣ \times ٠ + ٤ \times ١ + ٦|}{\sqrt{٣^2 + ٤^2}}$

= ٢ وحدة طول.

2

أولًا : تمثيل نظام المتباينات بيانيًا

• س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ هو و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

• المستقيم ل₁ : س + ص = ٣ الذى يمر بالنقط (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

• المستقيم ل₂ : س − ص = ١ الذى يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (٠ ، -١)

مجموعة الحل تمثل بالمنطقة المحددة بالشكل الرباعى و أ ب حـ

و (٠ ، ٠) ، أ (١ ، ٠)

، ب (٢ ، ١)

، حـ (٠ ، ٣)

∵ دالة الهدف هى ر = ٣ س + ٤ ص

[ر]و = ٣ × ٠ + ٤ × ٠ = ٠

[ر]أ = ٣ × ١ + ٤ × ٠ = ٣

[ر]ب = ٣ × ٢ + ٤ × ١ = ١٠

[ر]حـ = ٣ × ٠ + ٤ × ٣ = ١٢

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ١٢

١٢ محافظة بنى سويف

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (جـ)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (أ)	٧ (ب)	٨ (ب)
٩ (أ)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (جـ)
١٣ (د)	١٤ (ب)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (د)	١٨ (أ)	١٩ (د)	٢٠ (أ)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (ب)	٢٤ (جـ)
٢٥ (جـ)	٢٦ (د)	٢٧ (د)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ هو و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

• المستقيم ل₁ : س + ص = ٥ الذى يمر بالنقط (٠ ، ٥) ، (١ ، ٤)

• المستقيم ل₂ : ٢ س + ص = ٦ الذى يمر بالنقط (٣ ، ٠) ، (٢ ، ٢)

مجموعة الحل تمثل بالمنطقة المحددة بالشكل الرباعى أ ب حـ و

و (٠ ، ٠) ، أ (٣ ، ٠) ، ب (١ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٥)

∵ دالة الهدف هى ر = ٣ س + ٤ ص

ر_و = ٣ × ٠ + ٤ × ٠ = ٠

ر_أ = ٣ × ٣ + ٤ × ٠ = ٩

، ر_ب = ٣ × ١ + ٤ × ٤ = ١٩

ر_حـ = ٣ × ٠ + ٤ × ٥ = ٢٠

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ٢٠

2

أب = أء + ءب (١)

أحـ = أء + ءحـ

٤ أحـ = ٤ أء + ٤ ءحـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ أب + ٤ أحـ = ٥ أء + ءب + ٤ ءحـ

= ٥ أء − ءب + ءب

∴ أب + ٤ أحـ = ٥ أء

١٣ محافظة المنيا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (ب)	٣ (جـ)	٤ (جـ)
٥ (ب)	٦ (جـ)	٧ (ب)	٨ (د)
٩ (أ)	١٠ (د)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (أ)	١٤ (ب)	١٥ (ب)	١٦ (ب)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (جـ)	٢٠ (جـ)
٢١ (ب)	٢٢ (ب)	٢٣ (أ)	٢٤ (أ)
٢٥ (أ)	٢٦ (جـ)	٢٧ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

ترسم المستقيم الحدى ل : ٢ س + ٣ ص = ٦

(بخط متصل) يمر بالنقطة (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٠)

والنقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

مجموعة الحل هى المنطقة المظلله.

2

∵ أ = (٣ ، -٢) ، ب = (-١ ، -٤)

٣ أ − ٢ ب = ٣ (٣ ، -٢) − ٢ (-١ ، -٤)

= (٩ ، -٦) + (٢ ، ٨) = (١١ ، ٢)

‖٣ أ − ٢ ب‖ = $\sqrt{١١^2 + ٢^2}$ = ٥ $\sqrt{٥}$

١٤ محافظة سوهاج

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (د)	٣ (جـ)	٤ (ب)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (جـ)	٨ (جـ)
٩ (د)	١٠ (ب)	١١ (جـ)	١٢ (أ)
١٣ (د)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (جـ)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (أ)
٢١ (أ)	٢٢ (أ)	٢٣ (د)	٢٤ (د)
٢٥ (جـ)	٢٦ (ب)	٢٧ (د)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

ثم ترسم المستقيم الحدى ل : س + ص = ٥ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٦) إذا كانت : س ≤ ١ ، ص ≤ ١ ، س + ص ≥ ٦

فإن دالة الهدف ر = ٥ س + ٤ ص يكون لها قيمة عظمى عند النقطة ....

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (١ ، ٥) (جـ) (٥ ، ١) (د) (٦ ، صفر)

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ك + ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ك ، ٥ ك – ٣) فإن إحدى قيم ك

التى تجعل $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ هى ....

(أ) ٣ (ب) –٣ (جـ) ٢ (د) –٢

(٨) إذا كان : ٢ س + $\begin{pmatrix} ٢- & ٢- \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٢- & ٢- \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤- & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) أبسط صورة للمقدار : $\frac{\text{جاس جتاس ظاس + جاس جتاس ظتاس}}{\text{جاس قاس}}$ = ...

(أ) ظتاس (ب) ظاس (جـ) جتاس (د) قتاس

(١٠) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم : ٣ س – ٤ ص = ١٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، $\overline{جـ أ} \cap \overline{ء ب}$ = {م} فإن : $\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{ء أ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{جـ أ}$ (ب) $\overrightarrow{ب ء}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{م جـ}$ (د) ٢ $\overrightarrow{م ء}$

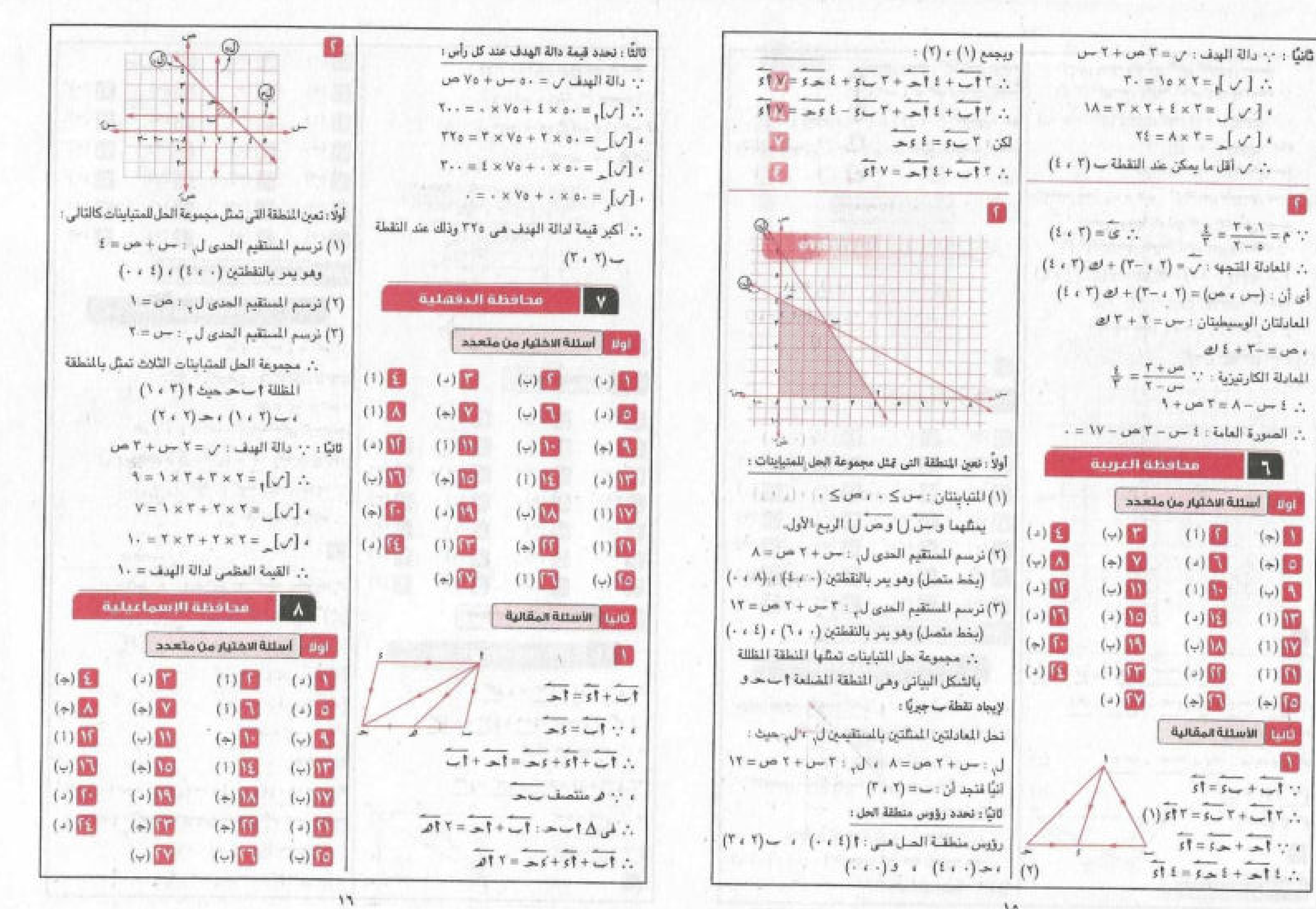
(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ جاس} & ٠ & ٠ \\ ١ & \text{أ جتاس} & ٠ \\ \text{قاس} & \text{ظتاس} & \text{أ ظاس} \end{vmatrix}$ = – $أ^٢$ $جتا^٢$ س + ٨ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) –٢ (جـ) –٨ (د) ٢

(١٣) مساحة الشكل الرباعى المحدب الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٣ سم ويحصران زاوية

جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ تساوى .... $سم^٢$

(أ) ٣٠ (ب) ٧٢ (جـ) ٦٠ (د) ١٤٤



ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٣ ص + ٢ س
∴ ر[م] = ٢ × ١٥ = ٣٠
، ر[ب] = ٣ × ٤ + ٢ × ٣ = ١٨
، ر[حـ] = ٣ × ٨ = ٢٤
∴ ر أقل ما يمكن عند النقطة ب (٣ ، ٤)

٢

∵ م = (١ + ٣)/(٥ − ٢) = ٤/٣ ∴ ى = (٣ ، ٤)
∴ المعادلة المتجهة : ر = (٢ ، −٣) + ك (٣ ، ٤)
أي أن : (س ، ص) = (٢ ، −٣) + ك (٣ ، ٤)
المعادلتان الوسيطيتان : س = ٢ + ٣ ك
، ص = −٣ + ٤ ك
المعادلة الكارتيزية : ∵ (ص + ٣)/(س − ٢) = ٤/٣
∴ ٤ س − ٨ = ٣ ص + ٩
∴ الصورة العامة : ٤ س − ٣ ص − ١٧ = ٠

٦ محافظة الغربية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (د)	٧ (جـ)	٨ (ب)
٩ (ب)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (أ)	١٤ (د)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (جـ)
٢١ (أ)	٢٢ (د)	٢٣ (أ)	٢٤ (د)
٢٥ (جـ)	٢٦ (جـ)	٢٧ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ أب + ب ء = أ ء
∴ ٢ أب + ٢ ب ء = ٢ أ ء (١)
، ∵ أ حـ + حـ ء = أ ء
∴ ٤ أ حـ + ٤ حـ ء = ٤ أ ء (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :
∴ ٢ أب + ٤ أحـ + ٢ ب ء + ٤ حـ ء = ٦ أ ء
∴ ٢ أب + ٤ أحـ + ٢ ب ء − ٤ ء حـ = ٦ أ ء
لكن : ٢ ب ء = ٤ ء حـ
∴ ٢ أب + ٤ أحـ = ٦ أ ء

٢

أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات :
(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
يمثلهما و س ∪ و ص في الربع الأول.
(٢) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ٢ ص = ٨
(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)
(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٣ س + ٢ ص = ١٢
(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)
∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البياني وهي المنطقة المضلعة أ ب حـ و
لإيجاد نقطة ب جبريًا :
نحل المعادلتين الممثلتين بالمستقيمين ل١ ، ل٢ حيث :
ل١ : س + ٢ ص = ٨ ، ل٢ : ٣ س + ٢ ص = ١٢
أننا فنجد أن : ب = (٢ ، ٣)
ثانيًا : نحدد رؤوس منطقة الحل :
رؤوس منطقة الحل هي : أ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٠) ، و (٠ ، ٠)

ثالثًا : نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :
∵ دالة الهدف ر = ٥٠ س + ٧٥ ص
∴ ر[أ] = ٥٠ × ٤ + ٧٥ × ٠ = ٢٠٠
، ر[ب] = ٥٠ × ٢ + ٧٥ × ٣ = ٣٢٥
، ر[حـ] = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٤ = ٣٠٠
، ر[و] = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٠ = ٠
∴ أكبر قيمة لدالة الهدف هي ٣٢٥ وذلك عند النقطة ب (٢ ، ٣)

٧ محافظة الدقهلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (ب)	٣ (د)	٤ (أ)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (جـ)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (د)
١٣ (د)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (د)	٢٠ (جـ)
٢١ (أ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (أ)	٢٤ (د)
٢٥ (ب)	٢٦ (أ)	٢٧ (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

أب + أء = أحـ
، ∵ أب = ء حـ
∴ أب + أء + ء حـ = أحـ + أب
، ∵ هـ منتصف ب حـ
∴ في Δ أ ب حـ : أب + أحـ = ٢ أهـ
∴ أب + أء + ء حـ = ٢ أهـ

٢

أولًا : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :
(١) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ص = ٤
وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)
(٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = ١
(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٣ : س = ٢
∴ مجموعة الحل للمتباينات الثلاث تمثل بالمنطقة المظللة أ ب حـ حيث أ (٣ ، ١)
، ب (٢ ، ١) ، حـ (٢ ، ٢)
ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٢ س + ٣ ص
∴ ر[أ] = ٢ × ٣ + ٣ × ١ = ٩
، ر[ب] = ٢ × ٢ + ٣ × ١ = ٧
، ر[حـ] = ٢ × ٢ + ٣ × ٢ = ١٠
∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ١٠

٨ محافظة الإسماعيلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (أ)	٣ (د)	٤ (جـ)
٥ (د)	٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (جـ)
٩ (ب)	١٠ (جـ)	١١ (ب)	١٢ (أ)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (ب)	١٨ (جـ)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (د)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (د)
٢٥ (ب)	٢٦ (ب)	٢٧ (ب)	

(٢٢) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

(٢٣) الحل العام للمعادلة : ظتا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{3}$ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ ن (ب) $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ ن (جـ) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi$ ن (د) $\frac{\pi}{2} + \pi$ ن

(٢٤) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص = ٧ (ب) ص = −٢ (جـ) س = ٧ (د) س = −٢

(٢٥) إذا كان : م = ١٢ س − ١٢ ص فإن الصورة القطبية للمتجه م هى ....

(أ) $\left(-12\sqrt{2} ، \frac{7}{4}\pi\right)$ (ب) $\left(12\sqrt{2} ، \frac{7}{4}\pi\right)$

(جـ) $\left(12\sqrt{2} ، \frac{3}{4}\pi\right)$ (د) $\left(12\sqrt{2} ، \frac{\pi}{4}\right)$

(٢٦) إذا كانت : قتا θ − ظتا θ = $\frac{1}{5}$ فإن : قتا θ + ظتا θ = ...

(أ) $\frac{-1}{10}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{1}{25}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٢٧) إذا كان : أ (−٣ ، −٧) ، ب (٤ ، ٠) فإن : حـ النقطة التى تقسم أب من الداخل بنسبة ٥ : ٢ هى ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢)

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد بيانيًا منطقة الحل لنظام المتباينات الآتية :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، س + ٢ ص ≤ ٦

ثم استنتج الحل الأمثل الذى يجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ص (قيمة عظمى)

٢ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار (٢ ، −١) وميله $\frac{1}{2}$

٤

(١) حـ = $\left(\frac{١ \times ٥ + (-١) \times ٢}{٣} ، \frac{١ \times (-١) + ٢ \times ٤}{٣}\right)$

$= \left(١ ، \frac{٧}{٣}\right)$

(ب) ∵ $\frac{|٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ + ١٠|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٢$ وحدة طول.

، $\frac{|٥ \times ٠ - ١٢ \times ٠ + ٢٦|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} = ٢$ وحدة طول.

∴ الوتران على بُعدين متساويين من مركز الدائرة.

∴ الوتران متساويان في الطول.

٥

(١) ∵ $\overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{أ}$

= (٥ − ٧ ، ص + ١)

= (−٢ ، ص + ١)

، $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب}$

= (٢ − ٣ ، ١ + ١) = (−١ ، ٢)

، ∵ $\overleftrightarrow{أ د} // \overleftrightarrow{ب حـ}$

∴ (−٢) × ٢ − (−١) × (ص + ١) = ٠

∴ −٤ + ص + ١ = ٠ ∴ ص = ٣

(٢) ∵ $\overrightarrow{أ د} = (-٢ ، ٤)$

∴ $\|\overrightarrow{أ د}\| = \sqrt{٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ∵ $\|\overrightarrow{ب حـ}\| = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ∵ معادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هي : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = -٢$

أي : ص + ١ = −٢ س + ٦

أي : ٢ س + ص − ٥ = ٠

∴ ارتفاع شبه المنحرف = $\frac{|٢ \times ٧ + (-١) - ٥|}{\sqrt{٤ + ١}}$

= $\frac{٨}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{٢\sqrt{٥} + \sqrt{٥}}{٢} \times \frac{٨}{\sqrt{٥}}$

= ١٢ وحدة مربعة.

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (جـ)	٣ (ب)	٤ (ب)
٥ (جـ)	٦ (جـ)	٧ (أ)	٨ (أ)
٩ (ب)	١٠ (أ)	١١ (د)	١٢ (جـ)
١٣ (ب)	١٤ (ب)	١٥ (جـ)	١٦ (جـ)
١٧ (ب)	١٨ (ب)	١٩ (جـ)	٢٠ (ب)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (أ)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (أ)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

نرسم حل المتباينات كالآتي :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

و $\overrightarrow{س}$ ∪ $\overrightarrow{ص}$ ∪ الربع الأول

− المستقيم ل١ : س + ص = ٤

يمر بالنقط (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

− المستقيم ل٢ : س + ٣ ص = ٦

يمر بالنقط (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

منطقة الحل هي المحددة بالشكل الرباعي و أ ب حـ

٢

∵ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ ٢ × ك + ٥ × −٤ = ٠

∴ ٢ ك = ٢٠ ∴ ك = ١٠

٢ محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (ب)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (أ)	١٢ (جـ)
١٣ (ب)	١٤ (جـ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (ب)	١٨ (د)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (ب)	٢٢ (جـ)	٢٣ (د)	٢٤ (جـ)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (جـ)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

• س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلها و $\overrightarrow{س}$ ∪ و $\overrightarrow{ص}$ ∪ الربع الأول

• نرسم المستقيم الحدي ل١ : ص − س = ٢

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

• نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ٥ س + ٢ ص = ٢٠

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٠)

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يبعد عن قاعدة الصخرة ٢٠٠ متر بالراديان = ...

(أ) ٠,٠٨ (ب) ٠,٤٦ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٢٤

(١٠) إذا كان متجه الاتجاه العمودى على مستقيم هو $\overrightarrow{\text{م}}$ = (٣ ، ٤) فإن ميل هذا المستقيم هو ....

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ك) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −٢) وكان : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) −٣

(١٢) طول قوس قطاع دائرى الذى مساحته ٦ π سم^{٢} وقياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{٣}$ هو .... سم

(أ) ١٨ (ب) ٦ π (جـ) ٦ (د) ٢ π

(١٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{س} & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٥) ، ب (٧ ، ١٠) ، حـ (٢ ، ٣) فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

(أ) (٤ ، ٦) (ب) (٦ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٩) (د) (٦ ، ٩)

(١٥) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هى ....

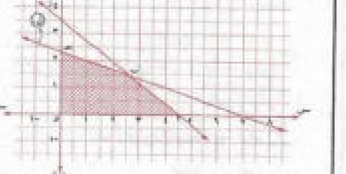
(أ) (٣ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(١٦) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٨ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٤٤ $\sqrt{٣}$

• نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٣ س + ٤ ص = ١٤

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٣ $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، ٢)



∴ مجموعة الحل للمتباينات هى المنطقة المضلعة أ ب حـ و المظللة بالشكل حيث أ (٤ $\frac{٢}{٣}$ ، ٠)

، ب (٢ $\frac{٤}{٥}$ ، ١ $\frac{٢}{٥}$) ، حـ (٠ ، ٢ $\frac{١}{٣}$)

، و (٠ ، ٠)

∵ ر = ٣٠ س + ٥٠ ص

∴ $[ر]_و$ = صفر ، $[ر]_أ$ = ٣٠ × ٤ $\frac{٢}{٣}$ = ١٤٠

، $[ر]_ب$ = ٣٠ × ٢ $\frac{٤}{٥}$ + ٥٠ × ١ $\frac{٢}{٥}$ = ١٥٤

، $[ر]_حـ$ = ٥٠ × ٢ $\frac{١}{٣}$ = ١١٦ $\frac{٢}{٣}$

∴ قيمة الدالة ر أكبر ما يمكن عندما

س = ٢ $\frac{٤}{٥}$ ، ص = ١ $\frac{٢}{٥}$

النموذج الثانى

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (د)

٢

(١) ∵ $Δ = \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٧$

، $Δ_س = \begin{vmatrix} ٣ & ٣- \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢١$

، $Δ_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ٧$

∴ س = $\frac{Δ_س}{Δ} = \frac{٢١}{٧} = ٣$

، ص = $\frac{Δ_ص}{Δ} = \frac{٧}{٧} = ١$

(ب) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا س × ظا س}}{\text{قا س}}$

= جا س × $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ × جتا س = جا² س

= ١ − جتا² س = الطرف الأيسر.

٣

(١) $\begin{pmatrix} ٢- & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{\begin{vmatrix} ٢- & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix}$

$= \frac{١-}{١٤} \begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix}$

∴ $أ = \frac{١-}{١٤} \begin{pmatrix} ١٢ & ٢٢ \\ ٨ & ١٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ٢- \end{pmatrix}$

$= \frac{١-}{١٤} \begin{pmatrix} ٥٦- & ٧٠- \\ ٢٨- & ٤٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

(ب) ∵ جا $(\frac{π}{٢} − θ) = \frac{١}{٢}$ ∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول

∴ θ = ٦٠° وتكافئ $\frac{π}{٣}$

أ، θ تقع فى الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° وتكافئ $\frac{٥}{٣}$ π

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{π}{٣}$ + ٢ ن π

أ، θ = $\frac{٥}{٣}$ π + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

٤

(١) ∵ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^٢ − ٥ أ + ٢٢ I = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix}$

$− ٥ \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix} + ٢٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٢- & ٢٠ \\ ٢٠- & ٧- \end{pmatrix} − \begin{pmatrix} ١٠ & ٢٠ \\ ٢٠- & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢٢ & ٠ \\ ٠ & ٢٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = ☐

(ب) مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق² ($\frac{π}{٢}$ − جا ٩٠°)

= ٥٦

∴ نق² ($\frac{π}{٢}$ − ١) = ١١٢

∴ نق² = ١٩٦ ∴ نق = ١٤ سم

٥

(١) نفرض أن : أ ب

يمثل طول العمود.



∴ ظا ٢٤َ ١٩° = $\frac{أ ب}{٥٠}$

∴ أ ب = ٥٠ ظا ٢٤َ ١٩° ≈ ١٨ مترًا

∴ ارتفاع العمود عن سطح الأرض ≈ ١٨ مترًا

(ب) • س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و $\overrightarrow{س}$ ∪ و $\overrightarrow{ص}$ ∪ الربع الأول

• نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

٢ س + ٣ ص = ١٨ (بخط متصل)

يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٩ ، ٠)

• نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: −٤ س + ص = −٨

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، −٨) ، (٢ ، ٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات هى المنطقة المضلعة أ ب حـ و المظللة بالشكل حيث أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤)

، حـ (٠ ، ٦) ، و (٠ ، ٠)

∵ دالة الهدف : ر = ٢ س + ص أكبر ما يمكن

∴ $[ر]_و$ = ٠ ، $[ر]_أ$ = ٢ × ٢ = ٤

، $[ر]_ب$ = ٢ × ٣ + ٤ = ١٠

، $[ر]_حـ$ = ٦

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ١٠

عند النقطة ب (٣ ، ٤)

(٢٧) إذا كانت : حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث : حـ (٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ٦)

فإن إحداثي النقطة أ هي ....

(أ) (٧ ، ٦) (ب) (٣ ، ٦) (جـ) (-٧ ، ٠) (د) (٠ ، ٦)

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أثبت أن : المستقيمين $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (٤ ، -٣) ، ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

متوازيين ثم أوجد أقصر بُعد بينهما.

٢ أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف : ر = ٣ س + ٤ ص

تحت القيود : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٢ ، س - ص ≤ ١

١٢ محافظة بنى سويف

إدارة ناصر
توجيه الرياضيات

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤) فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) إذا كان : $\left(٢ ، \frac{٣}{٤} \pi\right)$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$ فإن : ل + م = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) -٢ $\sqrt{٢}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، ٦) فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) $\overrightarrow{أحـ}$ - $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{حـ ء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{أء}$ (ب) $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) $\overrightarrow{ءب}$ (د) $\overrightarrow{بء}$

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة التحليلية

الاختبـــار الأول

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (ج)	(٤) (ج)
(٥) (د)	(٦) (ج)	(٧) (د)	(٨) (د)

الاختبـــار الثانى

(١) (ج)	(٢) (ج)	(٣) (ج)	(٤) (د)
(٥) (ب)	(٦) (أ)	(٧) (ج)	(٨) (ج)
(٩) (د)	(١٠) (ج)	(١١) (ب)	(١٢) (د)

الاختبـــار الثالث

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (د)	(٧) (ب)	(٨) (ب)
(٩) (ب)	(١٠) (د)	(١١) (ج)	(١٢) (ج)

الاختبـــار الرابع

(١) (ج)	(٢) (د)	(٣) (ج)	(٤) (ج)
(٥) (ج)	(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (ب)
(٩) (د)	(١٠) (ج)	(١١) (ج)	(١٢) (د)

الاختبـــار الخامس

(١) (ج)	(٢) (ب)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (ج)	(٧) (د)	(٨) (د)
(٩) (أ)	(١٠) (أ)	(١١) (ج)	(١٢) (ج)

الاختبـــار السادس

(١) (ب)	(٢) (ج)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (د)	(٧) (أ)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (ج)

الاختبـــار السابع

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (ج)
(٥) (أ)	(٦) (أ)	(٧) (ج)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (ج)	(١١) (أ)	(١٢) (ب)

الاختبـــار الثامن

(١) (ج)	(٢) (د)	(٣) (ج)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (ج)	(٧) (أ)	(٨) (ج)
(٩) (ج)	(١٠) (د)	(١١) (ج)	(١٢) (ج)

الاختبـــار التاسع

(١) (ج)	(٢) (ج)	(٣) (ج)	(٤) (أ)
(٥) (د)	(٦) (ج)	(٧) (أ)	(٨) (ج)
(٩) (ج)	(١٠) (أ)	(١١) (ب)	(١٢) (ب)

إجابات اختبارات شهر مارس

اختبـــار ١

١ (١) (ج) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (ج)
(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (د) (١٠) (ج)
(١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

(١) ∵ أء متوسط
في △ أب حـ
∴ أب→ + أحـ→
= ٢ أء→ (١)
، ∵ هـء متوسط في △ هـ ب حـ
∴ هـب→ + هـحـ→ = ٢ هـء→ = أء→ (٢)
من (١) ، (٢) :
∴ أب→ + أحـ→ = ٢ (هـب→ + هـحـ→)
= ٢ هـب→ + ٢ هـحـ→

(٢) ∵ م أ = م ب = ٧ سم
ويرسم مء ⊥ أب
∴ ء منتصف أب
، ق(∠ أ م ء) = ١١٠°/٢ = ٥٥°
، ∵ جا(∠ أ م ء) = أء/م أ
∴ جا ٥٥° = أء/٧ ∴ أء = ٧ × جا ٥٥°
∴ أب = ١٤ جا ٥٥°
∴ أب = ١١,٤٦٨ سم

اختبـــار ٢

١ (١) (د) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (أ)
(٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (ج) (٩) (ب) (١٠) (د)
(١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

(١) بفرض أن حـ→ = م أ→ + ك ب→
∴ (٧ ، ١٢) = م (-١ ، ٢) + ك (٣ ، ٧)
∴ ٣ ك − م = ٧ (١)
، ٧ ك + ٢ م = ١٢ (٢)
من (١) ، (٢) : ∴ ك = ٢ ، م = -١
∴ حـ→ = − أ→ + ٢ ب→

(٢) ∵ ن = ½ | ٢ ٤ ١ ؛ -٢ ٤ ١ ؛ ٠ -٢ ١ | = ١٢
∴ مساحة المثلث أب حـ = | ١٢ |
= ١٢ وحدة مربعة.

إجابات اختبارات شهر أبريل

اختبـــار ١

١ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (د)
(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (ج) (٩) (ب) (١٠) (أ)
(١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

(١) ∵ متجه اتجاه المستقيم المعطى هو (-٢ ، ١)
∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب هو (١ ، ٢)
∴ المعادلة المتجهة : ر→ = (١ ، ٣) + ك (١ ، ٢)
أي أن : (س ، ص) = (١ ، ٣) + ك (١ ، ٢)
المعادلتان الوسيطيتان :
س = ١ + ك ، ص = ٣ + ٢ ك
المعادلة الكارتيزية : ∵ (ص − ٣)/(س − ١) = ٢/١
∴ ٢ س − ٢ = ص − ٣
∴ الصورة العامة : ٢ س − ص + ١ = ٠

(١٥) Δ أ ب حـ قائم في ب ، أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٣ سم
فإن : ق (∠ أ) = ...° لأقرب درجة.

(أ) ٦٥ (ب) ٦٦ (جـ) ٦٨ (د) ٦٧

(١٦) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٢٠ $\sqrt{٣}$ من قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكانت ٣٠° فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥ (جـ) ١٥ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

(١٧) إذا كان : ظا θ − ١ = ٠ ، ٠° < θ < ١٨٠° فإن : θ = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٣٥ (د) ٤٥

(١٨) قطاع دائري محيطه ١٢ سم وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تكون مساحة سطحه = ... سم^{٢}

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(١٩) مساحة سطح القطعة الدائرية التي قياس زاويتها ١٥٠° وطول نصف قطر دائرتها ٢ $\sqrt{٦}$ سم .... سم^{٢}

(أ) ١٠ π + ٣ (ب) ١٠ π − ٣ (جـ) ١٠ π + ٦ (د) ١٠ π − ٦

(٢٠) الربع الذي يمثل حل نظام المتباينتين : س > ٠ ، ص > ٠ هو الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢١) النقطة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينة : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(٢٢) المصفوفة (١ ٢ ٣) على النظم ....

(أ) ١ × ٢ (ب) ٣ × ١ (جـ) ١ × ٣ (د) ٣ × ٢

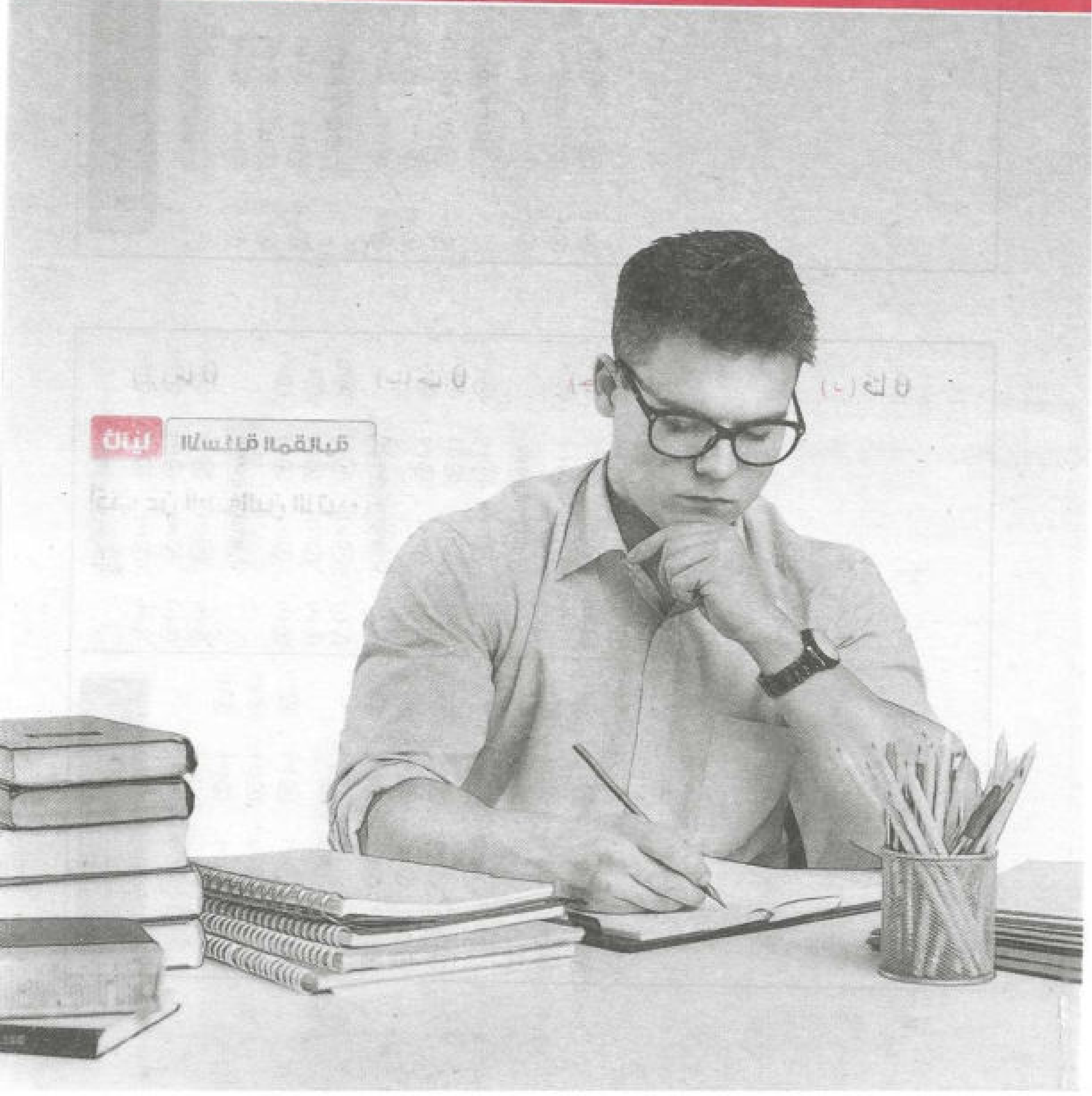
(٢٣) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، أ ب مصفوفة على النظم ٢ × ١ فإن المصفوفة ب على النظم ....

(أ) ١ × ٣ (ب) ٣ × ١ (جـ) ٢ × ١ (د) ١ × ٢

(٢٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٨ & س \end{pmatrix}$ فإن : أ ليس لها معكوس ضربي عندما س = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ± ٤ (د) ٢

الإجابــات



(٣) أبسط صورة للمقدار : جا θ جتا θ ظا θ هو ....

(أ) ظا^٢ θ (ب) جتا^٢ θ (جـ) جا^٢ θ (د) ١

(٤) إذا كانت : المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي فإن : س = ...

(أ) ٤ فقط (ب) ح − {٤} (جـ) ± ٤ (د) ح − {٤ ، −٤}

(٥) إذا كانت : θ ∈]٠ ، ٢ π[فإن مجموعة الحل للمعادلة : ٢ جا θ − $\sqrt{٣}$ = صفر هو ....

(أ) {٣٠° ، ١٥٠°} (ب) {٦٠° ، ١٢٠°}

(جـ) {١٥٠° ، ٢١٠°} (د) {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٦) إذا كانت : هـ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{س هـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ص هـ}}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{\text{س هـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{س ص}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ص س}}$

(٧) $\begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & -٣ \end{pmatrix}^{مد}$ = ...

(أ) I (ب) ☐ (جـ) ٢ I (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٨) النقطة التى تكون عندها للدالة : ر = ٤٠ س + ٢٠ ص قيمة عظمى من النقط الآتية هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، −٤) (جـ) (١٥ ، ١٠) (د) (٢٥ ، ٠)

(٩) إذا كان : س ص ع مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإن مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{\text{ص ع}}$ ≃ .... سم^٢

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ٢ (د) ٦٣

(١٠) إذا كانت : ج = $\begin{pmatrix} ٠ & -٤ & ٢ \\ ٢ س & ٠ & ٦ \\ -٢ & ص − س & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٣) إذا كان : $\vec{أ}$ = (−١ ، ٥) ، $\vec{ب}$ = (٢ ، ١) فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٤) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين : (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠)

والاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى ....

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(١٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٨ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{١٢} + ب_{٢١}$ = ...

(أ) ٤ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ٣

(١٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين الآتيتين : ٢ س + ص < ٤

، س + ٢ ص < ٦ هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٣ ، −١)

(١٧) أبسط صورة للمقدار : $\frac{١ - جا^{٢}\theta}{١ - جتا^{٢}\theta}$ هى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ظا² θ (د) ظتا² θ

(١٨) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٩) فى الشكل المقابل :

جميع العبارات التالية تعبر

عن $\overrightarrow{أجـ}$ عدا العبارة ....

(أ) ٢ $\overrightarrow{أم}$ (ب) $\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ءجـ}$ (جـ) $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بء}$ (د) $\overrightarrow{بجـ}$ + $\overrightarrow{ءجـ}$

(٢٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ - س & ٢ \\ -٢ & س + ٢ \end{vmatrix} = ١$ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٤

(٢١) المقدار : جا² θ + جتا² θ − قتا² θ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) − ظتا² θ (د) ظا² θ

(٢٠) من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى المنزل ١٧َ ٤٢° فإن ارتفاع المنزل ≃ .... متر.

(أ) ٩ (ب) ٧٤ (جـ) ٩١ (د) ١١٠

(٢١) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٦ سم = ... سم^{٢}

(أ) ٥٤ (ب) ٥٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٨ (د) ١٨ $\sqrt{٣}$

(٢٢) إذا كانت : ع = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix}$ ، ع^{٢} − ٥ ع = ك I حيث ك عدد صحيح

فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ٩ (د) −١

(٢٣) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{سص}$ حيث س (٣ ، ٧) ، ص (٢ ، ٥) هى ....

(أ) ٧ : ٥ من الخارج. (ب) ٥ : ٧ من الداخل.

(جـ) ٧ : ٥ من الداخل. (د) ٥ : ٧ من الخارج.

(٢٤) إذا كان : $\overrightarrow{س}$ = (٤ ، $\frac{\pi}{٤}$) فإن : ٢ $\overrightarrow{س}$ = ...

(أ) (٨ ، $\frac{\pi}{٤}$) (ب) (٨ ، $\frac{\pi}{٢}$) (جـ) (٤ ، $\frac{\pi}{٢}$) (د) (٤ ، $\frac{\pi}{٤}$)

(٢٥) إذا كان : س ص ع ل مستطيل فإن : $\overrightarrow{سع}$ + $\overrightarrow{صل}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{صع}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{سص}$ (جـ) $\overrightarrow{صع}$ (د) $\overrightarrow{صس}$

(٢٦) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) على الخط المستقيم الذى معادلته :

٣ س + ٤ ص − ٤ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٧) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، ٣) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، ٣) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (١ ، ٠) (د) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

(٢٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_1$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، −٢) + ك (٣ ، −١)

، $ل_2$: $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (٢ ، ١) يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٩٠°

(٢٧) المستقيم (س − ٤ ص + ١٤) + ك (٤ س + ص + ٥) = ٠ مار بالنقطة (٢ ، ١)

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{-٢}{٥}$ (ج) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{-٦}{٧}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ حل نظام المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى $ح^2$:

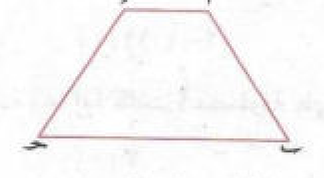
س ≥ صفر ، ص ≥ صفر ، س + ص − ٥ ≤ صفر



٢ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ٤ شكل رباعى فيه : $\overleftarrow{ب حـ}$ = ٣ $\overleftarrow{أ ٤}$

أثبت أن : $\overleftarrow{أ حـ}$ + $\overleftarrow{ب ٤}$ = ٤ $\overleftarrow{أ ٤}$





١٥ محافظة أسوان

إدارة أسوان
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} −٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : أ + $ب^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ −٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٢ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١٢ & ١ \\ ١٠ & −١ \end{pmatrix}$

(٢) المقدار : حا θ حتا θ طا θ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) $حا^2$ θ (ب) $حتا^2$ θ (ج) $طا^2$ θ (د) ١ − $حا^2$ θ

(٧) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذان ميلاهما ٢ ، $\frac{-١}{٢}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٨) المصفوفة : $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & س \\ -٥ & ع & ص \\ و & هـ & ن \end{pmatrix}$ شبه متماثلة

فإن : س ص + ع ن + و هـ = ...

(أ) −٦٠ (ب) ١٢ (جـ) صفر (د) −١٢

(٩) إذا كانت : أ × $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ = I فإن : المصفوفة أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كان : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

فإن قياس زاوية حـ يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٦°

(١١) قطاع دائرى محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية يساوى .... (بالراديان)

(أ) $\frac{ط}{٢}$ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٢) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٧ ، −٢) ، ب (١٥ ، ٤) ، حـ (٩ ، ٦)

فإن : ء = ...

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (٠ ، −١)

(١٣) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° هى ....

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (٣ ، ٥)

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (−١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (١ ، −١)

(د) $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٢ ، ٢)

(١٤) إذا كانت النقطة حـ (٤ ، ٤) تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ وكانت : أ = (٧ ، ٨)

فإن : ب تساوى ....

(أ) (−٢ ، −٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (−١ ، −٢) (د) (٢ ، ٤)

(٧) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذان ميلاهما ٢ ، $\frac{١-}{٢}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٤٥°

(٨) المصفوفة : $\begin{pmatrix} س & ٣ & ٤ \\ ص & ع & ٥- \\ ن & هـ & و \end{pmatrix}$ شبه متماثلة

فإن : س ص + ع ن + و هـ = ...

(أ) ‎-٦٠ (ب) ١٢ (جـ) صفر (د) ‎-١٢

(٩) إذا كانت : أ × $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ = I فإن : المصفوفة أ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ١- \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كان : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

فإن قياس زاوية حـ يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٥٦°

(١١) قطاع دائرى محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته فإن القياس الدائرى لزاويته المركزية يساوى .... (بالراديان)

(أ) $\frac{ط}{٢}$ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٢) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٧ ، ‎-٢) ، ب (١٥ ، ٤) ، حـ (٩ ، ٦)

فإن : ء = ...

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (‎-١ ، ٠) (د) (٠ ، ‎-١)

(١٣) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١) + ك (٣ ، ٥) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (‎-١ ، ١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ‎-١) (د) $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٢ ، ٢)

(١٤) إذا كانت النقطة حـ (٤ ، ٤) تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ وكانت : أ = (٧ ، ٨)

فإن : ب تساوى ....

(أ) (‎-٢ ، ‎-٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (‎-١ ، ‎-٢) (د) (٢ ، ٤)

(٢٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $ل_١$: $\overleftarrow{ر} = (٠ ، -٢) + ك (٣ ، -١)$

، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر} = (٠ ، ٥) + ك (٢ ، ١)$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٩٠°

(٢٧) المستقيم (س − ٤ ص + ١٤) + ك (٤ س + ص + ٥) = ٠ مار بالنقطة (٢ ، ١)

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{-٢}{٥}$ (ج) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{-٦}{٧}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

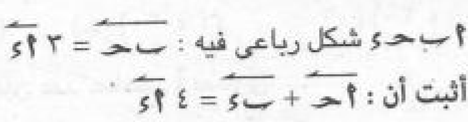
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ حل نظام المتباينات الخطية التالية بيانيًا فى $ح^٢$:

س ≥ صفر ، ص ≥ صفر ، س + ص − ٥ ≤ صفر

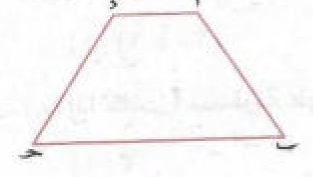


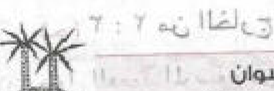
٢ فى الشكل المقابل :



أ ب ج د شكل رباعى فيه : $\overleftarrow{ب ج} = ٣ \overleftarrow{أ د}$

أثبت أن : $\overleftarrow{أ ج} + \overleftarrow{ب د} = ٤ \overleftarrow{أ د}$





١٥ محافظة أسوان

إدارة أسوان
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ فإن : $أ + ب^{مد}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٧ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ -١ & ١٠ \end{pmatrix}$

(٢) المقدار : جا θ جتا θ ظا θ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) $جا^٢ θ$ (ب) $جتا^٢ θ$ (ج) $ظا^٢ θ$ (د) $١ - جا^٢ θ$

(٢٠) من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فى المنزل ١٧َ ٤٢° فإن ارتفاع المنزل ≃ .... متر.

(أ) ٩ (ب) ٧٤ (جـ) ٩١ (د) ١١٠

(٢١) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٦ سم = ... سم٢

(أ) ٥٤ (ب) ٥٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٨ (د) ١٨ $\sqrt{٣}$

(٢٢) إذا كانت : ج = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix}$ ، ج٢ – ٥ ج = ك I حيث ك عدد صحيح

فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) –٦ (جـ) ١ (د) –١

(٢٣) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة $\overline{سص}$ حيث س (٣ ، ٧) ، ص (٢ ، ٥) هى ....

(أ) ٧ : ٥ من الخارج. (ب) ٥ : ٧ من الداخل.

(جـ) ٧ : ٥ من الداخل. (د) ٥ : ٧ من الخارج.

(٢٤) إذا كان : $\overrightarrow{س}$ = (٤ ، $\frac{\pi}{٤}$) فإن : ٢ $\overrightarrow{س}$ = ...

(أ) (٨ ، $\frac{\pi}{٤}$) (ب) (٨ ، $\frac{\pi}{٢}$) (جـ) (٤ ، $\frac{\pi}{٢}$) (د) (٤ ، $\frac{\pi}{٤}$)

(٢٥) إذا كان : س ص ع ل مستطيل فإن : $\overrightarrow{سع}$ + $\overrightarrow{صل}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{صع}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{سص}$ (جـ) $\overrightarrow{صع}$ (د) $\overrightarrow{صس}$

(٢٦) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) على الخط المستقيم الذى معادلته :

٣ س + ٤ ص – ٤ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٧) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، ٣) (ب) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، ٣) + ك (٠ ، ١)

(جـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (١ ، ٠) (د) $\overrightarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)

(١٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ١) فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٤) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين : (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠) والاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى ....

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(١٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٨ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : $أ_{١٢} + ب_{٢١}$ = ...

(أ) ٤ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ٣

(١٦) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينتين الآتيتين : ٢ س + ص < ٤ ، س + ٣ ص < ٦ هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٣ ، −١)

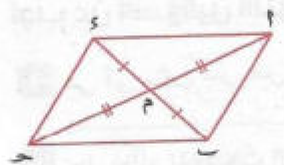
(١٧) أبسط صورة للمقدار : $\frac{١ - جا^٢ \theta}{١ - جتا^٢ \theta}$ هى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) $ظا^٢ \theta$ (د) $ظتا^٢ \theta$

(١٨) طول العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٥) إلى محور الصادات يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٩) فى الشكل المقابل :



جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{أحـ}$ عدا العبارة ....

(أ) ٢ $\overrightarrow{أم}$ (ب) $\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ءحـ}$ (جـ) $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{بء}$ (د) $\overrightarrow{بحـ}$ + $\overrightarrow{ءحـ}$

(٢٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ - س & ٢ \\ -٣ & س + ٢ \end{vmatrix}$ = ١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٤

(٢١) المقدار : $جا^٢ \theta + جتا^٢ \theta - ظتا^٢ \theta$ فى أبسط صورة يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $- ظتا^٢ \theta$ (د) $ظا^٢ \theta$

(٣) أبسط صورة للمقدار : حا θ حتا θ طا θ هو ....

(أ) $طا^2$ θ (ب) $حتا^2$ θ (جـ) $حا^2$ θ (د) ١

(٤) إذا كانت : المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) ٤ فقط (ب) ح − {٤} (جـ) ± ٤ (د) ح − {٤ ، −٤}

(٥) إذا كانت : θ ∈ [٠ ، ٢ π[فإن مجموعة الحل للمعادلة : ٢ حا θ − $\sqrt{٣}$ = صفر

هو ....

(أ) {٣٠° ، ١٥٠°} (ب) {٦٠° ، ١٢٠°}

(جـ) {١٥٠° ، ٢١٠°} (د) {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٦) إذا كانت : هـ منتصف $\overline{سص}$ فإن : $\overrightarrow{سهـ}$ + $\overrightarrow{صهـ}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{سهـ}$ (ب) $\overrightarrow{سص}$ (جـ) $\vec{و}$ (د) $\overrightarrow{صس}$

(٧) $\begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & -٣ \end{pmatrix}^{مد}$ = ...

(أ) I (ب) ▭ (جـ) ٢ I (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(٨) النقطة التى تكون عندها للدالة : ر = ٤٠ س + ٢٠ ص قيمة عظمى من النقط الآتية

هى ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، −٤) (جـ) (١٥ ، ١٠) (د) (٢٥ ، ٠)

(٩) إذا كان : س ص ع مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها

٥ سم فإن مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{صع}$ ≃ .... $سم^2$

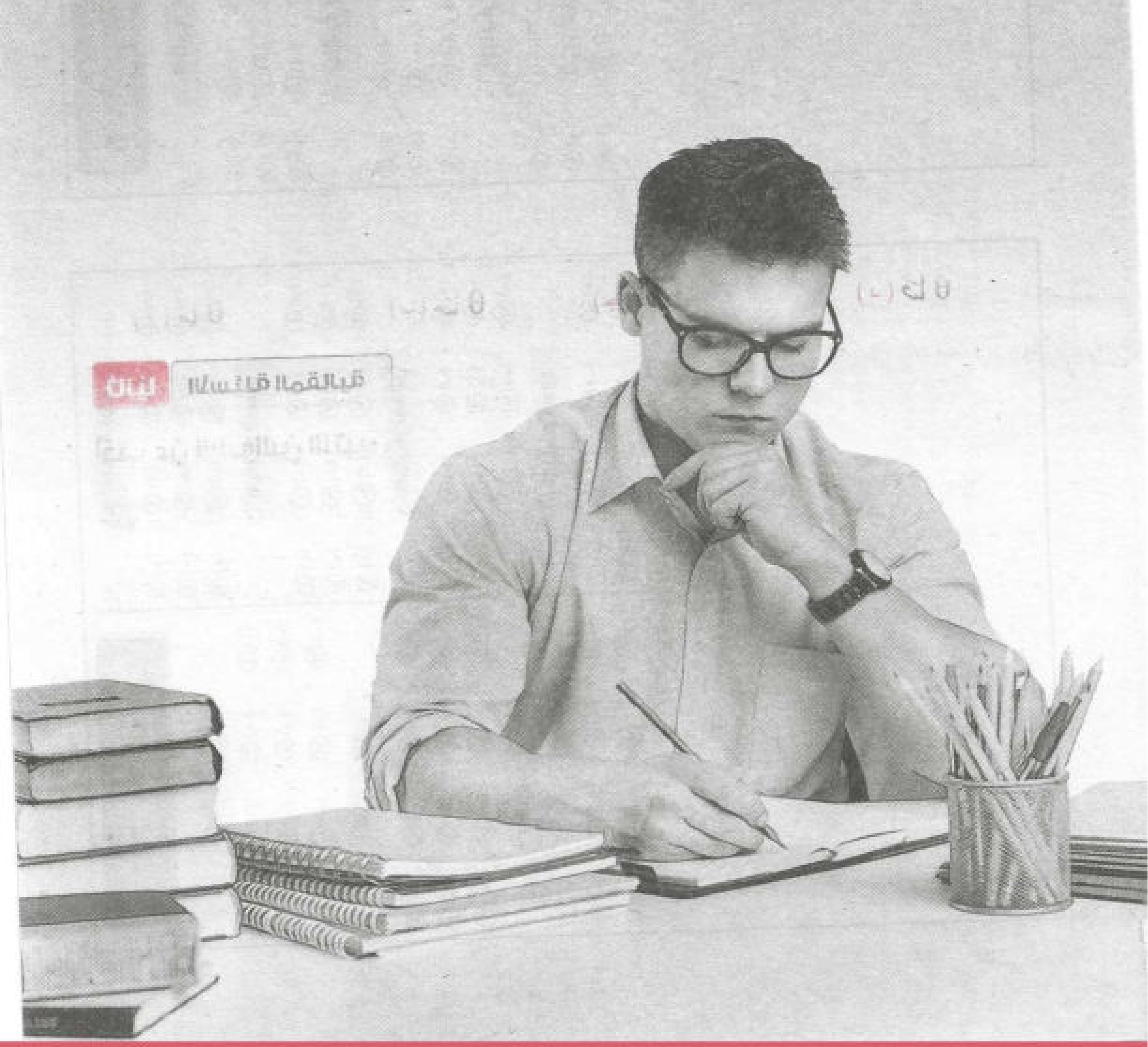
(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ٢ (د) ٦٣

(١٠) إذا كانت : ج = $\begin{pmatrix} ٠ & -٤ & ٢ \\ ٢ س & ٠ & ٦ \\ -٢ & ص − س & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة

فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

الإجابـــات



(١٥) Δ أ ب حـ قائم فى ب ، أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٣ سم

فإن : ق (∠ أ) = ... ° لأقرب درجة.

(أ) ٦٥ (ب) ٦٦ (جـ) ٦٨ (د) ٦٧

(١٦) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٢٠ $\sqrt{3}$ من قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكانت ٣٠° فإن ارتفاع البرج = ... متر.

(أ) ١٠ $\sqrt{3}$ (ب) ١٥ (جـ) ١٥ $\sqrt{3}$ (د) ٢٠

(١٧) إذا كان : ظا θ − ١ = ٠ ، ٠° < θ < ١٨٠° فإن : θ = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٣٥ (د) ٤٥

(١٨) قطاع دائرى محيطه ١٢ سم وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تكون مساحة سطحه = ... سم^2

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(١٩) مساحة سطح القطعة الدائرية التى قياس زاويتها ١٥٠° وطول نصف قطر دائرتها ٢ $\sqrt{6}$ سم .... سم^2

(أ) ١٠ π + ٣ (ب) ١٠ π − ٣ (جـ) ١٠ π + ٦ (د) ١٠ π − ٦

(٢٠) الربع الذي يمثل حل نظام المتباينتين : س > ٠ ، ص > ٠ هو الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢١) النقطة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(٢٢) المصفوفة (١ ٢ ٣) على النظم ....

(أ) ١ × ٢ (ب) ٣ × ١ (جـ) ١ × ٣ (د) ٣ × ٢

(٢٣) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، أ ب مصفوفة على النظم ٢ × ١ فإن المصفوفة ب على النظم ....

(أ) ١ × ٣ (ب) ٣ × ١ (جـ) ٢ × ١ (د) ١ × ٢

(٢٤) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٨ & س \end{pmatrix}$ فإن : أ ليس لها معكوس ضربى عندما س = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ± ٤ (د) ٢

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة التحليلية

الاختبـــار الأول

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)
(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (د)

الاختبـــار الثانى

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (د)
(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)
(٩) (د) (١٠) (جـ) (١١) (ب) (١٢) (د)

الاختبـــار الثالث

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (ب)
(٥) (د) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب)
(٩) (ب) (١٠) (د) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)

الاختبـــار الرابع

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)
(٥) (جـ) (٦) (ب) (٧) (د) (٨) (ب)
(٩) (د) (١٠) (جـ) (١١) (جـ) (١٢) (د)

الاختبـــار الخامس

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ب)
(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (د)
(٩) (أ) (١٠) (أ) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)

الاختبـــار السادس

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (ب)
(٥) (ب) (٦) (د) (٧) (أ) (٨) (أ)
(٩) (ب) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (جـ)

الاختبـــار السابع

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (جـ)
(٥) (أ) (٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (د)
(٩) (ب) (١٠) (جـ) (١١) (أ) (١٢) (ب)

الاختبـــار الثامن

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب)
(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (أ) (٨) (جـ)
(٩) (جـ) (١٠) (د) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)

الاختبـــار التاسع

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (أ)
(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (أ) (٨) (جـ)
(٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (ب) (١٢) (ب)

إجابات اختبارات شهر مارس

اختبـــار ١

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (أ) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (د) (١٠) (جـ) (١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

(١) ∵ أ ء متوسط في Δ أ ب حـ

∴ أ ب + أ حـ = ٢ أ ء (١)

∵ هـ ء متوسط في Δ هـ ب حـ

∴ هـ ب + هـ حـ = ٢ هـ ء = أ ء (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أ ب + أ حـ = ٢ (هـ ب + هـ حـ)

= ٢ هـ ب + ٢ هـ حـ

(٢) ∵ م أ = م ب = ٧ سم

ويرسم م ء ⊥ أ ب

∴ ء منتصف أ ب

، ق(∠ أ م ء) = $\frac{١١٠°}{٢}$ = ٥٥°

، ∵ جا(∠ أ م ء) = $\frac{أ ء}{م أ}$

∴ جا ٥٥° = $\frac{أ ء}{٧}$ ∴ أ ء = ٧ × جا ٥٥°

∴ أ ب = ١٤ جا ٥٥°

∴ أ ب = ١١,٤٦٨ سم

اختبـــار ٢

١ (١) (د) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (أ) (٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (د) (١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

(١) بفرض أن حـ = م أ + ك ب

∴ (٧ ، ١٢) = م (-١ ، ٢) + ك (٣ ، ٧)

∴ ٣ ك - م = ٧ (١)

، ٧ ك + ٢ م = ١٢ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ك = ٢ ، م = -١

∴ حـ = -أ + ٢ ب

(٢) ∵ ق = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & ١ \\ ٠ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ١٢

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = | ١٢ |

= ١٢ وحدة مربعة.

إجابات اختبارات شهر أبريل

اختبـــار ١

١ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (د) (٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (أ) (١١) (ب) (١٢) (أ)

٢

(١) ∵ متجه اتجاه المستقيم المعطى هو (-٢ ، ١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب هو (١ ، ٢)

∴ المعادلة المتجهة : ر = (١ ، ٣) + ك (١ ، ٢)

أى أن : (س ، ص) = (١ ، ٣) + ك (١ ، ٢)

المعادلتان الوسيطيتان :

س = ١ + ك ، ص = ٣ + ٢ ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص - ٣}{س - ١}$ = $\frac{٢}{١}$

∴ ٢ س - ٢ = ص - ٣

∴ الصورة العامة : ٢ س - ص + ١ = ٠

(٢٧) إذا كانت : حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث : حـ (٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ٦)

فإن إحداثي النقطة أ هي ....

(أ) (٧ ، ٦) (ب) (٣ ، ٦) (جـ) (−٧ ، ٠) (د) (٠ ، ٦)

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أثبت أن : المستقيمين $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ١) + ك (٤ ، −٣) ، ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

متوازيين ثم أوجد أقصر بُعد بينهما.

---

٢ أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف : ر = ٣ س + ٤ ص

تحت القيود : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٢ ، س − ص ≤ ١

١٢ محافظة بنى سويف

إدارة ناصر
توجيه الرياضيات

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) إذا كان : $\left(٢ ، \frac{٣}{٤}\pi\right)$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$ فإن : ل + م = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) −٢ $\sqrt{٢}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، ٦) فإن : ك = ...

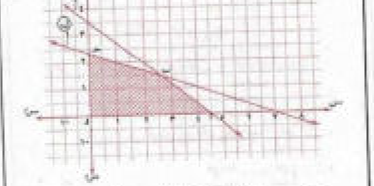
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) $\overrightarrow{أحـ}$ − $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{حـ ء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{أء}$ (ب) $\overrightarrow{أحـ}$ (جـ) $\overrightarrow{ءب}$ (د) $\overrightarrow{بء}$

• نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٣ س + ٤ ص = ١٤

(بخط متصل) يمر بالنقطتين $(٠ ، ٣\frac{١}{٢})$ ، $(٢ ، ٢)$



∴ مجموعة الحل للمتباينات هى المنطقة المضلعة أ ب حـ و المظللة بالشكل حيث أ $(\frac{٢}{٣}٤ ، ٠)$

، ب $(\frac{٤}{٥}٢ ، \frac{٢}{٥}١)$ ، حـ $(٠ ، \frac{١}{٢}٣)$

، و $(٠ ، ٠)$

∵ ر = ٢٠ س + ٥٠ ص

∴ $[ر]_و$ = صفر ، $[ر]_أ = ٢٠ \times \frac{٢}{٣}٤ = ١٤٠$

، $[ر]_ب = ٢٠ \times \frac{٤}{٥}٢ + ٥٠ \times \frac{٢}{٥}١ = ١٥٤$

، $[ر]_{حـ} = ٥٠ \times \frac{١}{٢}٣ = \frac{٢}{٣}١١٦$

∴ قيمة الدالة ر أكبر ما يمكن عندما

س = $\frac{٤}{٥}٢$ ، ص = $\frac{٢}{٥}١$

النموذج الثانى

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (د)

٢

(١) ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٧$

، $\Delta_س = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢١$

، $\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ٧$

∴ س = $\frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{٢١}{٧} = ٣$

، ص = $\frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{٧}{٧} = ١$

(ب) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا س} \times \text{ظتا س}}{\text{قتا س}}$

= جا س × $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ × جتا س = جتا² س

= ١ − جا² س = الطرف الأيسر.

٣

(١) $\begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{\begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \frac{-١}{١٤} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$

∴ أ $= \frac{-١}{١٤} \begin{pmatrix} ١٢ & ٢٣ \\ ٨ & ١٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \frac{-١}{١٤} \begin{pmatrix} -٥٦ & -٧٠ \\ -٢٨ & -٤٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

(ب) ∵ جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta) = \frac{١}{٢}$ ∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول

∴ θ = ٣٠° وتكافئ $\frac{\pi}{٦}$

أ، θ تقع فى الربع الثانى

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° وتكافئ $\frac{٥}{٦}\pi$

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ن π

أ، θ = $\frac{٥}{٦}\pi$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

٤

(١) ∵ أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ أ² − ٥ أ + ٢٢ I $= \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$

$- ٥ \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} + ٢٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -١٢ & ٢٠ \\ -٢٠ & -٧ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٠ & ٢٠ \\ -٢٠ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢٢ & ٠ \\ ٠ & ٢٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \boxed{}$

(ب) مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق² $(\frac{\pi}{٢} - \text{جا } ٩٠°)$

= ٥٦

∴ نق² $(\frac{\pi}{٢} - ١) = ١١٢$

∴ نق² = ١٩٦ ∴ نق = ١٤ سم

٥

(١) نفرض أن : أ ب

يمثل طول العمود.

∴ ظا ١٩° ٢٤ = $\frac{أ ب}{٥٠}$

∴ أ ب = ٥٠ ظا ١٩° ٢٤ ≃ ١٨ مترًا

∴ ارتفاع العمود عن سطح الأرض = ١٨ مترًا

(ب) • س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

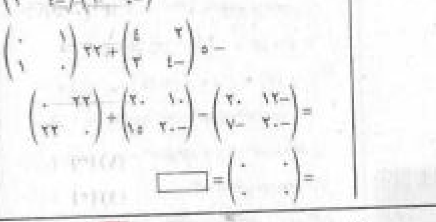
• نرسم المستقيم الحدى $ل_١$:

٢ س + ٣ ص = ١٨ (بخط متصل)

يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٩ ، ٠)

• نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: −٤ س + ص = −٨

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، −٨) ، (٢ ، ٠)



∴ مجموعة الحل للمتباينات هى المنطقة المضلعة أ ب حـ و المظللة بالشكل حيث أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤)

، حـ (٠ ، ٦) ، و (٠ ، ٠)

∵ دالة الهدف : ر = ٢ س + ص أكبر ما يمكن

∴ $[ر]_و$ = ٠ ، $[ر]_أ$ = ٢ × ٢ = ٤

، $[ر]_ب$ = ٢ × ٣ + ٤ = ١٠

، $[ر]_{حـ}$ = ٦

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف ر = ١٠

عند النقطة ب (٣ ، ٤)

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢ & ٢س \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يبعد عن قاعدة الصخرة ٢٠٠ متر بالراديان ≃ ....

(أ) ٠,٠٨ (ب) ٠,٤٦ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٢٤

(١٠) إذا كان متجه الاتجاه العمودى على مستقيم هو $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٤) فإن ميل هذا المستقيم هو ....

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ك) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، −٢) وكان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) −٣

(١٢) طول قوس قطاع دائرى الذى مساحته ٦ π سم^{٢} وقياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{٣}$ هو .... سم

(أ) ١٨ (ب) ٦ π (جـ) ٦ (د) ٢ π

(١٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى فإن : س = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : أ (٣ ، ٥) ، ب (٧ ، ١٠) ، حـ (٢ ، ٣) فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى ....

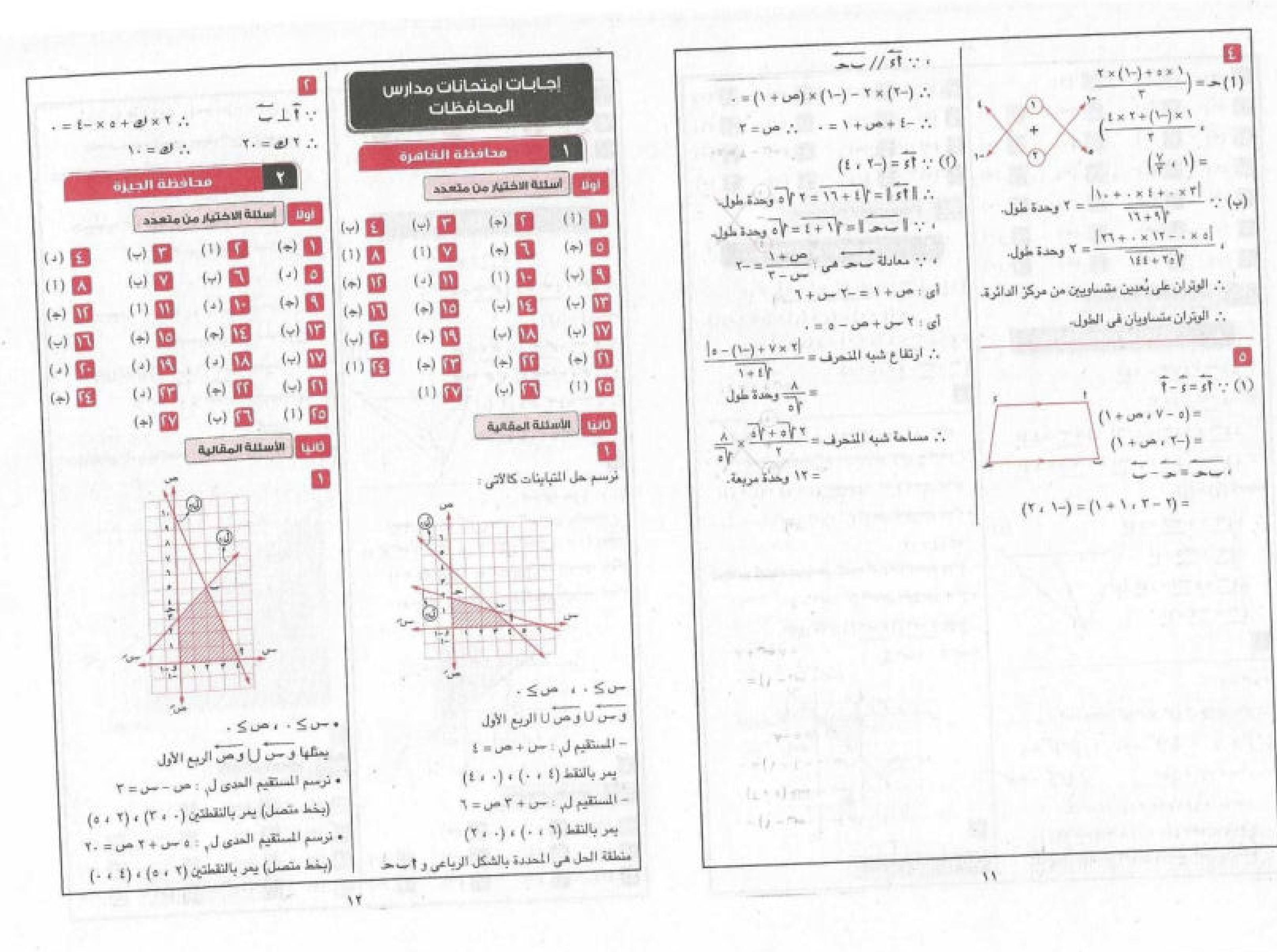
(أ) (٤ ، ٦) (ب) (٦ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٩) (د) (٦ ، ٩)

(١٥) النقطة التى تنتمى إلى مجموعة حل المتباينات : س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ≤ ٣ هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (١ ، ٣)

(١٦) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٨ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٤٤ $\sqrt{٣}$



٤

(١) حـ = $\left(\frac{١ \times ٥ + (-١) \times ٢}{٣} ، \frac{١ \times (-١) + ٢ \times ٤}{٣}\right)$ = $(١ ، \frac{٧}{٣})$

(ب) ∵ $\frac{|٢ \times ٠ + ٤ \times ٠ + ١٠|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = ٢ وحدة طول.

، $\frac{|٥ \times ٠ - ١٢ \times ٠ + ٢٦|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$ = ٢ وحدة طول.

∴ الوتران على بُعدين متساويين من مركز الدائرة.

∴ الوتران متساويان في الطول.

٥

(١) ∵ $\overrightarrow{أد}$ = $\overrightarrow{د}$ − $\overrightarrow{أ}$

= (٥ − ٧ ، ص + ١)

= (−٢ ، ص + ١)

، $\overrightarrow{بحـ}$ = $\overrightarrow{حـ}$ − $\overrightarrow{ب}$

= (٢ − ٣ ، ١ + ١) = (−١ ، ٢)

∵ $\overrightarrow{أد}$ // $\overrightarrow{بحـ}$

∴ (−٢) × ٢ − (−١) × (ص + ١) = ٠

∴ −٤ + ص + ١ = ٠ ∴ ص = ٣

(٢) ∵ $\overrightarrow{أد}$ = (−٢ ، ٤)

∴ ‖$\overrightarrow{أد}$‖ = $\sqrt{٤ + ١٦}$ = $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ∵ ‖$\overrightarrow{بحـ}$‖ = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول.

، ∵ معادلة $\overleftrightarrow{بحـ}$ هي: $\frac{ص + ١}{س - ٣}$ = −٢

أي: ص + ١ = −٢ س + ٦

أي: ٢ س + ص − ٥ = ٠

∴ ارتفاع شبه المنحرف = $\frac{|٢ \times ٧ + (-١) - ٥|}{\sqrt{٤ + ١}}$ = $\frac{٨}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{٢\sqrt{٥} + \sqrt{٥}}{٢} \times \frac{٨}{\sqrt{٥}}$ = ١٢ وحدة مربعة.

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (جـ)	٣ (ب)	٤ (ب)
٥ (جـ)	٦ (جـ)	٧ (أ)	٨ (أ)
٩ (ب)	١٠ (أ)	١١ (د)	١٢ (جـ)
١٣ (ب)	١٤ (ب)	١٥ (جـ)	١٦ (جـ)
١٧ (ب)	١٨ (ب)	١٩ (جـ)	٢٠ (ب)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (أ)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ ترسم حل المتباينات كالآتي:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

$\overrightarrow{وس}$ ∪ $\overrightarrow{وص}$ ∪ الربع الأول

− المستقيم ل١: س + ص = ٤

يمر بالنقط (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

− المستقيم ل٢: س + ٢ ص = ٦

يمر بالنقط (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

منطقة الحل هي المحددة بالشكل الرباعي و أ ب حـ

٢ ∵ $\overrightarrow{أب}$ ⊥ $\overrightarrow{بحـ}$

∴ ٢ × ك + ٥ × −٤ = ٠

∴ ٢ ك = ٢٠ ∴ ك = ١٠

٢ محافظة الجيزة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (ب)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (أ)	١٢ (جـ)
١٣ (ب)	١٤ (جـ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (ب)	١٨ (د)	١٩ (د)	٢٠ (د)
٢١ (ب)	٢٢ (جـ)	٢٣ (د)	٢٤ (جـ)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

• س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلها $\overrightarrow{وس}$ ∪ $\overrightarrow{وص}$ الربع الأول

• ترسم المستقيم الحدي ل١: ص − س = ٣

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٢ ، ٥)

• ترسم المستقيم الحدي ل٢: ٥ س + ٢ ص = ٢٠

(بخط متصل) يمر بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٠)

(٢٢) طول العمود المرسوم من النقطة (-٣ ، ٥) إلى محور السينات يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

(٢٣) الحل العام للمعادلة : ظتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \sqrt{٣}$ هو .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) $\frac{\pi}{٦} + ٢\pi$ ن (ب) $\frac{\pi}{٦} + ٢\pi$ ن (جـ) $\frac{٧\pi}{٦} + ٢\pi$ ن (د) $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن

(٢٤) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة (-٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) ص = ٧ (ب) ص = -٢ (جـ) س = ٧ (د) س = -٢

(٢٥) إذا كان : م = ١٢ س - ١٢ ص فإن الصورة القطبية للمتجه م هى ....

(أ) $(-١٢\sqrt{٢} ، \frac{٧}{٤}\pi)$ (ب) $(١٢\sqrt{٢} ، \frac{٧}{٤}\pi)$

(جـ) $(١٢\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi)$ (د) $(١٢\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤})$

(٢٦) إذا كانت : قتا θ - ظتا θ = $\frac{١}{٥}$ فإن : قتا θ + ظتا θ = ...

(أ) $\frac{-١}{١٠}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٢٧) إذا كان : أ (-٣ ، -٧) ، ب (٤ ، ٠) فإن : حـ النقطة التى تقسم أب

من الداخل بنسبة ٥ : ٢ هى ....

(أ) (-٢ ، ٢) (ب) (٢ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (-٢ ، -٢)

ثانيًا الأسئلة المقالية

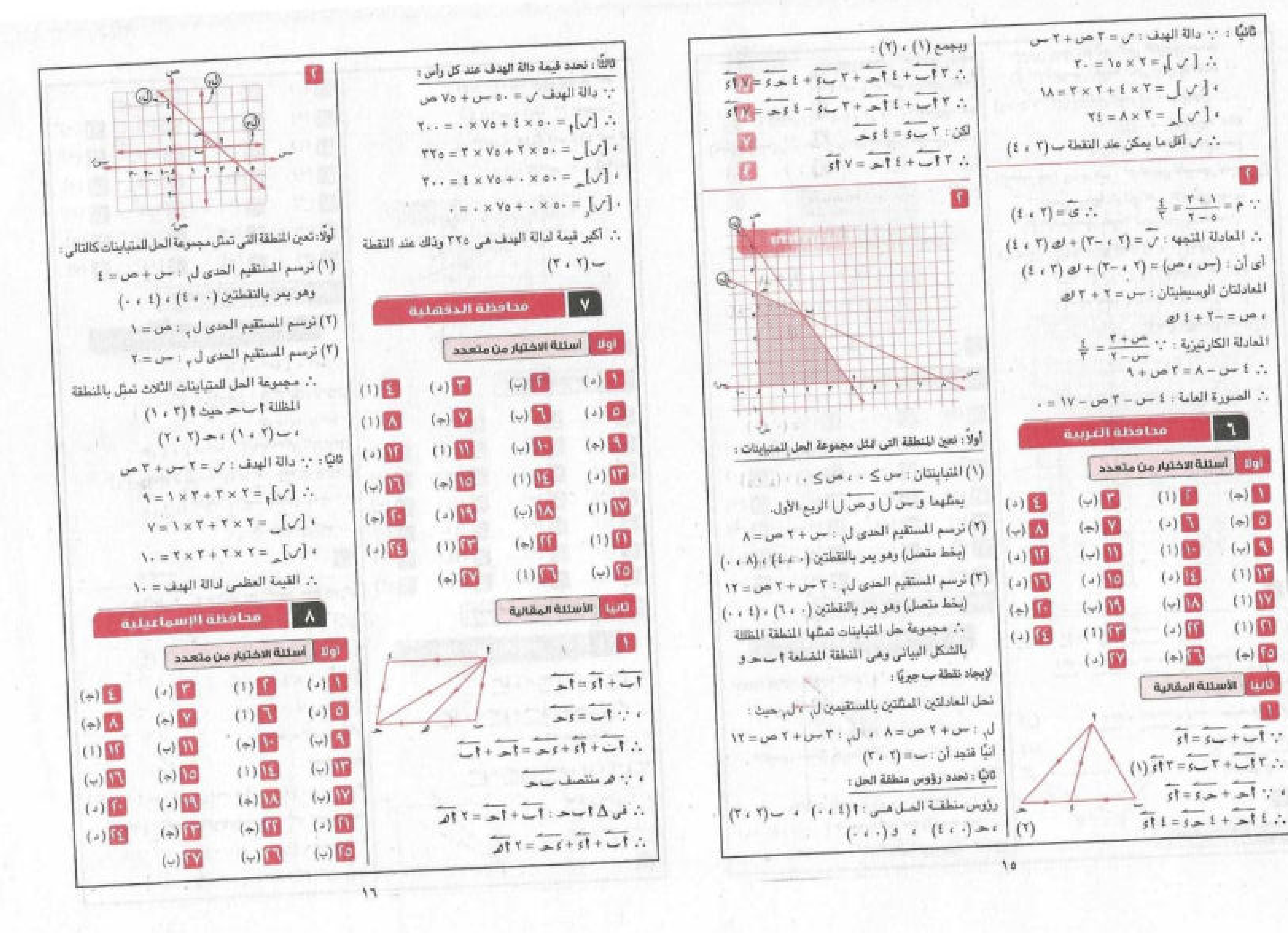
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد بيانيًا منطقة الحل لنظام المتباينات الآتية :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س + ص ≥ ٤ ، س + ٢ ص ≥ ٦

ثم استنتج الحل الأمثل الذى يجعل دالة الهدف ر = ٢ س + ص (قيمة عظمى)

٢ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار (٢ ، -١) وميله $\frac{١}{٢}$



ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٣ ص + ٢ س

∴ ر[أ] = ٢ × ١٥ = ٣٠

، ر[ب] = ٣ × ٤ + ٢ × ٣ = ١٨

، ر[جـ] = ٣ × ٨ = ٢٤

∴ ر أقل ما يمكن عند النقطة ب (٣ ، ٤)

٢

∵ م = (١ + ٣) / (٥ − ٢) = ٤ / ٣ ∴ ى = (٣ ، ٤)

∴ المعادلة المتجهة : ر = (٢ ، −٣) + ك (٣ ، ٤)

أي أن : (س ، ص) = (٢ ، −٣) + ك (٣ ، ٤)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٢ + ٣ ك

، ص = −٣ + ٤ ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ (ص + ٣) / (س − ٢) = ٤ / ٣

∴ ٤ س − ٨ = ٣ ص + ٩

∴ الصورة العامة : ٤ س − ٣ ص − ١٧ = ٠

٦ محافظة الغربية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (د)	٧ (جـ)	٨ (ب)
٩ (ب)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (أ)	١٤ (د)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (جـ)
٢١ (أ)	٢٢ (د)	٢٣ (أ)	٢٤ (د)
٢٥ (جـ)	٢٦ (جـ)	٢٧ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ أب + ب د = أ د

∴ ٢ أب + ٢ ب د = ٢ أ د (١)

∵ أجـ + جـ د = أ د

∴ ٤ أجـ + ٤ جـ د = ٤ أ د (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ أب + ٤ أجـ + ٢ ب د + ٤ جـ د = ٦ أ د

∴ ٢ أب + ٤ أجـ + ٢ ب د − ٤ د جـ = ٦ أ د

لكن : ٢ ب د = ٤ د جـ

∴ ٢ أب + ٤ أجـ = ٦ أ د

٢

أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص الربع الأول.

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل١ : س + ٢ ص = ٨

(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ٣ س + ٢ ص = ١٢

(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)

∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البياني وهي المنطقة المضلعة أ ب جـ و

لإيجاد نقطة ب جبريًا :

نحل المعادلتين الممثلتين بالمستقيمين ل١ ، ل٢ حيث :

ل١ : س + ٢ ص = ٨ ، ل٢ : ٣ س + ٢ ص = ١٢

آنيًا فنجد أن : ب = (٢ ، ٣)

ثانيًا : نحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هي : أ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٤ ، ٠) ، و (٠ ، ٠)

ثالثًا : نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

∵ دالة الهدف ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

∴ ر[أ] = ٥٠ × ٤ + ٧٥ × ٠ = ٢٠٠

، ر[ب] = ٥٠ × ٢ + ٧٥ × ٣ = ٣٢٥

، ر[جـ] = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٤ = ٣٠٠

، ر[و] = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٠ = ٠

∴ أكبر قيمة لدالة الهدف هي ٣٢٥ وذلك عند النقطة ب (٢ ، ٣)

٧ محافظة الدقهلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (ب)	٣ (د)	٤ (أ)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (جـ)	٨ (أ)
٩ (جـ)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (د)
١٣ (د)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (د)	٢٠ (جـ)
٢١ (أ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (أ)	٢٤ (د)
٢٥ (ب)	٢٦ (أ)	٢٧ (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

أب + أد = أجـ

∵ أب = د جـ

∴ أب + أد + د جـ = أجـ + أب

∵ هـ منتصف ب جـ

∴ في Δ أ ب جـ : أب + أجـ = ٢ أهـ

∴ أب + أد + د جـ = ٢ أهـ

٢

أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) نرسم المستقيم الحدي ل١ : س + ص = ٤

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ص = ١

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل٣ : س = ٢

∴ مجموعة الحل للمتباينات الثلاث تمثل بالمنطقة المظللة أ ب جـ حيث أ (٣ ، ١)

، ب (٢ ، ١) ، جـ (٢ ، ٢)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٢ س + ٣ ص

∴ ر[أ] = ٢ × ٣ + ٣ × ١ = ٩

، ر[ب] = ٢ × ٢ + ٣ × ١ = ٧

، ر[جـ] = ٢ × ٢ + ٣ × ٢ = ١٠

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ١٠

٨ محافظة الإسماعيلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (أ)	٣ (د)	٤ (جـ)
٥ (د)	٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (جـ)
٩ (ب)	١٠ (جـ)	١١ (ب)	١٢ (أ)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (ب)	١٨ (جـ)	١٩ (د)	٢٠ (جـ)
٢١ (د)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (د)
٢٥ (ب)	٢٦ (ب)	٢٧ (ب)	

(٦) إذا كانت : س ≤ ١ ، ص ≤ ١ ، س + ص ≤ ٦

فإن دالة الهدف ر = ٥ س + ٤ ص يكون لها قيمة عظمى عند النقطة ....

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (١ ، ٥) (جـ) (٥ ، ١) (د) (٦ ، صفر)

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ك + ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ك ، ٥ ك − ٣) فإن إحدى قيم ك

التي تجعل $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ هي ....

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(٨) إذا كان : ٢ س + $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : المصفوفة س = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) أبسط صورة للمقدار : $\frac{\text{حا س حتا س طا س + حا س حتا س ظتا س}}{\text{حا س قا س}}$ = ...

(أ) ظتا س (ب) طا س (جـ) حتا س (د) قتا س

(١٠) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم : ٣ س − ٤ ص = ١٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، $\overline{أ حـ} \cap \overline{ء ب}$ = {م} فإن : $\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ ء}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{حـ أ}$ (ب) $\overrightarrow{ب ء}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{م حـ}$ (د) ٢ $\overrightarrow{م ء}$

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ حا س} & ٠ & ٠ \\ ١ & \text{أ حتا س} & ٠ \\ \text{قا س} & \text{ظتا س} & \text{أ طا س} \end{vmatrix}$ = − أ^{٢} حتا^{٢} س + ٨ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) −٨ (د) ٢

(١٣) مساحة الشكل الرباعى المحدب الذى طولا قطريه ١٢ سم ، ١٣ سم ويحصران زاوية

جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٠ (ب) ٧٢ (جـ) ٦٠ (د) ١٤٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ ل١ : (٠ ، ١) + ك (٤ ، -٣)

∴ م١ (الميل) = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ل٢ : ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

∴ م٢ (الميل) = $\frac{-٣}{٤}$ ∴ م١ = م٢

∴ ل١ // ل٢ ∴ (٠ ، ١) ∈ ل١

، معادلة ل٢ : ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

∴ البعد بينهما = $\frac{|٣ \times ٠ + ٤ \times ١ + ٦|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

= ٢ وحدة طول.

٢

أولًا : تمثيل نظام المتباينات بيانيًا

• س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ هو و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

• المستقيم ل١ : س + ص = ٣

الذي يمر بالنقط (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

• المستقيم ل٢ : س − ص = ١

الذي يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (٠ ، -١)

مجموعة الحل تمثل بالمنطقة المحددة بالشكل الرباعي و أ ب جـ

و (٠ ، ٠) ، أ (٠ ، ١)

، ب (٢ ، ١)

، جـ (٣ ، ٠)

∵ دالة الهدف هي ر = ٣ س + ٤ ص

$[ر]_و$ = ٣ × ٠ + ٤ × ٠ = ٠

$[ر]_أ$ = ٣ × ١ + ٤ × ٠ = ٣

$[ر]_ب$ = ٣ × ٢ + ٤ × ١ = ١٠

$[ر]_جـ$ = ٣ × ٠ + ٤ × ٣ = ١٢

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ١٢

١٢ محافظة بني سويف

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (جـ)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (أ)	٧ (ب)	٨ (ب)
٩ (أ)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (جـ)
١٣ (د)	١٤ (ب)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (د)	١٨ (أ)	١٩ (د)	٢٠ (أ)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (ب)	٢٤ (جـ)
٢٥ (جـ)	٢٦ (د)	٢٧ (د)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ هو و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

• المستقيم ل١ : س + ص = ٥

الذي يمر بالنقط (٠ ، ٥) ، (١ ، ٤)

• المستقيم ل٢ : ٢ س + ص = ٦

الذي يمر بالنقط (٣ ، ٠) ، (٢ ، ٢)

مجموعة الحل تمثل بالمنطقة المحددة بالشكل الرباعي أ ب جـ و

و (٠ ، ٠) ، أ (٣ ، ٠) ، ب (١ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٥)

∵ دالة الهدف هي ر = ٣ س + ٤ ص

$ر_و$ = ٣ × ٠ + ٤ × ٠ = ٠

$ر_أ$ = ٣ × ٣ + ٤ × ٠ = ٩

، $ر_ب$ = ٣ × ١ + ٤ × ٤ = ١٩

$ر_جـ$ = ٣ × ٠ + ٤ × ٥ = ٢٠

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ٢٠

٢

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءب}$ (١)

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ}$

$٤\overrightarrow{أجـ} = ٤\overrightarrow{أء} + ٤\overrightarrow{ءجـ}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\overrightarrow{أب} + ٤\overrightarrow{أجـ} = ٥\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءب} + ٤\overrightarrow{ءجـ}$

$= ٥\overrightarrow{أء} - \overrightarrow{ءب} + \overrightarrow{ءب}$

∴ $\overrightarrow{أب} + ٤\overrightarrow{أجـ} = ٥\overrightarrow{أء}$

١٣ محافظة المنيا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (ب)	٣ (جـ)	٤ (جـ)
٥ (ب)	٦ (جـ)	٧ (ب)	٨ (د)
٩ (أ)	١٠ (د)	١١ (ب)	١٢ (أ)
١٣ (أ)	١٤ (ب)	١٥ (ب)	١٦ (ب)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (جـ)	٢٠ (جـ)
٢١ (ب)	٢٢ (ب)	٢٣ (أ)	٢٤ (أ)
٢٥ (أ)	٢٦ (جـ)	٢٧ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

نرسم المستقيم الحدي ل : ٢ س + ٣ ص = ٦

(بخط متصل) يمر بالنقطة (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٠)

والنقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة : ٢ س + ٣ ص ≥ ٦

مجموعة الحل هي المنطقة المظللة.

٢

∵ $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، -٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-١ ، -٤)

$٢\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}$ = ٢ (٣ ، -٢) − ٢ (-١ ، -٤)

= (٩ ، -٦) + (٢ ، ٨) = (١١ ، ٢)

$\|٢\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١١^٢ + ٢^٢} = ٥\sqrt{٥}$

١٤ محافظة سوهاج

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (د)	٣ (جـ)	٤ (ب)
٥ (د)	٦ (ب)	٧ (جـ)	٨ (جـ)
٩ (د)	١٠ (ب)	١١ (جـ)	١٢ (أ)
١٣ (د)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (ب)
١٧ (جـ)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (أ)
٢١ (أ)	٢٢ (أ)	٢٣ (د)	٢٤ (د)
٢٥ (جـ)	٢٦ (ب)	٢٧ (د)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما

و س ∪ و ص

∪ الربع الأول

ثم نرسم المستقيم

الحدي ل :

س + ص = ٥

(بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٢٢) إذا كان : $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : $س^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & -٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٢٣) قطاع دائرى محيطه ١٠ سم وطول قوسه ٢ سم ، فإن مساحته = ... $سم^٢$.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٢٤) مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم ، فإن مساحته .... $سم^٢$.

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٢٤\sqrt{٣}$ (د) $٣٢\sqrt{٣}$

(٢٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -٧ \overrightarrow{ب}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (جـ) $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ (د) $٧\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

(٢٦) النسبة التى يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{بأ}$

حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ٦) تساوى ....

(أ) ٢ : ٥ من الداخل. (ب) ٥ : ٢ من الخارج.

(جـ) ١ : ٣ من الداخل. (د) ٣ : ١ من الخارج.

(٢٧) إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطة ن (٢ ، ٣) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه له حيث $\overrightarrow{ى}$ = (-١ ، ٢)

فإن المعادلتين البارامتريتين للمستقيم ل هما ....

(أ) س = ٢ - ك ، ص = ٣ - ٢ ك (ب) س = ٢ - ك ، ص = -٣ + ٢ ك

(جـ) س = ٢ + ك ، ص = ٣ + ٢ ك (د) س = ٢ - ك ، ص = ٣ + ٢ ك

ثانيًا الأسئلة المقالية

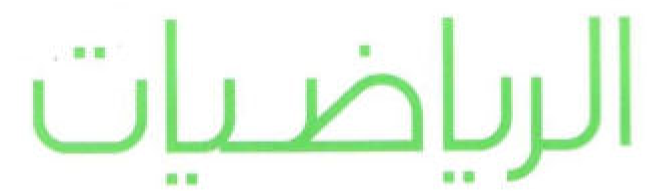
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ مثل بيانيًا مجموعة حل المتباينة : ص < ٢ س + ٣

---

٢ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{بجـ}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} + \overrightarrow{ءجـ} = ٢ \overrightarrow{أهـ}$



الجزء الخاص

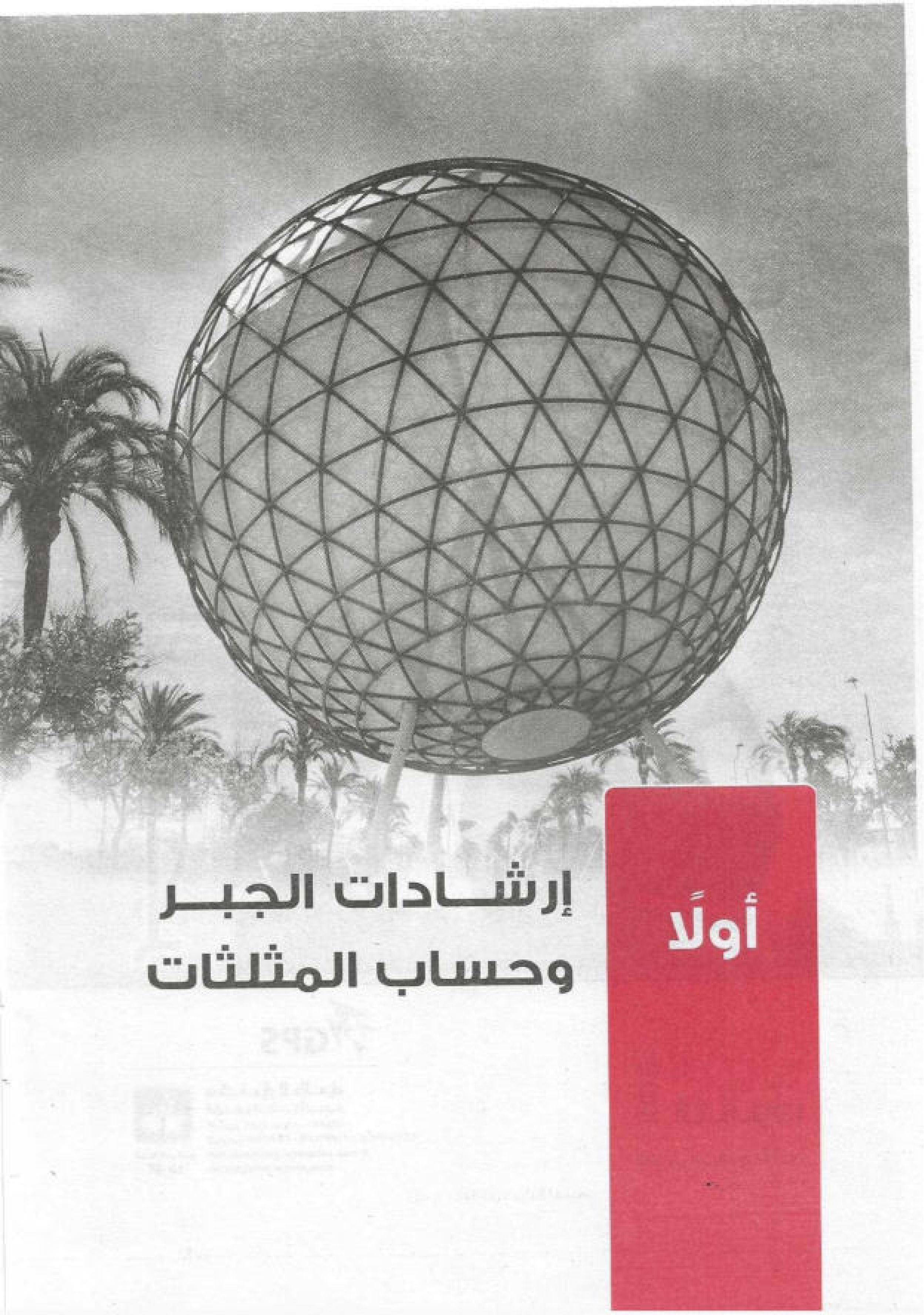
بالإجابات



الفصل الدراسى الثانى



إعداد نخبة من خبراء التعليم



أولًا

إرشادات الجبر وحساب المثلثات

إرشادات الوحدة الأولى

إرشادات تمارين 1

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (د)	(٥) (د)
(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (جـ)	(٩) (جـ)	(١٠) (ب)
(١١) (ب)	(١٢) (جـ)	(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)
(١٦) (جـ)	(١٧) (جـ)	(١٨) (أ)	(١٩) (أ)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (د)	(٢٣) (د)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (أ)
(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (جـ)	(٢٩) (جـ)	(٣٠) (ب)
(٣١) (جـ)	(٣٢) (جـ)	(٣٣) (ب)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (جـ)
(٣٦) (جـ)	(٣٧) (جـ)	(٣٨) (ب)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (د)
(٤١) (د)	(٤٢) (جـ)	(٤٣) (جـ)	(٤٤) (ب)	(٤٥) (ب)
(٤٦) (جـ)	(٤٧) (ب)	(٤٨) (ب)	(٤٩) (د)	(٥٠) (ب)
(٥١) (د)	(٥٢) (ب)	(٥٣) (د)		

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) أ على النظم ٢ × ٣ ، ب على النظم ٣ × ٣ ، جـ على النظم ٣ × ١

(٢) $أ_{٢٢}$ = ١ ، $ب_{١١}$ = ٥ ، $جـ_{١٢}$ = $-\frac{١}{٥}$

، $أ_{١٣}$ لا توجد لأن عدد صفوف المصفوفة أ صفان ، $ب_{٢٢}$ = ٨ ، $جـ_{١٢}$ = $-\frac{١}{٢}$

٢

(١) مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ .

(٢) مصفوفة صف على النظم ١ × ٤

(٣) مصفوفة عمود على النظم ٣ × ١

(٤) مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢

(٥) مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢

(٦) مصفوفة قطرية على النظم ٢ × ٢

٣

$$-٥ أ = \begin{pmatrix} ١٠ \times -٥ & -١٢ \times -٥ & ١٥ \times -٥ \\ ٧ \times -٥ & -١٠ \times -٥ & ٢٠ \times -٥ \\ ٣ \times -٥ & ١ \times -٥ & -٢ \times -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥٠ & ٦٠ & -٧٥ \\ -٣٥ & ٥٠ & -١٠٠ \\ -١٥ & -٥ & ١٠ \end{pmatrix}$$

٤

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٢

(٢) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ على النظم ١ × ٣

(٣) $\begin{pmatrix} -٤ & ٢ & -١ \\ ٧ & ٣ & \sqrt{٥} \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣

(٤) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢

(٥) $\begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ١

(٦) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ٤ \\ ١٢ & ٩ & ٦ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣

٥

(١) $أ = \begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{pmatrix}$

(٢) $ب = \begin{pmatrix} ب_{١١} \\ ب_{١٢} \\ ب_{١٣} \end{pmatrix}$

(٣) $جـ = \begin{pmatrix} جـ_{٢١} & جـ_{١١} \\ جـ_{٢٢} & جـ_{١٢} \end{pmatrix}$

٦

$أ_{١١}$ = ١ − ١ = ٠ ، $أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١ ، $أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ١ − ٢ = −١ ، $أ_{٢٢}$ = ٢ − ٢ = ٠ ، $أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

$أ_{١٣}$ = ١ − ٣ = −٢ ، $أ_{٢٣}$ = ٢ − ٣ = −١ ، $أ_{٣٣}$ = ٣ − ٣ = ٠

$∴ أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & -٢ \end{pmatrix}$

$∴ أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٢ & -١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

٧

$أ = \begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

، $جـ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ ، $جـ_{٢١}$ = ٤

٨

∵ ٢أ − ١ = ٣ ∴ أ = ٢

، ∵ ٣ب + ١ = ٧ ∴ ب = ٢

٩

∵ ٢س − ٥ = ٢٥ ∴ س = ١٥

، ∵ ٣ص + ١٢ = ص + ١٨

∴ ٢ص = ٦ ∴ ص = ٣

١٠

∵ س + ٨ = ٢٨ ∴ س = ٢٠

، ∵ −ص = ٤ص − ١٠ ∴ ٥ص = ١٠

∴ ص = ٢

١١

∵ $ل^٣$ = ٨ ∴ ل = ٢

، ∵ ١٥ = $س^٢$ − ١ ∴ $س^٢$ = ١٦

∴ س = ± ٤ ، ص = −١

، ∵ ع + ص = ٨ ∴ ع − ١ = ٨ ∴ ع = ٩

١٢

∵ ٣س = −٩ ∴ س = −٣

، ∵ س + ص = ٤ ∴ −٣ + ص = ٤

∴ ص = ٧

، ∵ س − ع = −١٠ ∴ −٣ − ع = −١٠

∴ ع = ٧

١٣

(١) ∵ ٣ = أ − ٢ ∴ أ = ٥

، ∵ −٥ = ٢ب + ١

∴ ب = −٣

، ∵ أ − ٣ = جـ ∴ ٥ − ٣ = جـ

∴ جـ = ٢

، ∵ ٣د − ٢ = ١٦ ∴ د = ٦

(٢) ∵ ١٥ = ٣أ ∴ أ = ٥

، ∵ ٢ب = ١٠ ∴ ب = ٥

، ∵ ٠ = ٢ب − د ∴ ٠ = ٢ × ٥ − د

∴ د = ١٠ ، ∵ ٢أ + جـ = ١٠

∴ ٢ × ٥ + جـ = ١٠ ∴ جـ = ٠

(٣) أ + ب = ٩ (١) ، أ − ب = −٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢أ = ٦ ∴ أ = ٣

وبالتعويض في (١) : ∴ ب = ٦

، ∵ أ + ب + جـ = ٧

∴ ٩ + جـ = ٧ ∴ جـ = −٢

، ∵ أ − ب + ٢د = ٥

∴ −٣ + ٢د = ٥ ∴ د = ٤

١٤

(١) شبه متماثلة.   (٢) متماثلة.
(٣) متماثلة.   (٤) شبه متماثلة.

١٥

∵ أ مصفوفة متماثلة
∴ ٨ = ع + ٣   ∴ ع = ٥
، ∵ ٢ ص = ع + ١   ∴ ٢ ص = ٥ + ١
∴ ص = ٣
، ∵ ٢ ص + س = ٢ + ٢ س
∴ ٢ س = ٢ × ٣ − ٢   ∴ ٢ س = ٧
∴ س = ٣٫٥

١٦

∵ ب مصفوفة شبه متماثلة
∴ ٦ = −٣ ع   ∴ ع = −٢
، ∵ ع + ٦ = ٢ س   ∴ −٢ + ٦ = ٢ س
∴ س = ٢
، ∵ ٢ ص + س = ٥   ∴ ٢ ص + ٢ = ٥
∴ ص = ١
∴ س ص ع = ٢ × −٢ × ١ = −٤

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (أ)   (٢) (جـ)   (٣) (جـ)   (٤) (د)
(٥) (جـ)   (٦) (ب)   (٧) (جـ)   (٨) (د)
(٩) (ب)

إرشادات الحل :

(١) $\begin{pmatrix} ١ & ٢س \\ س & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} حـ & أ \\ ء & ب \end{pmatrix}$

∴ أ ء − ب حـ = ٢ س² − س
، ∵ أ ء − ب حـ = ١
∴ ٢ س² − س = ١
∴ ٢ س² − س − ١ = ٠
∴ (٢ س + ١) (س − ١) = ٠
∴ س = $-\frac{١}{٢}$ أو س = ١
∴ س ∈ $\{١ ، -\frac{١}{٢}\}$

(٢) ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة :
س² − ٢ س + ١ = ٠
∴ ل + م = ٢ ، ل م = ١
∴ أ ء − ب حـ = ل² م × م + ل² م²
= ل² م² + ل² م² = ٢ (ل م)²
= ٢ (١)² = ٢

(٣) ∵ المصفوفة شبه متماثلة
∴ أ = هـ = ع = ٠ ، ب = −ء
، حـ = −س ، و = −ص

∴ $\frac{أ + ب + حـ + و}{ء + س + ص + ع} = \frac{٠ + (-ء) + (-س) + (-ص)}{ء + س + ص + ٠} = \frac{-(ء + س + ص)}{(ء + س + ص)} = -١$

(٤) ∵ $أ_{١١}$ = ١ + ٢ (١) = ٣
، $أ_{٢١}$ = ١ + ٢ (٢) = ٥
∴ مجموع عناصر الصف الأول = $أ_{١١} + أ_{٢١}$
= ٣ + ٥ = ٨
∴ ك² = ٨   ∴ ك = ± ٢ $\sqrt{٢}$

(٥) ن − ١ = م   (١)
، ٢ م − ١ = ن   (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) :
∴ م = ٢ ، ن = ٣   ∴ م + ن = ٥

(٦) من تساوي المصفوفتين نجد أن : أ = ١ + ت
، ب = ١ − ت ، حـ = جا س ، ء = ١
∴ (١ + ت) (١ − ت) جا س × ١ = ١
∴ ٢ جا س = ١   ∴ جا س = $\frac{١}{٢}$
∴ س = $\frac{\pi}{٦}$

٣

(١) $\begin{pmatrix} ٦٨ & ٤٤ \\ ٥٢ & ٢٨ \\ ١٤ & ٣٧ \end{pmatrix}$

(٢) العمود الأول = ٤٤ + ٢٨ + ٣٧ = ١٠٩
العمود الثاني = ٦٨ + ٥٢ + ١٤ = ١٣٤
مصانع المنسوجات الجلدية أكثر من الأغذية

(٣) الصف الأول = ٤٤ + ٦٨ = ١١٢
الصف الثاني = ٢٨ + ٥٢ = ٨٠
الصف الثالث = ٣٧ + ١٤ = ٥١
مدينة ٦ أكتوبر الأعلى في عدد المصانع

(٧) ∵ س² + س ص + ص² = ٣   (١)
، س³ − ص³ = ٩
∴ (س − ص) (س² + س ص + ص²) = ٩
∴ (س − ص) × ٣ = ٩   ∴ (س − ص) = ٣
∴ (س − ص)² = ٩
∴ س² − ٢ س ص + ص² = ٩   (٢)
بطرح (١) من (٢) : ∴ −٣ س ص = ٦
∴ س ص = −٢

(٨) مجموع عناصر القطر الرئيسي = $أ_{١١} + أ_{٢٢} + أ_{٣٣}$
= ٦ + ٦ + ٦ = ١٨

(٩) ∵ ب = ٢ س + ص ، أ = س + ص
∴ $\frac{ب}{أ} = \frac{٢ س + ص}{س + ص}$
، ∵ $٣^{س}$ = ٢٥ = ٥²   (١)
، $٣^{ص}$ = ٥   (٢)
بالتعويض من (٢) في (١) : ∴ $٣^{س} = (٣^{ص})^{٢}$
∴ $٣^{س} = ٣^{٢ص}$ ∴ س = ٢ ص
∴ $\frac{ب}{أ} = \frac{٤ ص + ص}{٢ ص + ص} = \frac{٥ ص}{٣ ص} = \frac{٥}{٣}$

تطبيقات حياتية

١

(١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣٠ & ١٠ \\ ٨ & ٣٥ & ١٦ \\ ١٠ & ٤١ & ١٨ \end{pmatrix}$

(٢) المصفوفة على النظم ٣ × ٣ ، $أ_{٣٢}$ = ٨

٢

$\begin{pmatrix} ٩ & ٩ \\ ٨ & ١٣ \\ ٢٥ & ١٨ \end{pmatrix}$

ارشادات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)   (٢) (ب)   (٣) (د)   (٤) (ب)   (٥) (جـ)
(٦) (د)   (٧) (ب)   (٨) (جـ)   (٩) (د)   (١٠) (د)
(١١) (أ)   (١٢) (جـ)   (١٣) (جـ)   (١٤) (أ)   (١٥) (جـ)
(١٦) (أ)   (١٧) (جـ)   (١٨) (جـ)   (١٩) (د)   (٢٠) (أ)
(٢١) (أ)   (٢٢) (د)   (٢٣) (جـ)   (٢٤) (أ)   (٢٥) (أ)
(٢٦) (د)   (٢٧) (جـ)   (٢٨) (جـ)   (٢٩) (جـ)   (٣٠) (ب)
(٣١) (ب)   (٣٢) (ب)   (٣٣) (ب)   (٣٤) (جـ)   (٣٥) (د)
(٣٦) (د)   (٣٧) (ب)   (٣٨) (د)   (٣٩) (د)   (٤٠) (ب)
(٤١) (ب)   (٤٢) (د)   (٤٣) (ب)   (٤٤) (أ)   (٤٥) (أ)
(٤٦) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) أ + ب = $\begin{pmatrix} ٨- & ٢- \\ ٨- & ٥ \end{pmatrix}$ (٢) غير ممكن

٢

$2\text{أ} - 3\text{ب} + 4\text{ج}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -18 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 & -26 \\ -24 & 28 \end{pmatrix}$

٣

$2\text{س} - \text{ص} + \text{ع}$

$= \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 9 & 18 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -19 & -11 \\ 6 & 22 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$

٤

$\because 4(\text{أ} + \text{ب})$

$= 4\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

$= 4\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ -4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$

$، 4\text{أ} + 4\text{ب}$

$= 4\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 16 & 0 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ -4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore 4(\text{أ} + \text{ب}) = 4\text{أ} + 4\text{ب}$

٥

(١) $\because (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

$، \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

(٢) $\because (\text{أ} - \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$، \text{أ}^{\text{مد}} - \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ} - \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} - \text{ب}^{\text{مد}}$

(٣) $\because \text{أ} - \text{ب} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} ، \text{ب} - \text{أ} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} - \text{ب} \neq \text{ب} - \text{أ}$

(٤) $\because -(\text{أ} + \text{ب}) = -\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

$، (-\text{أ}) + (-\text{ب}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

$\therefore -(\text{أ} + \text{ب}) = (-\text{أ}) + (-\text{ب})$

٦

(١) $\frac{1}{2}(\text{أ} + \text{ج}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

(٢) $2\text{أ} - \text{ب} + 2\text{ج}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

(٣) $\text{أ} - 2\text{ب} + 2(\text{ب} + \text{ج})$

$= \text{أ} - 2\text{ب} + 2\text{ب} + 2\text{ج} = \text{أ} + 2\text{ج}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

(٤) $\text{أ} + 2\text{ب}^{\text{مد}} - \text{ج}^{\text{مد}}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

٧

(١) أ + ب غير ممكنة لأن أ ، ب ليستا على نفس النظم.

(٢) $\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -5 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} -8 & 0 & -6 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -15 & 0 & -11 \\ 8 & 14 & 0 \end{pmatrix}$

(٣) $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 0 & 7 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 0 & 14 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}$

٨

$\because \text{أ} + 2\text{ب} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \square$

∴ المصفوفة أ معكوس جمعي للمصفوفة ٢ ب

٩

$\because \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & 5 & \text{أ} \\ 8 & \text{ص} & -2 \\ \text{ب} & -3 & \text{ع} \end{pmatrix}$

∴ س = ٣ ، ص = ١ ، ع = ١٢ ، أ = −٤ ، ب = −١

١٠

$\because$ الطرف الأيمن $= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3\text{س} & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2\text{ص} \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 9 - 2\text{ص} \\ 3\text{س} - 10 & 4 \end{pmatrix}$

، الطرف الأيسر $= \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 9 - 2\text{ص} \\ 3\text{س} - 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

∴ ٣س − ١٠ = ٢ ومنها س = ٤

، ٩ − ٢ ص = ٣ ومنها ص = ٣

١١

$\because \begin{pmatrix} 2\text{أ} & 6 \\ 12 & 2\text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\text{أ} & 3\text{ء} \\ 3\text{حـ} & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\text{حـ} & -12 \\ 0 & -4\text{أ} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2\text{أ} & 6 \\ 12 & 2\text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\text{أ} - 4\text{حـ} & 3\text{ء} - 12 \\ 3\text{حـ} & -6 - 4\text{أ} \end{pmatrix}$

∴ ١٢ = ٣ حـ ∴ حـ = ٤

، ٢أ = ٣أ − ٤ حـ ∴ أ = ٤ × ٤ = ١٦

، ٢ب = −٦ − ٤أ ∴ ٢ب = −٦ − ٦٤

∴ ب = −٣٥

، ٦ = ٣ء − ١٢ ∴ ١٨ = ٣ء ∴ ء = ٦

١٢

$\because ٥\text{س} + ٥ = ٠$ $\therefore \text{س} = -١$

، $\because \text{س} + ٢\text{ع} + ٥ = ٠$ $\therefore \text{ع} = -٢$

، $\because \text{س}\,\text{ص} + ٤\text{ع} + ١٠ = ٠$ $\therefore \text{ص} = ٢$

، $\because ٣\text{س} + \text{ع}\,\text{ل} + ٥ = ٠$ $\therefore \text{ل} = ١$

١٣

$$\begin{pmatrix} \text{س} - ٤ & ٣ \\ ٣\text{ع} & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{س} & ٩\text{ص} \\ -٩ & ٥\text{ل} \end{pmatrix}$$

$\therefore \text{س} - ٤ = ٢\text{س}$ $\therefore \text{س} = -٤$

، $٩\text{ص} = ٣$ $\therefore \text{ص} = \frac{١}{٣}$

، $٣\text{ع} = -٩$ $\therefore \text{ع} = -٣$

، $٥\text{ل} = ٢$ $\therefore \text{ل} = \frac{٢}{٥}$

١٤

$$\because (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ -١ & ٥ & ٨ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ٦ & ٨ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ٦ & ٨ & ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

١٥

$$\text{س} = ٢\begin{pmatrix} ٤ & ٨ & -٦ \\ ٢ & -٤ & ٨ \\ ٦ & ١٢ & ٠ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ٢ & -٦ & ٢ \\ ٤ & -١٠ & ٠ \\ -١ & ٨ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٨ & ١٦ & -١٢ \\ ٤ & -٨ & ١٦ \\ ١٢ & ٢٤ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & ١٨ & -٦ \\ -١٢ & ٣٠ & ٠ \\ ٣ & -٢٤ & ١٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢ & ٣٤ & -١٨ \\ -٨ & ٢٢ & ١٦ \\ ١٥ & ٠ & ١٢ \end{pmatrix}$$

١٦

$$\text{س} = ٢\text{أ} - \text{ب}^{\text{مد}} = ٢\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & ٦ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٦ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٦ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & -٤ \\ -١٠ & ١٢ \end{pmatrix}$$

١٧

$$\because ٤\left[\text{س} + \begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٠ & -٣ \end{pmatrix}\right] = ٢\text{س} + \begin{pmatrix} ١٢ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{pmatrix}$$

$$\therefore ٤\text{س} + \begin{pmatrix} ٢٠ & -٤ \\ ٠ & -١٢ \end{pmatrix} = ٢\text{س} + \begin{pmatrix} ١٢ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{pmatrix}$$

$$\therefore ٢\text{س} = \begin{pmatrix} ١٢ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢٠ & -٤ \\ ٠ & -١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & ٠ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٨ & ٠ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٠ \\ ٢٫٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

١٨

$$(١) \because \text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ -٣ & -٦ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -١ & -٢ \\ ٢ & ٩ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ١ & -٢ & ٩ \end{pmatrix}$$

$(٢) \because \text{س}^{\text{مد}} + \text{أ} = ٢\text{ب}$

$\therefore \text{س}^{\text{مد}} = ٢\text{ب} - \text{أ}$

$$= ٢\begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ -٢ & -٦ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & -٦ & ٢ \\ -٤ & -١٢ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ & -١ \\ -٣ & -٤ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & -٨ & ١ \\ -٧ & -١٦ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥ & -٧ \\ -٨ & -١٦ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$(٣) \because ٥\text{س}^{\text{مد}} = ٢\text{أ} - ٢\text{ب}$

$$= ٢\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ -٢ & -٦ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٢ \\ ٦ & ٨ & ١٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ١٢ & -٨ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٦ & ١٠ & ٠ \\ ١٠ & ٢٠ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -\frac{٦}{٥} & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ & \frac{٢}{٥} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -\frac{٦}{٥} & ٢ \\ ٢ & ٤ \\ ٠ & \frac{٢}{٥} \end{pmatrix}$$

١٩

$\because ٢\text{ب} + \text{س}^{\text{مد}} = ٣\text{س}^{\text{مد}} - \text{أ}$

$\therefore ٢\text{س}^{\text{مد}} = ٢\text{ب} + \text{أ}$

$$= ٢\begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ١ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٨ & ٢ \\ ٢ & -٤ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ & ١ \\ ٥ & -٤ \\ -٧ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٣ & \frac{١}{٢} \\ \frac{٥}{٢} & -٢ \\ -\frac{٧}{٢} & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٣ & \frac{٥}{٢} & -\frac{٧}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -٢ & ١ \end{pmatrix}$$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (جـ)

(٤) (أ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

إرشادات لحل رقم ١

(١) بفرض أن: $\text{ب} = \text{أ} + \text{أ}^{\text{مد}}$

$\therefore \text{ب}^{\text{مد}} = (\text{أ} + \text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{أ} = \text{ب}$

$\therefore$ المصفوفة $(\text{أ} + \text{أ}^{\text{مد}})$ متماثلة

(٢) بفرض أن: $\text{ب} = \text{أ} - \text{أ}^{\text{مد}}$

$\therefore \text{ب}^{\text{مد}} = (\text{أ} - \text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} - \text{أ} = -\text{ب}$

$\therefore$ المصفوفة $(\text{أ} - \text{أ}^{\text{مد}})$ شبه متماثلة

(٣) $\because (\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \text{أ} + \text{ب}$

$\therefore (\text{أ} + \text{ب})$ مصفوفة متماثلة

$$(٤)\ \text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$،\ \text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \\ -٢ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$(٥)\ \text{نفرض أن: } \text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix}$$

$$،\ \text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{س} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ل} \end{pmatrix}$$

$$،\ \because \text{أ} + \text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢\text{س} & \text{ص} + \text{ع} \\ \text{ص} + \text{ع} & ٢\text{ل} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

∴ ٢س = ١ ومنها س = $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ل = ١

∴ ل = $\frac{١}{٢}$ ، ص + ع = ٠

∴ مجموع عناصر أ = س + (ص + ع) + ل

$= \frac{١}{٢} + ٠ + \frac{١}{٢} = ١$

(٦) نفرض أن: $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$

، $ب = \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{pmatrix}$

∴ $أ + ب = \begin{pmatrix} أ_{١١} + ب_{١١} & أ_{٢١} + ب_{٢١} \\ أ_{١٢} + ب_{١٢} & أ_{٢٢} + ب_{٢٢} \end{pmatrix}$

، ∵ (أ + ب) مصفوفة متماثلة

∴ $أ_{٢١} + ب_{٢١} = أ_{١٢} + ب_{١٢}$

∴ $أ_{٢١} - أ_{١٢} = ب_{١٢} - ب_{٢١}$

∴ $أ_{٢١} - أ_{١٢} = -(ب_{٢١} - ب_{١٢})$

∴ $\frac{أ_{٢١} - أ_{١٢}}{ب_{٢١} - ب_{١٢}} = -١$

٢

∵ $س + ٢ص = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ (١)

، $س + ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ (٢)

بطرح (٢) من (١): ∴ $ص = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$

، من (٢): ∴ $س = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} - ص$

$= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ -٦ & ٢ \end{pmatrix}$

٣

∵ $س = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ ∴ $س^{مد} = \begin{pmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{pmatrix}$

، ∵ $(س - س^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} هـ & و \\ م & ن \end{pmatrix}$

∴ $س^{مد} - س = \begin{pmatrix} هـ & و \\ م & ن \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} هـ & و \\ م & ن \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} ٠ & جـ - ب \\ ب - جـ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} هـ & و \\ م & ن \end{pmatrix}$

∴ هـ = ٠ ، و = جـ − ب ، م = ب − جـ ، ن = ٠

∴ هـ + و + م + ن = ٠ + جـ − ب + ب − جـ + ٠ = ٠

٤

∵ $٣أ - ٢ب^{مد} + ٢س = ب - س^{مد}$

∴ $٢س + س^{مد} = ب - ٣أ + ٢ب^{مد}$

$= \begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٢ & ٣ \\ ١٥ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٢١ & ٧ \\ ١٧ & -٣ \end{pmatrix}$ (١)

وبأخذ مدور الطرفين:

∴ $٢س^{مد} + س = \begin{pmatrix} -٢١ & ١٧ \\ ٧ & -٣ \end{pmatrix}$ (٢)

وبضرب المعادلة: (١) × (−٢):

∴ $-٤س - ٢س^{مد} = \begin{pmatrix} ٤٢ & -١٤ \\ -٣٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (٣)

بجمع (٢)، (٣):

∴ $-٣س = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣ \\ -٢٧ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ $س = \begin{pmatrix} -٧ & -١ \\ ٩ & -١ \end{pmatrix}$

ارشادات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (جـ)
(٦) (د) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (د) (١٠) (جـ)
(١١) (ب) (١٢) (جـ) (١٣) (د) (١٤) (د) (١٥) (د)
(١٦) (ب) (١٧) (أ) (١٨) (د) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)
(٢١) (ب) (٢٢) (جـ) (٢٣) (د) (٢٤) (أ) (٢٥) (ب)
(٢٦) (جـ) (٢٧) (أ) (٢٨) (جـ) (٢٩) (أ) (٣٠) (جـ)
(٣١) (أ) (٣٢) (جـ) (٣٣) (ب) (٣٤) (جـ) (٣٥) (ب)
(٣٦) (جـ) (٣٧) (أ) (٣٨) (ب) (٣٩) (جـ) (٤٠) (د)
(٤١) (ب) (٤٢) (د) (٤٣) (ب) (٤٤) (جـ) (٤٥) (أ)
(٤٦) (ب) (٤٧) (ب) (٤٨) (جـ) (٤٩) (جـ) (٥٠) (جـ)
(٥١) (جـ) (٥٢) (أ) (٥٣) (أ) (٥٤) (ب) (٥٥) (د)
(٥٦) (جـ) (٥٧) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ١ & ١٥ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} -٤ & -٣ & ٦ \\ ١٤ & ٥ & ١٢ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} -٦ \\ ٧ \end{pmatrix}$ (٤) غير ممكنة.

(٥) $\begin{pmatrix} ٦ & -٢ \\ ٣ & ٦ \\ ١٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (٦) غير ممكنة.

(٧) $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ (٨) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) غير ممكنة. (١٠) $\begin{pmatrix} ٢٠ & ١٠ & -٥ \\ -٢٤ & -١٢ & ٦ \\ ٣٢ & ١٦ & -٨ \end{pmatrix}$

(١١) $\begin{pmatrix} ١١ & -٢٢ & ٢٩ \\ ٩ & -٢٧ & ٣٣ \\ ١٣ & -١٧ & ٢٦ \end{pmatrix}$

(١٤) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & ٩ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٣٣ \\ ١ & ٥٨ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٠ & ٦٩ \\ ٦٥ & ١١٩ \end{pmatrix}$

٢

(١) $\begin{pmatrix} ٠ & ١٨ \\ ٠ & ٣٦ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ١٥ & ٥ \\ ٦٣ & ٢١ \end{pmatrix}$

(٣) $(أ + ب)\,أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٩ & ١١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣٠ & ١٠ \\ ٩٣ & ٣١ \end{pmatrix}$

٣

$أب = \begin{pmatrix} -١٢ & -٦ \\ ٢٢ & ٣٠ \end{pmatrix}$

، $أ^٢ = أ \times أ = \begin{pmatrix} ٠ & -٧ \\ ٢٨ & ٢١ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٢ & ٢٤ \\ ٢٨ & ٣٠ \end{pmatrix}$

٤

∵ $س^٢ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٩ & ٤ \end{pmatrix}$

، $ص^٢ = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٠ \\ ١٥ & ١٥ \end{pmatrix}$

∴ $س^٢ - ص^٢ = \begin{pmatrix} -٣ & -٧ \\ -٦ & -١١ \end{pmatrix}$

٥

$أب = \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{pmatrix} = ١٠\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= ١٠\, I$

٦

$\because \text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 1 & -5 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\text{ب})^{t} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 20 & -5 & 15 \end{pmatrix}$

$، \because \text{ب}^{t}\,\text{أ}^{t} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 20 & -5 & 15 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\text{ب})^{t} = \text{ب}^{t}\,\text{أ}^{t}$

٧

$\because \text{ب} + \text{ج} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}(\text{ب} + \text{ج}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$

$، \because \text{أ}\text{ب} + \text{أ}\text{ج} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}(\text{ب} + \text{ج}) = \text{أ}\text{ب} + \text{أ}\text{ج}$

٨

(١) $\text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -17 \\ 10 & 14 \\ 17 & 29 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\text{ب})\text{ج} = \begin{pmatrix} -1 & -17 \\ 10 & 14 \\ 17 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -89 & -34 & 14 \\ 110 & 28 & 16 \\ 213 & 58 & 22 \end{pmatrix}$

$، \because \text{ب}\text{ج} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & -2 & 10 \\ 55 & 14 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}(\text{ب}\text{ج}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 10 \\ 55 & 14 & 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -89 & -34 & 14 \\ 110 & 28 & 16 \\ 213 & 58 & 22 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\text{ب})\text{ج} = \text{أ}(\text{ب}\text{ج})$

(٢) $I\,\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$، \text{ب}\,I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ب}\,I = I\,\text{ب} = \text{ب}$

٩

$\because (\text{أ} + \text{ب})^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}^{t}\,\text{ب})^{t} = \text{ب}^{t}\,\text{أ}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

١٠

$\text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$

$، \text{ب}\text{أ} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -10 \\ 48 & -42 & 60 \\ 40 & -35 & 50 \end{pmatrix} \neq \boxed{}$

١١

$\because \text{أ}\text{ب}\text{ج} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 39 \\ -18 & 23 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\text{ب}\text{ج})^{t} = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 39 & 23 \end{pmatrix}$

$، \because \text{ج}^{t}\,\text{ب}^{t}\,\text{أ}^{t}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 39 & 23 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}\text{ب}\text{ج})^{t} = \text{ج}^{t}\,\text{ب}^{t}\,\text{أ}^{t}$

١٢

$\because \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{2} - 5\text{أ} + 22\,I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$- 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -12 & 20 \\ -20 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$

١٣

بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

∴ س − ٢ = ١   ∴ س = ٣

، بضرب عناصر الصف الثاني من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

∴ ١ + ٢ ص = ٥   ∴ ص = ٢

، بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الثاني من المصفوفة الثانية

∴ ٢ س + ١ = ع   ∴ ٢ × ٣ + ١ = ع

∴ ع = ٧

١٤

$\because \text{أب} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \text{س} & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\text{س} & 3+\text{ص} \\ \text{س} & \text{ص} \end{pmatrix}$

$\text{، ب أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \text{س} & \text{ص} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2+\text{س} & 3+\text{ص} \\ \text{س} & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{pmatrix}$

$\therefore 2+\text{س} = 2 \quad \therefore \text{س} = 0$

$\text{،}\ 3+\text{ص} = 5 \quad \therefore \text{ص} = 2$

١٥

$\because \text{م}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{م}^2 - \text{س م} + \text{ص} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{س} & 0 \\ 2\text{س} & 3\text{س} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{ص} & 0 \\ 0 & \text{ص} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-\text{س}+\text{ص} & 0 \\ 8-2\text{س} & 9-3\text{س}+\text{ص} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1-\text{س}+\text{ص} & 0 \\ 8-2\text{س} & 9-3\text{س}+\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore 8-2\text{س} = 0 \quad \therefore \text{س} = 4$

$\text{،}\ 1-\text{س}+\text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ص} = 3$

١٦

$\text{أ}^2 = \text{أ} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 & 147 \\ -21 & 57 \end{pmatrix}$

$\text{ب ج} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 41 \\ 23 & 35 \end{pmatrix}$

$(\text{ب ج})^t = \begin{pmatrix} 3 & 23 \\ 41 & 35 \end{pmatrix}$

$\therefore 2\,\text{س}^t = \begin{pmatrix} 162 & 147 \\ -21 & 57 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 23 \\ 41 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165 & 170 \\ 20 & 92 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س}^t = \begin{pmatrix} 82.5 & 85 \\ 10 & 46 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \begin{pmatrix} 82.5 & 10 \\ 85 & 46 \end{pmatrix}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (أ)
(٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (جـ) (٩) (د) (١٠) (ب)
(١١) (ب) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (أ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) $\text{س س}^t = \begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جتا}^2\theta & \text{جتا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta \\ \text{جتا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta & \text{جا}^2\theta \end{pmatrix}$

$\text{، ص ص}^t = \begin{pmatrix} \text{جا}\,\theta \\ -\text{جتا}\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{جا}\,\theta & -\text{جتا}\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جا}^2\theta & -\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta \\ -\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta & \text{جتا}^2\theta \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س س}^t + \text{ص ص}^t = \begin{pmatrix} \text{جتا}^2\theta+\text{جا}^2\theta & 0 \\ 0 & \text{جتا}^2\theta+\text{جا}^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٢) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{أ}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

وهكذا $\therefore \text{أ}^{27} = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} = 1 + 27 + 0 + 1 = 29$

(٣) مجموع الجذرين = ل + م = ٣

، حاصل ضرب الجذرين = ل م = ١

$\therefore \begin{pmatrix} 3 & \text{ل} \\ \text{ل} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \text{م} \\ \text{م} & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6+\text{ل م} & 3\text{م}+3\text{ل} \\ 2\text{ل}+2\text{م} & \text{ل م}+6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6+1 & 3(3) \\ 2(3) & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

(٤) ∵ المصفوفتين أ ، ب ليستا مصفوفة صف أو عمود

∵ عدد عناصر المصفوفة أ = ١٠

$\therefore \text{أ}_{2\times5}$ أو $\text{أ}_{5\times2}$

، ∵ عدد عناصر المصفوفة ب = ٦

$\therefore \text{ب}_{2\times3}$ أو $\text{ب}_{3\times2}$

∵ أب معرف

$\therefore \text{أ}_{5\times2} \times \text{ب}_{2\times3} = (\text{أب})_{5\times3}$

$\therefore$ عدد عناصر $(\text{أب})_{5\times3} = 5 \times 3 = 15$

(٥) $\because (\text{أ}+\text{ب})^2 = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})$

$= \text{أ}^2 + \text{أب} + \text{ب أ} + \text{ب}^2$

ولكي تكون مساوية لـ $\text{أ}^2 + 2\,\text{أب} + \text{ب}^2$

$\therefore \text{أب} = \text{ب أ}$

(٦) $\text{أ}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \text{ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \text{ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\text{ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{أ}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2\text{ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \text{ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3\text{ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وهكذا

$\therefore \text{أ}^{\text{ن}} = \begin{pmatrix} 1 & \text{ن ك} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٧) $\because \text{أ} = \text{ت} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{ت}\, I$

$\therefore \text{أ}^{4\text{ن}} = \text{ت}^{4\text{ن}} I^{4\text{ن}} = 1 \times I = I$

(٨) نفرض $\text{أ} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

حيث أ ≠ ▭ ، ب ≠ ▭ ولكن نجد أن :

$\text{أب} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

= ▭

(٩) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$

، $أ^{٣} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢^{٢} & ٢^{٢} \\ ٢^{٢} & ٢^{٢} \end{pmatrix}$

$أ^{٤} = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٨ \\ ٨ & ٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢^{٣} & ٢^{٣} \\ ٢^{٣} & ٢^{٣} \end{pmatrix}$ وهكذا

$\therefore أ^{٦} = \begin{pmatrix} ٢^{٥} & ٢^{٥} \\ ٢^{٥} & ٢^{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٢ & ٣٢ \\ ٣٢ & ٣٢ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= ٦$

(١٠) $\because أ^{٢} = ٣أ + ٢I$

$\therefore أ^{٢} \times أ = ٣أ \times أ + ٢I \times أ$

$\therefore أ^{٣} = ٣أ^{٢} + ٢أ$

$\therefore أ^{٣} = ٣(٣أ + ٢I) + ٢أ$

$= ٩أ + ٦I + ٢أ$

$= ١١أ + ٦I$

$\therefore م\,أ + ل\,I = ١١أ + ٦I$

$\therefore$ م $= ١١$ ، ل $= ٦$

$\therefore$ م + ل $= ١٧$

(١١) بفرض أن: المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ -٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س + ٢ص \\ ع + ٢ل \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ -٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س + ٢ص = ٤ (١)

، ع + ٢ل = −٣ (٢)

، $\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ -٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} -س + ص \\ -ع + ل \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ -٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ −س + ص = −١ (٣)

، −ع + ل = −٣ (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٣):

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١

بحل المعادلتين (٢) ، (٤): $\therefore$ ع = ١ ، ل = −٢

$\therefore أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$

$\therefore أ \times \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$

(١٢) $\because أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{ن} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ن & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{ن} + (ن - ١)\,I$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ن & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ن - ١ & ٠ \\ ٠ & ن - ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ن & ٠ \\ ن & ن \end{pmatrix} = ن\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = ن\,أ$

(١٣) $\because أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore أ = أ^{٢} = أ^{٣} = ... = \square$

$\therefore (I + ٢أ + ٣أ^{٢} + ٤أ^{٣} + ...)$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -٣ \end{pmatrix}$

$+ ٣\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + ... = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix}$

(١٤) $\because أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٦ & ٠ \\ ٠ & ١٦ \end{pmatrix} = ١٦\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= ٢^{٤}\,I$

$\therefore أ^{٤٠} = (أ^{٢})^{٢٠} = (٢^{٤}I)^{٢٠} = ٢^{٨٠}\,I$

(١٥) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} جتا\,\theta & جا\,\theta \\ جا\,\theta & -جتا\,\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} جتا\,\theta & جا\,\theta \\ جا\,\theta & -جتا\,\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} جتا^{٢}\theta + جا^{٢}\theta & جتا\,\theta\,جا\,\theta - جا\,\theta\,جتا\,\theta \\ جا\,\theta\,جتا\,\theta - جتا\,\theta\,جا\,\theta & جا^{٢}\theta + جتا^{٢}\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

$\therefore أ^{٢٠١٩} = أ^{٢٠١٨} \times أ = (أ^{٢})^{١٠٠٩} \times أ$

$= I^{١٠٠٩} \times أ = I \times أ = أ$

٦

$س = (أ\,ب + أ\,ع)^{T} = [أ(ب + ع)]^{T}$

$= (ب + ع)^{T}\,أ^{T} = (ب^{T} + ع^{T})\,أ^{T}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٨ \\ ٣ & -٦ \end{pmatrix}$

٣

$\because س^{٢} = \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ١ & ب \end{pmatrix}\begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ١ & ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ^{٢} & ٠ \\ أ + ب & ب^{٢} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} أ^{٢} & ٠ \\ أ + ب & ب^{٢} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ١ & ب \end{pmatrix} = \square$

$\therefore \begin{pmatrix} أ^{٢} + أ & ٠ \\ أ + ب + ١ & ب^{٢} + ب \end{pmatrix} = \square$

$\therefore أ^{٢} + أ = ٠$

$\therefore أ(أ + ١) = ٠$ $\therefore$ أ = ٠ أو أ = −١

، أ + ب + ١ = ٠ (١)

، $ب^{٢} + ب = ٠$ $\therefore$ ب = ٠ أو ب = −١

$\therefore$ أ = ٠ ، ب = −١ لأنهما يحققان المعادلة (١)

أو ب = ٠ ، أ = −١ لأنهما يحققان المعادلة (١)

٤

$\because ع = ص^{T}\,س^{T} + س\,ص$

$\therefore ع^{T} = (ص^{T}\,س^{T} + س\,ص)^{T}$

$= (ص^{T}\,س^{T})^{T} + (س\,ص)^{T}$

$= س\,ص + ص^{T}\,س^{T} = ع$

$\therefore$ المصفوفة ع متماثلة

٥

$\because س = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$\therefore س^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

$\therefore س^{٢٠١٤} = (س^{٢})^{١٠٠٧} = I^{١٠٠٧} = I$

تطبيقات حياتية

1

تكاليف الوجبات $= \begin{pmatrix} ٢٠٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ١٢٠ & ٨٠ & ١٠٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦٥ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٤١٥٠ \\ ٨٦٢٠ \end{pmatrix}$

∴ تكاليف وجبة الغداء = ١٤١٥٠ جنيهًا

، تكاليف وجبة العشاء = ٨٦٢٠ جنيهًا

2

(١) $\begin{pmatrix} ٢٨ & ٦٤ & ٨ \\ ٣٥ & ٩٥ & ٢٠ \\ ٢٠ & ٨٠ & ١٥ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٦٠٠ \end{pmatrix}$

(٢) الدخل اليومي $= \begin{pmatrix} ٢٨ & ٦٤ & ٨ \\ ٣٥ & ٩٥ & ٢٠ \\ ٢٠ & ٨٠ & ١٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٦٠٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٤٠٦٠٠ \\ ٦٢٥٠٠ \\ ٥٠٠٠٠ \end{pmatrix}$

(٣) الدخل اليومي للشركة = ١٥٤١٠٠ جنيه

إرشادات تمارين 4

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (د)
(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (ب)
(١١) (د) (١٢) (ب) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (جـ)
(١٦) (جـ) (١٧) (ب) (١٨) (ب) (١٩) (جـ) (٢٠) (د)
(٢١) (د) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب) (٢٥) (د)
(٢٦) (د) (٢٧) (أ) (٢٨) (أ) (٢٩) (جـ) (٣٠) (د)
(٣١) (جـ) (٣٢) (جـ) (٣٣) (أ) (٣٤) (د) (٣٥) (د)
(٣٦) (جـ) (٣٧) (جـ) (٣٨) (جـ) (٣٩) (أ) (٤٠) (ب)
(٤١) (د) (٤٢) (جـ) (٤٣) (أ) (٤٤) (د) (٤٥) (جـ)
(٤٦) (د) (٤٧) (ب) (٤٨) (ب) (٤٩) (ب) (٥٠) (أ)
(٥١) (أ) (٥٢) (جـ) (٥٣) (د) (٥٤) (جـ) (٥٥) (ب)
(٥٦) (جـ) (٥٧) (جـ) (٥٨) (ب) (٥٩) (جـ) (٦٠) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

(١) $١ \times (-١) - ٣ \times ٢ = -٧$

(٢) $-\frac{٣}{٤} \times \frac{٨}{٩} + ١ \times \frac{٢}{٣} = ٠$

(٣) $(أ + س) \times ب - (ب + ص) \times أ = ب س - أ ص$

(٤) $(س + ١)(ص^٢ + ١) - (ص + ١)(س^٢ + ١)$

$= س ص^٢ + س + ص^٢ + ١ - س^٢ ص - ص - س^٢ - ١$

$= س ص^٢ + س + ص^٢ - س^٢ ص - ص - س^٢$

(٥) $١ \times ظا^٢ θ - قا θ \times قا θ = ظا^٢ θ - قا^٢ θ = -١$

(٦) $\frac{١}{جتا θ} \times \frac{١}{جتا θ} - (١ + ظا^٢ θ) = \frac{١}{جتا^٢ θ} - قا^٢ θ$

$= قا^٢ θ - قا^٢ θ$

$= ٠$

2

(١) ∵ $\begin{vmatrix} ٢س & -١ \\ ٢ & ٣س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٦س \\ س & ١ \end{vmatrix}$

$= ٢س \times ٣س - ٢ \times (-١)$

$+ ٣ \times ١ - س \times ٦س$

$= ٦س^٢ + ٢ + ٣ - ٦س^٢ = ٥$ (١)

، $\begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix} = ٣ \times (-٧) + ٢ \times ١٣$

$= ٥$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\begin{vmatrix} ٢س & -١ \\ ٢ & ٣س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٦س \\ س & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix}$

(٢) الطرف الأيمن

$= \begin{vmatrix} قا θ & ظا^٢ θ \\ ١ & قا θ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix}$

$= (قا θ \times قا θ - ١ \times ظا^٢ θ)$

$\times \left(٢ \times (-٧) - ٥ \times (-٣)\right)$

$= (قا^٢ θ - ظا^٢ θ) \times ١$

$= ١ \times ١ = ١$ = الطرف الأيسر

3

∵ $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix} = س ل - ع ص$

∴ $س ل - ع ص = ٣$

(١) $\begin{vmatrix} ٢س & ٥ص \\ ٢ع & ٥ل \end{vmatrix}$

$= ١٠ س ل - ١٠ ع ص = ١٠ (س ل - ع ص)$

$= ١٠ \times ٣ = ٣٠$

(٢) $\begin{vmatrix} س - ص & ٤ص \\ ع - ل & ٤ل \end{vmatrix}$

$= (س - ص) \times ٤ل - (ع - ل) \times ٤ص$

$= ٤ س ل - ٤ ص ل - ٤ ع ص + ٤ ص ل$

$= ٤ س ل - ٤ ع ص = ٤ (س ل - ع ص)$

$= ٤ \times ٣ = ١٢$

4

(١) $١ \begin{vmatrix} ٤ & ٤ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} +$ صفر

$= ٣٢ - ٢٨ + ١٦ - ٢١ = -١$

(٢) صفر − صفر + $١ \begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ ٧ & ٣٠ \end{vmatrix} = ٩١ - ٩٠ = ١$

(٣) $١ \begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٨ & ٩ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٤ & ٦ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix}$

$= ٤٥ - ٤٨ - ٢ (٣٦ - ٤٢) + ٣ (٣٢ - ٣٥)$

$= -٣ + ١٢ - ٩ = ٠$

(٤) $١ \begin{vmatrix} ١ & ت \\ -ت & ١ \end{vmatrix} -$ صفر $+ (١ + ت) \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ - ت & -ت \end{vmatrix}$

$= ١ + ت^٢ + (١ + ت)(ت - ١)$

$= ١ + ت^٢ + ت^٢ - ١$

$= ١ - ١ - ١ - ١ = -٢$

5

(١) ∵ $٣س \times (٢ - س) - ٢ \times (-٤) = -١$

∴ $٦س - ٣س^٢ + ٨ = -١$

∴ $٣س^٢ - ٦س - ٩ = ٠$

∴ $(٣س + ٣)(س - ٣) = ٠$

∴ $س = -١$ أو $س = ٣$

(٢) ∵ $(س^٢ - ١)(س^٢ - ١)$

$- (س + ١)(س + ١) = ٠$

∴ $(س^٢ - ١)^٢ - (س + ١)^٢ = ٠$

∴ $(س^٢ - ١ + س + ١)(س^٢ - ١ - س - ١) = ٠$

∴ $(س^٢ + س)(س^٢ - س - ٢) = ٠$

∴ $س (س + ١)(س - ٢)(س + ١) = ٠$

∴ $س = ٠$ أو $س = -١$ أو $س = ٢$

(٣) صفر $+ ١ \begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= ١٠$

∴ $٢س - ٦ + س (س - ٨) = ١٠$

∴ $٢س - ٦ + س^٢ - ٨س = ١٠$

∴ $س^٢ - ٦س - ١٦ = ٠$

∴ $(س - ٨)(س + ٢) = ٠$

∴ $س = ٨$ أو $س = -٢$

(٤) صفر − ٣ $\begin{vmatrix} ٠ & \text{س} \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ + س $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} \\ \text{س}+٣ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ −٣ (٣س − ٠) + س (س^{٢} + ٣س − ١) = ٠

∴ −٩س + س^{٣} + ٣س^{٢} − س = ٠

∴ س^{٣} + ٣س^{٢} − ١٠س = ٠

∴ س (س^{٢} + ٣س − ١٠) = ٠

∴ س (س + ٥) (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −٥ أو س = ٢

(٥) جا ٢٠° جتا ٧٠° + جا ٧٠° جتا ٢٠° = ٢س − ٣

جا ٢٠° جا ٢٠° + جتا ٢٠° جتا ٢٠° = ٢س − ٣

∴ جا^{٢} ٢٠° + جتا^{٢} ٢٠° = ٢س − ٣

∴ ١ = ٢س − ٣ ∴ س = ٢

٦

الطرف الأيمن = ٦س + ٣

الطرف الأيسر

= ٣ [−١ (٧ − ٥س) + ٢ (١٤ + ٥) + ٣ (٢س + ١)]

= ٣ [−٧ + ٥س + ٣٨ + ٦س + ٣]

= ٣ (١١س + ٣٤)

∴ ٦س + ٣ = ٣ (١١س + ٣٤)

∴ ٢س + ١ = ١١س + ٣٤

∴ ٩س = −٣٣ ∴ س = $\frac{-١١}{٣}$

٧

(١) م = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٤ & -٢ \\ ١ & -٢ & ٠ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ [(٤ − ٠) − (−٤ − ٠) + (٨ + ٨)]

= $\frac{١}{٢}$ (٤ + ٤ + ١٦) = ١٢

∴ مساحة Δ أ ب حـ = ١٢ وحدة مربعة

(٢) م = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ١ & -٤ & ١ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ [(١٦ − ٢) − (−١٢ − ٣) + (٦ + ١٢)]

= $\frac{١}{٢}$ (١٤ + ١٥ + ١٨) = ٢٣ $\frac{١}{٢}$

∴ مساحة Δ س ص ع = ٢٣.٥ وحدة مربعة

٨

(١) ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ١ & -١ & ٤ \\ ١ & -٧ & ٥ \end{vmatrix}$

= (−٢٨ + ٥) − (−٢١ − ٢٥) + (−٣ − ٢٠)

= −٢٣ + ٤٦ − ٢٣ = ٠

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

(٢) ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & -٢ & -٥ \end{vmatrix}$

= (٢ − ٠) − (−٦ + ١٠) + (٠ + ٢)

= ٢ − ٤ + ٢ = ٠

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

٩

(١) Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٦ = −١

Δس = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٨ \end{vmatrix}$ = ٢٥ − ٢٤ = ١

Δص = $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٨ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٨ − ١٠ = −٢

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{١}{-١}$ = −١

، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢

(٢) Δ = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = −٣ − ٤ = −٧

Δس = $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠ − ٢ = −٢

Δص = $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ − ٠ = ١

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{-٢}{-٧}$ = $\frac{٢}{٧}$ ،

، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = $\frac{-١}{٧}$

(٣) ∵ ٣س + ٤ص = ١

، ٥س − ٧ص = −١٢

∴ Δ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -٧ & ٥ \end{vmatrix}$ = −٢١ − ٢٠ = −٤١

Δس = $\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ -٧ & -١٢ \end{vmatrix}$ = −٧ + ٤٨ = ٤١

Δص = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ -١٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = −٣٦ − ٥ = −٤١

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{٤١}{-٤١}$ = −١

، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = $\frac{-٤١}{-٤١}$ = ١

١٠

(١) Δ = $\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٢ (٦ − ٨) − (٩ − ١٠) − ٢ (١٢ − ١٠)

= −٤ + ١ − ٤ = −٧

Δس = $\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ١٠ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٤ \end{vmatrix}$

= ١٠ (٦ − ٨) − (٣ − ٨) − ٢ (٤ − ٨)

= −٢٠ + ٥ + ٨ = −٧

Δص = $\begin{vmatrix} -٢ & ١٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٢ (٣ − ٨) − ١٠ (٩ − ١٠) − ٢ (١٢ − ٥)

= −١٠ + ١٠ − ١٤ = −١٤

Δع = $\begin{vmatrix} ١٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٢ (٨ − ٤) − (١٢ − ٥) + ١٠ (١٢ − ١٠)

= ٨ − ٧ + ٢٠ = ٢١

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{-٧}{-٧}$ = ١

، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = $\frac{-١٤}{-٧}$ = ٢

، ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$ = $\frac{٢١}{-٧}$ = −٣

(٢) Δ = $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ -٤ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

= (٢ + ١٢) − ٢ (−٤ + ١٦) − ٣ (٦ + ٤)

= ١٤ − ٢٤ − ٣٠ = −٤٠

Δس = $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٦ \\ -٤ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ١٤ \end{vmatrix}$

= ٦ (٢ + ١٢) − ٢ (−٤ + ٥٦) − ٣ (٦ + ١٤)

= ٨٤ − ١٠٤ − ٦٠ = −٨٠

Δص = $\begin{vmatrix} -٣ & ٦ & ١ \\ -٤ & ٢ & ٢ \\ -٢ & ١٤ & ٤ \end{vmatrix}$

= (−٤ + ٥٦) − ٦ (−٤ + ١٦) − ٣ (٢٨ − ٨)

= ٥٢ − ٧٢ − ٦٠ = −٨٠

Δع = $\begin{vmatrix} ٦ & ٢ & ١ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ١٤ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

= (−١٤ − ٦) − ٢ (٢٨ − ٨) + ٦ (٦ + ٤)

= −٢٠ − ٤٠ + ٦٠ = ٠

∴ س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ = $\frac{-٨٠}{-٤٠}$ = ٢

، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ = $\frac{-٨٠}{-٤٠}$ = ٢

، ع = $\frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$ = $\frac{٠}{-٤٠}$ = ٠

(٣) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٢ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٢(-٢ + ٢) - (٤ - ١) + ٣(-٤ + ١)$

$= ٠ - ٣ - ٩ = -١٢$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & ٣ \\ -٣ & -١ & ١ \\ -١١ & -٢ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٦(-٢ + ٢) - (-٦ + ١١) + ٣(٦ - ١١)$

$= ٠ - ٥ - ١٥ = -٢٠$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ٣ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & -١١ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٢(-٦ + ١١) - ٦(٤ - ١) + ٣(-٢٢ + ٣)$

$= ١٠ - ١٨ - ٥٧ = -٦٥$

$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٦ \\ ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & -٢ & -١١ \end{vmatrix}$

$= ٢(١١ - ٦) - (-٢٢ + ٣) + ٦(-٤ + ١)$

$= ١٠ + ١٩ - ١٨ = ١١$

∴ $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٢٠}{-١٢} = \frac{٥}{٣}$

، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٦٥}{-١٢} = \frac{٦٥}{١٢}$

، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{-١١}{١٢}$

(٤) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$

$= (٥ - ٠) - ٢(٢ - ٩) + صفر$

$= ٥ + ١٤ = ١٩$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$

$= ٢(٩ - ٢٠) - صفر + (٢٠ - ٦)$

$= -٢٢ + ١٤ = -١٩$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$

$= (٣ - ٠) - ٢(٤ - ١٢) + صفر$

$= ٣ + ١٦ = ١٩$

$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

$= (٢٠ - ٩) - ٢(٨ - ١٢) + صفر$

$= ١١ + ٨ = ١٩$

∴ $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-١٩}{١٩} = -١$

، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١٩}{١٩} = ١$

، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{١٩}{١٩} = ١$

(٥) أجب بنفسك

(٦) ٢ س + ٢ ص + ع = ٧

، س + ٥ ص + ٣ ع = ٤

، س − ٢ ص + ع = −١

أكمل الحل بنفسك.

(٧) س + ص + ٢ ع = ٥

، ص − ع = ٠ ، ٢ س − ٤ ع = −٢

أكمل الحل بنفسك.

١١

قيمة المحدد = ٥ (أب × ءحـ − أحـ × بء) − صفر + صفر

= ٥ (أب × ءحـ − أحـ × بء) (١)

، ∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{أب}{أحـ}$

∴ أب × ءحـ = أحـ × بء

∴ أب × ءحـ − أحـ × بء = صفر

بالتعويض في (١):

∴ قيمة المحدد = ٥ × صفر = صفر

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (جـ) (٦) (جـ) (٧) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) $|أ| = \begin{vmatrix} جتا θ & جا θ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = جتا θ - جا θ$

، $|ب| = \begin{vmatrix} جتا θ & -١ \\ جا θ & ١ \end{vmatrix} = جتا θ + جا θ$

∵ $|أب| = |أ| \, |ب| = \frac{١}{٢}$

∴ $(جتا θ - جا θ)(جتا θ + جا θ) = \frac{١}{٢}$

∴ $جتا^٢ θ - جا^٢ θ = \frac{١}{٢}$

∴ $جتا^٢ θ - (١ - جتا^٢ θ) = \frac{١}{٢}$

∴ $٢ جتا^٢ θ - ١ = \frac{١}{٢}$ ∴ $جتا^٢ θ = \frac{٣}{٤}$

∴ $جتا θ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ويرفض الحل السالب لأن $θ \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

∴ $θ = ٣٠°$ ∴ $θ = \frac{\pi}{٦}$

(٢) $٣ جا θ + جا^٢ θ - ٤ = صفر$

∴ $جا^٢ θ + ٣ جا θ - ٤ = ٠$

∴ $(جا θ + ٤)(جا θ - ١) = صفر$

∴ جا θ = −٤ (مرفوض) أو جا θ = ١

∴ $θ = \frac{\pi}{٢}$

(٣) جا س قتا س ظا س = ١

∴ $جا س \times \frac{١}{جا س} \times ظا س = ١$

∴ ظا س = ١ ∴ س = ٤٥° أو ٢٢٥°

(٤) ∵ $\begin{vmatrix} -١ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

$= -١(٢ - ١) - ٥(٢ - ٣) + ١(٢ - ٦) = صفر$

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

(٥) $\left(ك + \frac{١}{ك}\right)^٢ - ١ = ١٥$

∴ $\left(ك + \frac{١}{ك}\right)^٢ = ١٦$

∴ $ك^٢ + \frac{١}{ك^٢} + ٢ = ١٦$

∴ $ك^٢ + \frac{١}{ك^٢} = ١٤$

(٦) ∵ $\begin{vmatrix} ٥ س + ١٤ & -٢ \\ ٧ س + ٨ & س \end{vmatrix} \le ١$

∴ $٥ س^٢ + ١٤ س + ١٤ س + ١٦ \le ١$

∴ $٥ س^٢ + ٢٨ س + ١٥ \le ٠$

∴ $(٥ س + ٣)(س + ٥) \le ٠$

∴ مجموعة حل المتباينة هي $[-٥ ، \frac{-٣}{٥}]$

∴ قيم س الصحيحة هي −٥ ، −٤ ، −٣ ، −٢ ، −١

∴ عدد قيم س الصحيحة = ٥

(٧) ∵ $\begin{vmatrix} أ جا س & ٠ & ٠ \\ ١ & أ جتا س & ٠ \\ قا س & قتا س & أ ظا س \end{vmatrix}$

$= -أ^٣ جتا^٢ س + ٨$

∴ أ جا س × أ جتا س × أ ظا س

$= -أ^٣ جتا^٢ س + ٨$

$أ^٣ جا س جتا س \times \frac{جا س}{جتا س} = -أ^٣ جتا^٢ س + ٨$

∴ $أ^٣ جا^٢ س + أ^٣ جتا^٢ س = ٨$

∴ $أ^٣ (جا^٢ س + جتا^٢ س) = ٨$

∴ $أ^٣ = ٨$ ∴ أ = ٢

٢

∵ أ(٠ ، ٨)

، ب(٦ ، ٠)

، حـ(٣ ، ٢)

$$\therefore هـ = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٠ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢}(١٢ + ٢٤ - ٤٨) = -٦$$

∴ مساحة △ أ ب حـ = |−٦| = ٦ وحدة مربعة

، ∵ مساحة △ أ ب و = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ وحدة مربعة

∴ مساحة الشكل المظلل = ٢٤ − ٦ = ١٨ وحدة مربعة

حل آخر :

∵ △ و ب حـ فيه و(٠ ، ٠) ، ب(٦ ، ٠) ، حـ(٣ ، ٢)

$$\therefore هـ = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٦ & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢}(١ \times ١٢) = ٦$$

∴ مساحة △ و ب حـ = ٦ وحدة مربعة

، ∵ △ و أ حـ فيه و(٠ ، ٠) ، أ(٠ ، ٨) ، حـ(٣ ، ٢)

$$\therefore هـ = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٨ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢}(١ \times -٢٤) = -١٢$$

∴ مساحة △ و أ حـ = |−١٢| = ١٢ وحدة مربعة

∴ مساحة الشكل = ٦ + ١٢ = ١٨ وحدة مربعة

٣

∵ ٢ س − ص = ١ ، ٣ ص − ٢ ع = ١

، ٣ ع − س = ٢

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٩ − ٠) + (٠ − ٢) + صفر = ١٨ − ٢ = ١٦

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$$

= (٩ − ٠) + (٣ + ٤) + صفر = ٩ + ٧ = ١٦

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٣ + ٤) − (٠ − ٢) + صفر

= ١٤ + ٢ = ١٦

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ -١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٦ − ٠) + (٠ + ١) + (٠ + ٣)

= ١٢ + ١ + ٣ = ١٦

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١٦}{١٦} = ١$$

$$، ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١٦}{١٦} = ١$$

$$، ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{١٦}{١٦} = ١$$

تطبيقات حياتية

١

نفرض أن سعر الكشكول = س جنيه

، سعر الكتاب = ص جنيه

∴ ٣ س + ٢ ص = ٨٥

، ٢ س + ٤ ص = ١١٠

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ٤ = ٨$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٨٥ & ٢ \\ ١١٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٣٤٠ - ٢٢٠ = ١٢٠$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & ٨٥ \\ ٢ & ١١٠ \end{vmatrix} = ٣٣٠ - ١٧٠ = ١٦٠$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١٢٠}{٨} = ١٥$$

$$، ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١٦٠}{٨} = ٢٠$$

∴ سعر الكشكول = ١٥ جنيهًا ، سعر الكتاب = ٢٠ جنيهًا

5 إرشادات تمارين

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)
(٥) (ب)	(٦) (د)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (د)	(١٠) (أ)	(١١) (د)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (جـ)	(١٦) (ب)
(١٧) (د)	(١٨) (جـ)	(١٩) (أ)	(٢٠) (د)
(٢١) (د)	(٢٢) (د)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (د)	(٢٨) (ب)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (أ)	(٣١) (د)	
(٣٢) أولًا : (د)		ثانيًا : (ب)	
(٣٣) (د)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (ب)	(٣٦) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$$(١) \because \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = ٢ + ١ = ٣$$

$$\therefore \text{المعكوس الضربي} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \end{pmatrix}$$

$$(٢) \because \Delta = \begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ - ٠ = -٤$$

$$\therefore \text{المعكوس الضربي} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{-٤}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$$

$$(٣) \because \Delta = \begin{vmatrix} س & -ص \\ س & -ص \end{vmatrix} = -س ص + س ص = ٠$$

∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربي

٢

(١) المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربي عندما Δ = ٠

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} أ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٣أ - ٦ = ٠$$

∴ ٣أ = ٦ ∴ أ = ٢

∴ المصفوفة يكون لها معكوس ضربي عندما

أ ∈ ح − {٢}

(٢) المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربي عندما Δ = ٠

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{vmatrix} = أ^{٢} - ٣٦ = ٠$$

∴ أ² = ٣٦ ∴ أ = ±٦

∴ المصفوفة يكون لها معكوس ضربي عندما

أ ∈ ح − {−٦ ، ٦}

(٣) المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربي عندما Δ = ٠

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} أ & ٤ \\ ٣ & أ - ١ \end{vmatrix} = أ^{٢} - أ - ١٢ = ٠$$

∴ (أ − ٤) (أ + ٣) = ٠

∴ أ = ٤ ، أ = −٣

∴ المصفوفة يكون لها معكوس ضربي عندما

أ ∈ ح − {٤ ، −٣}

(٤) المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربي عندما Δ = ٠

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} أ - ١ & -٢ \\ ١ & أ - ٢ \end{vmatrix} = أ^{٢} - ٣أ + ٢ + ٢ = ٠$$

∴ أ² − ٣أ + ٤ = ٠

∴ المصفوفة يكون لها معكوس ضربي عندما

أ ∈ ح

(٥) المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربي عندما $\Delta = 0$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 8 & \text{أ} - 3 \\ \text{أ} + 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 - \text{أ}^2 + 9 = 0$

$\therefore \text{أ}^2 - 25 = 0 \qquad \therefore (\text{أ} - 5)(\text{أ} + 5) = 0$

$\therefore \text{أ} = 5$ أو $\text{أ} = -5$

$\therefore$ المصفوفة لها معكوس ضربي عندما

$\text{أ} \in \text{ح} - \{5 ، -5\}$

(٦) المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربي عندما $\Delta = 0$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ت} \\ \text{ت} & -1 \end{vmatrix} = -\text{أ} - \text{ت}^2 = 0$

$\therefore -\text{أ} + 1 = 0 \qquad \therefore \text{أ} = 1$

$\therefore$ المصفوفة لها معكوس ضربي عندما

$\text{أ} \in \text{ح} - \{1\}$

٣

$\because$ المصفوفة ليس لها معكوس ضربي

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} \text{س} & 27 \\ 3 & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^2 - 81 = 0$

$\therefore (\text{س} - 9)(\text{س} + 9) = 0$

$\therefore \text{س} = 9$ أو $\text{س} = -9$

$\therefore$ المصفوفة ليس لها معكوس ضربي عندما

$\text{س} = 9$ أو $\text{س} = -9$

٤

$\because \text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 - 5 & -3 + 3 \\ 10 - 10 & -5 + 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\therefore$ المصفوفة ب معكوس ضربي للمصفوفة أ

٥

$\because \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$

$\therefore \text{س}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

٦

$\because \Delta = \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{س ص} \\ 0 & \text{ص} \end{vmatrix} = \text{س ص} - 0 = \text{س ص}$

$\therefore \text{ب}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س ص} \\ 0 & \text{س} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\text{س ص}} \begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س ص} \\ 0 & \text{س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\text{ص}} \end{pmatrix}$

٧

(١) $\because \text{س ص} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{س ص}| = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 11 = 4$

$\therefore (\text{س ص})^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ (١)

، $\because |\text{س}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$

$\therefore \text{س}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

، $\because |\text{ص}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$

$\therefore \text{ص}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ص}^{-1}\text{س}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢):

$\therefore (\text{س ص})^{-1} = \text{ص}^{-1}\text{س}^{-1}$

(٢) $\because |\text{س}^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$\therefore (\text{س}^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{س}^{-1})^{-1} = \text{س}$

(٣) $\because \text{س}^{-1}\text{ص} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{س}^{-1}\text{ص}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= -3 + 4 = 1$

$\therefore (\text{س}^{-1}\text{ص})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (١)

، $\because \text{ص}^{-1}\text{س} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢):

$\therefore (\text{س}^{-1}\text{ص})^{-1} = \text{ص}^{-1}\text{س}$

٨

$\because \text{أ}^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{أ}^{t}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$

$\therefore (\text{أ}^{t})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (١)

$\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$

$\therefore (\text{أ}^{-1}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{أ}^{-1})^{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢): $\therefore (\text{أ}^{t})^{-1} = (\text{أ}^{-1})^{t}$

٩

$\because |\text{أ}| = 8 - \text{س ص}$ ، $\because \text{س ص} = 7$

$\therefore |\text{أ}| = 8 - 7 = 1$

$\therefore \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\text{س} \\ -\text{ص} & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ} + \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \text{س} \\ \text{ص} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -\text{س} \\ -\text{ص} & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$

١٠

$\because \text{أ}\text{ب} = I \qquad \therefore \text{أ} = \text{ب}^{-1}$

$\therefore |\text{ب}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$

$\therefore \text{أ} = \text{ب}^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

١١

(١) بفرض أن: $\text{ب} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

∵ $\text{أب} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ∴ $\text{أ} = \text{ب}^{-1}$

∴ $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$

∴ $\text{أ} = \text{ب}^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(٢) بفرض أن: $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ} = \text{ب}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

∴ $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

∴ $\text{ب}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

١٢

∵ $\text{أب} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ∴ $\text{ب} = \text{أ}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

∴ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

∴ $\text{ب} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

١٣

∵ $(\text{أب})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$

∴ $\text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$

∴ $\text{ب}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}\text{أ}$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

١٤

(١) ∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ج}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ١

(٢) ∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ج}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 7 = 1$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴ س = ٥ ، ص = ١

(٣) ∵ ٣ س + ٢ ص = ١ ، س − ٣ ص = −٧

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ج}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

∴ س = −١ ، ص = ٢

(٤) ∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ج}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\frac{7}{6}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ س = ٤ ، ص = ٣

١٥

نفرض أن العددين هما: س ، ص

∴ س + ص = ١٠ ، س − ص = ٤

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ج}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ س = ٧ ، ص = ٣ ∴ العددان هما: ٧ ، ٣

١٦

نفرض أن العدد الأكبر = س ، العدد الأصغر = ص

∴ س − ص = ٤ ، س + ٢ ص = ١٣

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ج}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ س = ٧ ، ص = ٣ ∴ العددان هما: ٧ ، ٣

١٧

∵ ٣ جذر المعادلة ∴ ٩أ + ٣ب − ٣ = ٠

∴ ٩أ + ٣ب = ٣

، ∵ −١ جذر المعادلة ∴ أ − ب − ٣ = ٠

∴ أ − ب = ٣

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٣ \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ع}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٩ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = -٩ - ٣ = -١٢$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{-١}{١٢}\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١٢} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{-٣}{٤} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١٢} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{-٣}{٤} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$

∴ أ = ١ ، ب = −٢

١٨

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ∴ ٩أ + ٣ب = ٠

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٤ ، ٨)

∴ ١٦أ + ٤ب = ٨

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ١٦ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٨ \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ع}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٩ & ٣ \\ ١٦ & ٤ \end{vmatrix} = ٣٦ - ٤٨ = -١٢$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{-١}{١٢}\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -١٦ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٣} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & \frac{-٣}{٤} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٣} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & \frac{-٣}{٤} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٦ \end{pmatrix}$

∴ أ = ٢ ، ب = −٦

١٩

∵ الخط المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٥)

∴ ٥ + أ = حـ ∴ أ − حـ = −٥

، ∵ الخط المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ١)

∴ ١ + ٢أ = حـ ∴ ٢أ − حـ = −١

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{حـ} \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} -٥ \\ -١ \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ع}$

∴ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ + ٢ = ١$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{حـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٥ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٩ \end{pmatrix}$

∴ أ = ٤ ، حـ = ٩

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (د)

(٤) أولًا: (ب) ثانيًا: (أ) (٥) (ب)

(٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (أ)

إرشادات الحل:

(١) نفرض $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{س} \\ -\text{س} & \text{صفر} \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{١}{\text{س}^٢}\begin{pmatrix} \text{صفر} & -\text{س} \\ \text{س} & \text{صفر} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{صفر} & -\frac{١}{\text{س}} \\ \frac{١}{\text{س}} & \text{صفر} \end{pmatrix}$

وهي مصفوفة شبه متماثلة

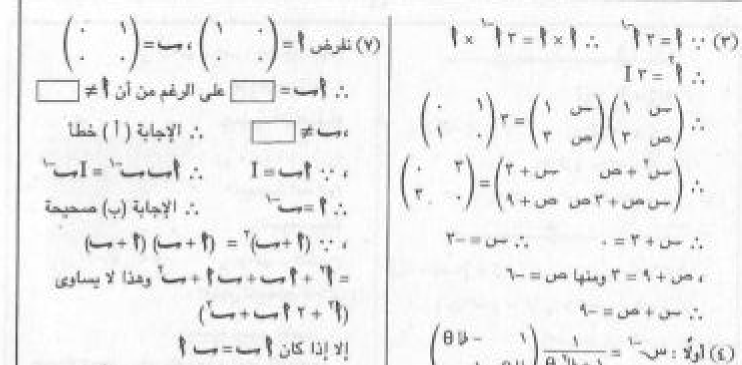
(٢) ∵ أ مصفوفة شبه متماثلة على النظم ٣ × ٣

∴ $\text{أ} = -\text{أ}^{\text{مد}}$

∴ $|\text{أ}| = |-\text{أ}^{\text{مد}}| = -|\text{أ}^{\text{مد}}| = -|\text{أ}|$

∴ |أ| = صفر

∴ أ^{-1} غير موجودة



(٣) ∵ $\text{أ} = ٢\text{أ}^{-1}$ ∴ $\text{أ} \times \text{أ} = ٢\text{أ}^{-1} \times \text{أ}$

∴ $\text{أ}^٢ = ٢I$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} & ١ \\ \text{ص} & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} & ١ \\ \text{ص} & ٣ \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س}^٢ + \text{ص} & \text{س} + ٣ \\ \text{س ص} + ٣\text{ص} & \text{ص} + ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ س + ٣ = ٠ ∴ س = −٣

، ص + ٩ = ٣ ومنها ص = −٦

∴ س + ص = −٩

(٤) أولًا: $\text{س}^{-1} = \frac{١}{١ + \text{ظا}^٢\theta}\begin{pmatrix} ١ & -\text{ظا}\,\theta \\ \text{ظا}\,\theta & ١ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{\text{قا}^٢\theta}\begin{pmatrix} ١ & -\text{ظا}\,\theta \\ \text{ظا}\,\theta & ١ \end{pmatrix} = \text{جتا}^٢\theta\ \text{س}^{\text{مد}}$

ثانيًا: ∵ $\text{س}^{\text{مد}}\,\text{س}^{-1} = I$ ∴ $\text{س}^{\text{مد}} = \text{س}$

∴ $\begin{pmatrix} ١ & -\text{ظا}\,\theta \\ \text{ظا}\,\theta & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & \text{ظا}\,\theta \\ -\text{ظا}\,\theta & ١ \end{pmatrix}$

∴ ظا θ = −ظا θ ∴ ٢ ظا θ = ٠

∴ ظا θ = ٠ ∴ θ = صفر

(٥) ∵ $\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٥I =$ ☐

∴ $\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦I = I$

∴ $\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦I^٢ = I$

∴ $(\text{س} + ٢I)(\text{س} + ٣I) = I$

∴ (س + ٣I) هي المعكوس الضربي للمصفوفة (س + ٢I)

(٦) ∵ $\text{أ}^٢ - \text{أ} + I =$ ☐

∴ $\text{أ}^٢ = \text{أ} - I$ بالضرب في أ^{-1}

∴ $\text{أ}^٢\,\text{أ}^{-1} = \text{أ}\,\text{أ}^{-1} - I\,\text{أ}^{-1}$

∴ $\text{أ} = I - \text{أ}^{-1}$ ∴ $\text{أ}^{-1} = I - \text{أ}$

∴ المعكوس الضربي للمصفوفة أ هي I − أ

(٧) نفرض $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

∴ أب = ☐ على الرغم من أن أ ≠ ☐

، ب ≠ ☐ ∴ الإجابة (أ) خطأ

، ∵ أب = I ∴ $\text{أ ب ب}^{-1} = I\,\text{ب}^{-1}$

∴ $\text{أ} = \text{ب}^{-1}$ ∴ الإجابة (ب) صحيحة

، ∵ $(\text{أ} + \text{ب})^٢ = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

$= \text{أ}^٢ + \text{أب} + \text{بأ} + \text{ب}^٢$ وهذا لا يساوي

$(\text{أ}^٢ + ٢\text{أب} + \text{ب}^٢)$

إلا إذا كان أب = بأ

أي أن الإجابة (جـ) ليست صحيحة دائمًا

∴ الإجابة الصحيحة هي ٢ فقط (د)

(٨) ∵ $\text{أ} = \text{أ}^{-1}$ ∴ $\text{أ} \times \text{أ} = \text{أ} \times \text{أ}^{-1}$

∴ $\text{أ}^٢ = I$ ∴ (١) صحيحة دائمًا.

∴ $|\text{أ}^٢| = ١$ ∴ $|\text{أ}| = \pm ١$

∴ (٢) ليست صحيحة دائمًا.

، ليس من الضروري أن تكون المصفوفة قطرية لكي تحقق أن $\text{أ} = \text{أ}^{-1}$ حيث أن:

$\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ مثلًا ليست قطرية وتحقق ذلك.

∴ (٣) ليست صحيحة دائمًا.

تطبيقات حياتية

١

نفرض أن سعر الكتاب العلمي = س جنيه

، سعر الكتاب التاريخي = ص جنيه

∴ ٥س + ٤ص = ١٢٠ ، ٥س + ١٠ص = ١٥٠

∴ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} ١٢٠ \\ ١٥٠ \end{pmatrix}$

، ∵ س = أ⁻¹ ج

∴ $\Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix} = ٥٠ - ٢٠ = ٣٠$

∴ $أ^{-1} = \frac{١}{٣٠}\begin{pmatrix} ١٠ & -٤ \\ -٥ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{٢}{١٥} \\ -\frac{١}{٦} & \frac{١}{٦} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{٢}{١٥} \\ -\frac{١}{٦} & \frac{١}{٦} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٢٠ \\ ١٥٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢٠ ، ص = ٥

∴ سعر الكتاب العلمي = ٢٠ جنيهًا

، سعر الكتاب التاريخي = ٥ جنيهات

٢

نفرض أن سعر كيلو جرام الدقيق = س جنيه

، نفرض أن سعر كيلو جرام الزبد = ص جنيه

∴ ٨ س + ٢ ص = ١٤٠

، ٤ س + ٣ ص = ١٧٠

∴ $أ = \begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ١٧٠ \end{pmatrix}$

، ∵ س = أ⁻¹ ج

∴ $\Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢٤ - ٨ = ١٦$

∴ $أ^{-1} = \frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & -\frac{١}{٨} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & -\frac{١}{٨} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ١٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥٠ \end{pmatrix}$

∴ س = ٥ ، ص = ٥٠

∴ سعر كيلو جرام الدقيق = ٥ جنيهات

، سعر كيلو جرام الزبد = ٥٠ جنيهًا

٣

نفرض أن سعر لتر البنزين = س جنيه

، نفرض أن سعر لتر الزيت = ص جنيه

∴ ٢٤ س + ٥ ص = ٥٦

، ١٨ س + ١٠ ص = ٦٧

∴ $أ = \begin{pmatrix} ٢٤ & ٥ \\ ١٨ & ١٠ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٥٦ \\ ٦٧ \end{pmatrix}$

، ∵ س = أ⁻¹ ج

∴ $\Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٢٤ & ٥ \\ ١٨ & ١٠ \end{vmatrix} = ٢٤٠ - ٩٠ = ١٥٠$

∴ $أ^{-1} = \frac{١}{١٥٠}\begin{pmatrix} ١٠ & -٥ \\ -١٨ & ٢٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١٥} & -\frac{١}{٣٠} \\ -\frac{٣}{٢٥} & \frac{٤}{٢٥} \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١٥} & -\frac{١}{٣٠} \\ -\frac{٣}{٢٥} & \frac{٤}{٢٥} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥٦ \\ ٦٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١\frac{١}{٢} \\ ٤ \end{pmatrix}$

∴ س = $١\frac{١}{٢}$ ، ص = ٤

∴ سعر لتر البنزين = $١\frac{١}{٢}$ جنيه

، سعر لتر الزيت = ٤ جنيهات

ارشادات الوحدة الثانية

ارشادات تمارين 6

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (ج)	(٣) (أ)	(٤) (ب)	(٥) (ج)
(٦) (د)	(٧) (ب)	(٨) (أ)	(٩) (ج)	(١٠) (ب)
(١١) (أ)	(١٢) (د)	(١٣) (د)	(١٤) (أ)	(١٥) (أ)
(١٦) (ب)	(١٧) (د)	(١٨) (ب)	(١٩) (ج)	(٢٠) (د)
(٢١) (د)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ج)	(٢٤) (ج)	(٢٥) (د)
(٢٦) (ج)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (ج)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (ج)
(٣١) (د)	(٣٢) (أ)	(٣٣) (أ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (أ)
(٣٦) (ج)	(٣٧) (أ)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ ٢ س − ٣ ≤ ٥ ∴ ٢ س ≤ ٨

∴ س ≤ ٤ ∴ م.ح =]−∞ ، ٤]

(٢) ∵ ٤ − ٢ س ≤ ٦ ∴ −٢ س ≤ ٢

∴ س ≥ −١ ∴ م.ح = [−١ ، ∞[

(٣) ∵ ٣ س − ٩ > ٦ س

∴ ٣ س − ٦ س > ٩ ∴ −٣ س > ٩

∴ س < −٣ ∴ م.ح =]−∞ ، −٣[

(٤) ∵ ٦ + س < ٣ س + ٢ ≤ ١٤ + س

∴ ٦ < ٢ س + ٢ ≤ ١٤

∴ ٤ < ٢ س ≤ ١٢ ∴ ٢ < س ≤ ٦

∴ م.ح =]٢ ، ٦]

(٥) ∵ ٢ س − ١ < س + ٢ < ٣ س + ٧

وبتجزئة المتباينة إلى متباينتين

∴ ٢ س − ١ < س + ٣

∴ س − ١ < ٣ ∴ س < ٤ (١)

، س + ٢ < ٣ س + ٧

∴ ٣ < ٢ س + ٧ ∴ −٤ < ٢ س

∴ س > −٢ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ م.ح =]−٢ ، ٤[

٢

(١) نرسم المستقيم الحدى

ل : ٢ س − ص = ٦

(بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين

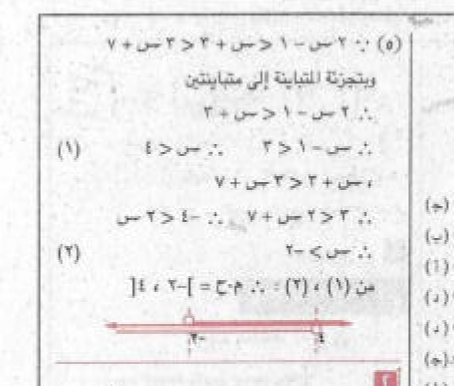
(٣ ، ٠) ، (٠ ، −٦)

وبالتعويض بالنقطة

(٠ ، ٠) نجد أنها

لا تحقق المتباينة : ٢ س − ص ≤ ٦

∴ مجموعة حل المتباينة هي المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الأصل وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.



(٢) نرسم المستقيم الحدى

ل : س + ص = ٣

(بخط متقطع)

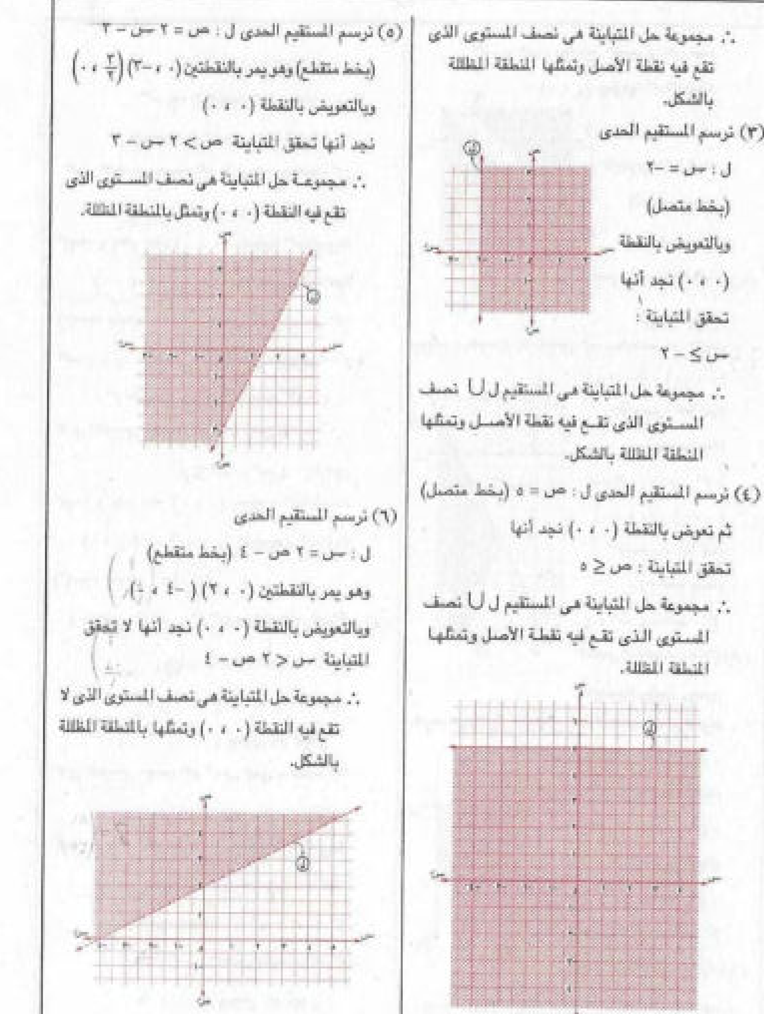
وهو يمر بالنقطتين

(٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

وبالتعويض بالنقطة

(٠ ، ٠) نجد أنها

تحقق المتباينة : س + ص < ٣



∴ مجموعة حل المتباينة هي نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٣) نرسم المستقيم الحدى

ل : س = −٢

(بخط متصل)

وبالتعويض بالنقطة

(٠ ، ٠) نجد أنها

تحقق المتباينة :

س ≥ −٢

∴ مجموعة حل المتباينة هي المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٤) نرسم المستقيم الحدى ل : ص = ٥ (بخط متصل)

ثم نعوض بالنقطة (٠ ، ٠) نجد أنها

تحقق المتباينة : ص ≤ ٥

∴ مجموعة حل المتباينة هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل وتمثلها المنطقة المظللة.

(٥) نرسم المستقيم الحدى ل : ص = ٢ س − ٣

(بخط متقطع) وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −٣) $\left(\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$

وبالتعويض بالنقطة (٠ ، ٠)

نجد أنها تحقق المتباينة ص > ٢ س − ٣

∴ مجموعة حل المتباينة هى نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (٠ ، ٠) وتمثل بالمنطقة المظللة.

(٦) نرسم المستقيم الحدى

ل : س = ٢ ص − ٤ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) (−٤ ، ٠)

وبالتعويض بالنقطة (٠ ، ٠) نجد أنها لا تحقق المتباينة س < ٢ ص − ٤

∴ مجموعة حل المتباينة هى نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٠ ، ٠) وتمثلها بالمنطقة المظللة بالشكل.

(٧) نرسم المستقيم

الحدى ل : ص = ٢ س

(بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين

(٠ ، ٠) ، (١ ، ٢)

وبالتعويض بالنقطة

(١ ، ٠) نجد أنها تحقق المتباينة : ص ≤ ٢ س

∴ مجموعة حل المتباينة هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (١ ، ٠) وتمثل بالمنطقة المظللة بالشكل.

(٨) نرسم المستقيمين الحديين

$ل_١$: س = −٢ (بخط متقطع)

، $ل_٢$: س = ٤ (بخط متصل)

فتكون مجموعة حل المتباينة : −٢ < س ≤ ٤ يمثلها المنطقة المحصورة بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ بالإضافة إلى المستقيم $ل_٢$ وهى المنطقة المظللة بالشكل.

(٩) نرسم المستقيمين الحديين

$ل_١$: ص = −١ (بخط متصل)

، $ل_٢$: ص = ٢ (بخط متصل)

فتكون مجموعة حل المتباينة : −١ ≤ ص ≤ ٢ يمثلها المنطقة المحصورة بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ بالأضافة إلى المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ وهى المنطقة المظللة بالشكل.

٣

(١) نرسم المستقيمين الحديين

$ل_١$: س = ١

(بخط متصل)

، $ل_٢$: ص = ٣

(بخط متقطع)

فتكون س~ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٢) نرسم المستقيمين الحديين

$ل_١$: س − ٢ = ٠

أى س = ٢

(بخط متقطع)

، $ل_٢$: ص = ١

(بخط متقطع)

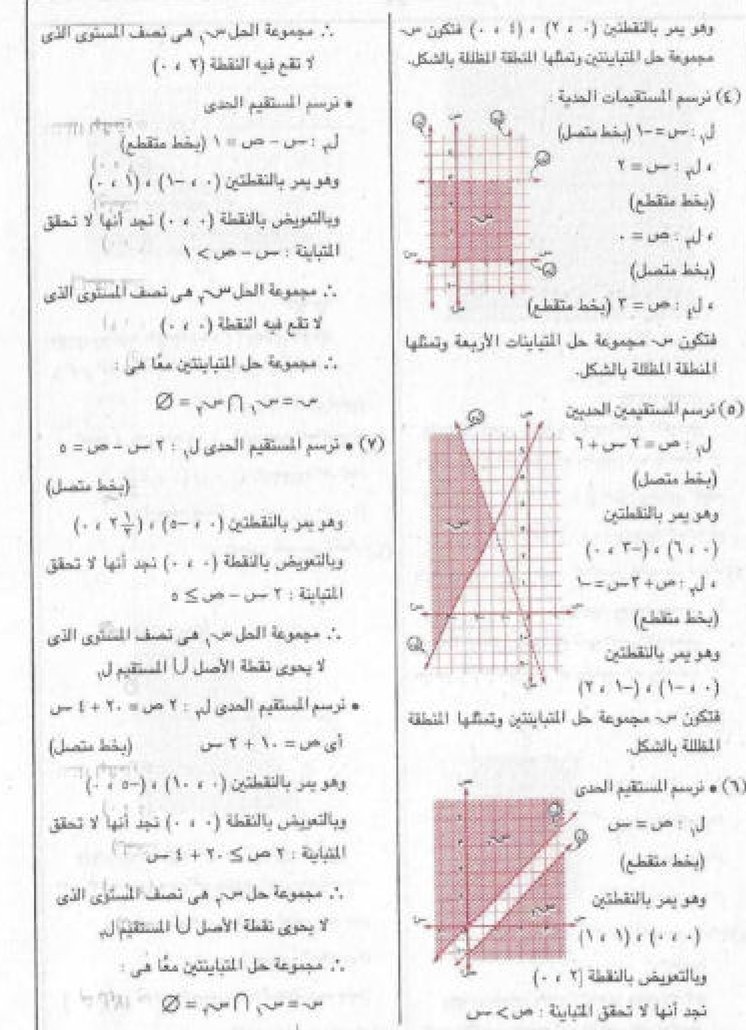
فتكون س~ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٣) نرسم المستقيمين الحديين

$ل_١$: س = ٠

(بخط متصل)

، $ل_٢$: س + ٢ ص = ٤ (بخط متقطع)



وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٤ ، ٠) فتكون سـ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٤) نرسم المستقيمات الحدية :

ل١ : س = −١ (بخط متصل)

، ل٢ : س = ٢ (بخط متقطع)

، ل٣ : ص = ٠ (بخط متصل)

، ل٤ : ص = ٣ (بخط متقطع)

فتكون سـ مجموعة حل المتباينات الأربعة وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٥) نرسم المستقيمين الحديين

ل١ : ص = ٢ س + ٦ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (−٣ ، ٠)

، ل٢ : ص + ٢ س = −١ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (−١ ، ٢)

فتكون سـ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٦) • نرسم المستقيم الحدى

ل١ : ص = س (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

وبالتعويض بالنقطة (٢ ، ٠) نجد أنها لا تحقق المتباينة : ص > س

∴ مجموعة الحل سـ١ هى نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٢ ، ٠)

• نرسم المستقيم الحدى

ل٢ : س − ص = ١ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (١ ، ٠)

وبالتعويض بالنقطة (٠ ، ٠) نجد أنها لا تحقق المتباينة : س − ص > ١

∴ مجموعة الحل سـ٢ هى نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٠ ، ٠)

∴ مجموعة حل المتباينتين معًا هى :

سـ = سـ١ ∩ سـ٢ = ∅

(٧) • نرسم المستقيم الحدى ل١ : ٢ س − ص = ٥ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −٥) ، (٢½ ، ٠)

وبالتعويض بالنقطة (٠ ، ٠) نجد أنها لا تحقق المتباينة : ٢ س − ص ≥ ٥

∴ مجموعة الحل سـ١ هى نصف المستوى الذى لا يحوى نقطة الأصل ∪ المستقيم ل١

• نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٢ ص = ٢٠ + ٤ س

أى ص = ١٠ + ٢ س (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٠) ، (−٥ ، ٠)

وبالتعويض بالنقطة (٠ ، ٠) نجد أنها لا تحقق المتباينة : ٢ ص ≥ ٢٠ + ٤ س

∴ مجموعة حل سـ٢ هى نصف المستوى الذى لا يحوى نقطة الأصل ∪ المستقيم ل٢

∴ مجموعة حل المتباينتين معًا هى :

سـ = سـ١ ∩ سـ٢ = ∅

(٨) نرسم المستقيمين الحديين

ل١ : س + ص = ٣ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)

، ل٢ : س − ص = ١ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (١ ، ٠)

فتكون سـ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٩) نرسم المستقيمين الحديين

ل١ : س = ١ (بخط متقطع)

، ل٢ : س + ص = −١ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (−١ ، ٠)

فتكون سـ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(١٠) نرسم المستقيمين الحديين

ل١ : ص = س + ١ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠)

، ل٢ : ص = س − ١ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (١ ، ٠)

فتكون سـ مجموعة حل المتباينتين وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

٤

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلها وس⟷ ∪ وص⟷ ∪ الربع الأول

ثم نرسم المستقيم الحدى ل : س + ص = ٥ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠)

فتكون سـ مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٢) نرسم المستقيمات الحدية :

ل١ : س = ٤ (بخط متصل)

، ل٢ : ص = س + ٢ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (−٢ ، ٠)

، ل٣ : س + ٢ ص = −٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (−٢ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٣) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما $\overleftrightarrow{وس}$ ∪ $\overleftrightarrow{وص}$ ∪ الربع الأول ثم نرسم المستقيمين الحديين

ل١ : ص = ٧ − ٢ س (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٧) ، $\left(٣\frac{١}{٢} ، ٠\right)$

، ل٢ : س + ٢ ص = ٨ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٤) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما $\overleftrightarrow{وس}$ ∪ $\overleftrightarrow{وص}$ ∪ الربع الأول ثم نرسم المستقيمين الحديين

ل١ : ٢ س + ص = ٦ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

، ل٢ : ص + س = ٤ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٥) نرسم المستقيمات الحدية :

ل١ : ص − س = ٠ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢)

، ل٢ : ٢ س + ٢ ص = ١٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠)

، ل٣ : ص = ٦ + ٢ س (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (−٣ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٦) نرسم المستقيمات الحدية

ل١ : س + ٤ ص = ٤ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٤ ، ٠)

، ل٢ : ٤ س + ص = ٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (١ ، −٢)

، ل٣ : س − ص = ١ (بخط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −١) ، (١ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٧) نرسم المستقيمات الحدية

ل١ : س = ٠ (بخط متصل)

، ل٢ : س = ٥ (بخط متصل)

، ل٣ : ص = ٠ (بخط متصل)

، ل٤ : ص = ٣ (بخط متصل)

، ل٥ : س = ص − ١ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (−١ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٨) نرسم المستقيمات الحدية

ل١ : س = ٤ (بخط متصل)

، ل٢ : ص = ٦ (بخط متصل)

، ل٣ : ٢ ص − س = ٢ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (−٢ ، ٠)

، ل٤ : ص + ٢ س = ٦ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٩) نرسم المستقيمات الحدية

ل١ : س + ٤ ص = ٨ (بخط متقطع)

ويمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٤ ، ١)

، ل٢ : س − ٢ ص = ٦ (بخط متقطع)

ويمر بالنقطتين (٠ ، −٣) ، (٦ ، ٠)

، ل٣ : س = ٠ (بخط متصل)

، ل٤ : س = ٤ (بخط متقطع)

فتكون ح مجموعة حل المتباينات وتمثلها المنطقة المظللة بالشكل.

(٢) س > ٠ ، مجموعة حلها لا تقع في الربع الثاني أو الثالث

(٣) إذا كان مجموعة حل المتباينة أ س + ص > ٢ لا يقع في الربع الثالث أو الرابع

∴ المستقيم الحدي أ س + ص = ٢ يوازي محور السينات

∴ أ = صفر

(٤) مجموعة حل المتباينتين س + ص > ٤ ، س − ص < ٤ لا تقع في الربع الثالث أو الرابع

(٥) ∵ مجموعة حل المتباينة ص ≥ س هي المنطقة المخططة

، مجموعة حل المتباينة ص ≤ − س هي المنطقة المنقطة

∴ مجموعة حل المتباينات − س ≥ ص ≥ س هي المنطقة المشتركة أي الإجابة رقم (د)

(٦) لاحظ أن {(١ ، ١)} فقط تحقق المتباينات الثلاثة

٥

من الشكل نجد أن أ (٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٤)

∴ المتباينات هي س ≤ ٤ ، ص ≤ ٤ ، س + ص ≥ ٤

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (حـ)	(٢) (أ)	(٣) (حـ)	(٤) (د)
(٥) (د)	(٦) (حـ)	(٧) (ب)	(٨) (حـ)
(٩) (د)	(١٠) (ب)	(١١) (أ)	

إرشادات الحل :

(١) إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∌ لمجموعة حل المتباينة ٢ س + ص > ٢

∴ النقطة (أ ، ب) ∈ لمجموعة حل المتباينة

٢ س + ص ≤ ٢ ∴ ٢ أ + ب ≤ ٢

(٧)

من الرسم نجد أن الحلول هي :

{(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢)}

حتى تكون س ، ص أعداد صحيحة

∴ عدد الحلول هو ٤

(٨)

النقطة التي من المؤكد أن تنتمي لمجموعة حل المتباينة أ س + ب ص ≥ حـ

والنقطتين (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ينتميان لمجموعة الحل

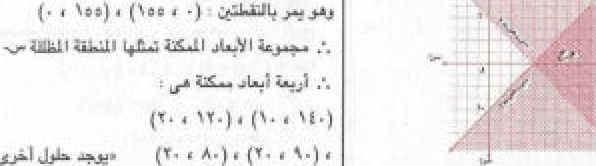
هي نقطة تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما

ومن الرسم المقابل هي النقطة (٢ ، ٣)

(٩) محور تماثل منطقة حل المتباينات هو محور السينات

∴ ك = ٠





(١٠) ل١ : س + ٢ ص − ٣ = ٠

، ل٢ : أ س + ٤ ص − ١ = ٠

مجموعة حل المتباينتين س + ٢ ص > ٣

، أ س + ٤ ص < ١ تساوي ∅

إذا كان : ل١ // ل٢ أي في حالة ميل ل١ = ميل ل٢

∴ $\frac{-١}{٢} = \frac{-أ}{٤}$

∴ أ = ٢

(١١) مجموعة حل المتباينة س + ص ≤ أ

هي المنطقة فوق المستقيم س + ص = أ

، مجموعة حل المتباينة س + ص ≥ ب

هي المنطقة تحت المستقيم س + ص = ب

فلكي تكون مجموعة حل النظام = ∅

يجب أن يكون أ > ب

تطبيقات حياتية

١

نفرض أن طول المستطيل = س متر

، عرض المستطيل = ص متر

∴ س > ٠ ، ص > ٠ ، ويمثلهما الربع الأول

، س ≤ ٨٠ ، ٢ س + ٢ ص ≥ ٣١٠

أي س + ص ≥ ١٥٥

نرسم المستقيم الحدي ل١ : س = ٨٠ (بخط متصل)

ونرسم المستقيم الحدي ل٢ :

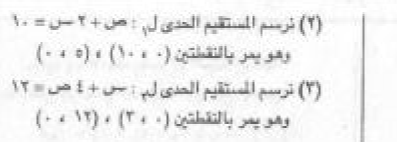
س + ص = ١٥٥ (بخط متصل)

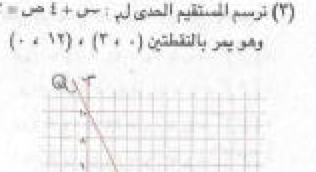
وهو يمر بالنقطتين : (٠ ، ١٥٥) ، (١٥٥ ، ٠)

∴ مجموعة الأبعاد الممكنة تمثلها المنطقة المظللة ح

∴ أربعة أبعاد ممكنة هي :

(١٤٠ ، ١٠) ، (١٢٠ ، ٢٠) ، (٩٠ ، ٢٠) ، (٨٠ ، ٢٠) «يوجد حلول أخرى»





٢

نفرض أن عدد الكيلوجرامات من النوع الأول س ، من النوع الثاني ص

(١) نظام المتباينات هو : س ≤ ٢ ، ص ≤ ١ ، ٦ س + ٨ ص ≥ ٤٨

(٢) نرسم المستقيمات الحدية

ل١ : س = ٢ (بخط متصل)

، ل٢ : ص = ١ (بخط متصل)

، ل٣ : ٦ س + ٨ ص = ٤٨

أي ٣ س + ٤ ص = ٢٤ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٨ ، ٠)

(٣) (٤ ، ٢) (٤) (٢ ، ٢)

٣

نفرض أن عدد الأسئلة المجاب عنها من القسم (أ) هي س ، من القسم (ب) هي ص

نظام المتباينات هو : س ≤ ٤ ، ص ≤ ٣

، س + ص ≤ ١٠ ، ٤ س + ٥ ص ≥ ٦٠

نرسم المستقيمات الحدية ل١ : س = ٤ (بخط متصل)

، ل٢ : ص = ٣ (بخط متصل)

، ل٣ : س + ص = ١٠ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٠) ، (١٠ ، ٠)

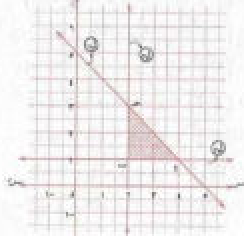
، ل٤ : ٤ س + ٥ ص = ٦٠

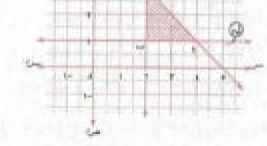
وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٢) ، (١٥ ، ٠)

∴ من الاحتمالات الممكنة :

(٨ ، ٢) ، (٩ ، ٣) ، (٨ ، ٤) ، (٦ ، ٥)







ارشادات تمارين 7

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (د)

(٦) (د) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (د) (١٠) (ب)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (ب)

(١٦) (ب) (١٧) (جـ) (١٨) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

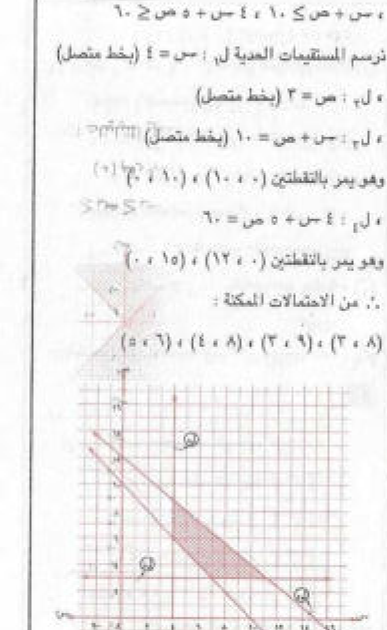
(١) أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ص = ٥

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠)

(٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = ١

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٣ : س = ٢









∴ مجموعة الحل للمتباينات الثلاث تمثل بالمنطقة المظللة أ ب جـ حيث أ (٤ ، ١) ، ب (٢ ، ١) ، جـ (٢ ، ٣)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٢ س + ٣ ص

∴ [ر]أ = ٢ × ٤ + ٣ × ١ = ١١

، [ر]ب = ٢ × ٢ + ٣ × ١ = ٧

، [ر]جـ = ٢ × ٢ + ٣ × ٣ = ١٣

∴ النقطة ب (٢ ، ١) تجعل دالة الهدف ر أصغر ما يمكن

(٢) أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

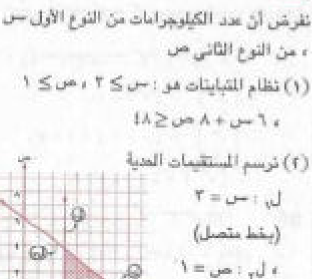
(١) المتباينتان : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يمثلهما و س⃡ ∪ و ص⃡ ∪ الربع الأول

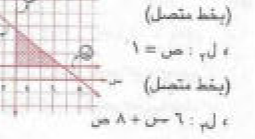
(٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص + ٢ س = ١٠

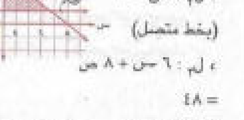
وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٠) ، (٥ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٣ : س + ٤ ص = ١٢

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (١٢ ، ٠)







∴ مجموعة الحل للمتباينات الأربع تمثل بالمنطقة المظللة و أ ب جـ حيث و (٠ ، ٠) ، أ (٥ ، ٠) ، ب (٤ ، ٢) ، جـ (٠ ، ٣)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٢ ص + ٥ س

∴ [ر]و = ٠ ، [ر]أ = ٥ × ٥ = ٢٥

، [ر]ب = ٢ × ٢ + ٥ × ٤ = ٢٤

، [ر]جـ = ٢ × ٣ = ٦

∴ ر أكبر ما يمكن عند أ (٥ ، ٠)

(٣) أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

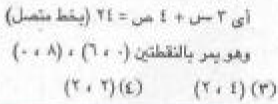
(١) المتباينتان : س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ يمثلهما و س⃡ ∪ و ص⃡ ∪ الربع الأول

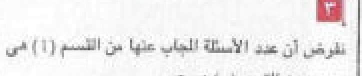
(٢) نرسم المستقيم الحدى ل١ :

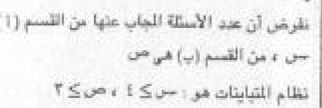
٣ ص + س = ١٥ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (١٥ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٢ :

٤ س + ٢ ص = ٢٤ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٨ ، ٠)







∴ مجموعة الحل المتباينات الأربع تمثل بالمنطقة المظللة بالشكل والتى تحدها النقط أ ، ب ، حـ حيث :

أ (١٥ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٨)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٣ ص + ٢ س

∴ [ر]أ = ٢ × ١٥ = ٣٠

، [ر]ب = ٣ × ٤ + ٢ × ٣ = ١٨

، [ر]حـ = ٣ × ٨ = ٢٤

∴ ر أقل ما يمكن عند النقطة ب (٣ ، ٤)

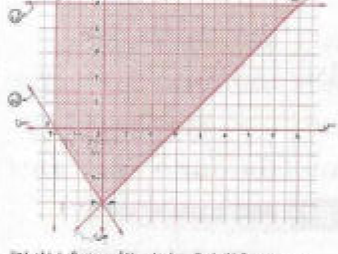
(٤) **أولاً :** تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :

(١) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س − ص = ٣ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −٣) ، (٣ ، ٠)

(٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ :
٣ س + ٢ ص = −٦ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −٣) ، (−٢ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٣ : س = −٢

(٤) نرسم المستقيم الحدى ل٤ : ص = ٥



∴ مجموعة الحل المتباينات الأربع تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب حـ ء حيث : أ (−٢ ، ٥)
، ب (٨ ، ٥) ، حـ (٠ ، −٣) ، ء (−٢ ، ٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٢ س − ٣ ص

∴ [ر]أ = ٢ × −٢ − ٣ × ٥ = −١٩

، [ر]ب = ٢ × ٨ − ٣ × ٥ = ١

، [ر]حـ = −٣ × −٣ = ٩

، [ر]ء = ٢ × −٢ = −٤

∴ ر أكبر مايمكن عند النقطة حـ (٠ ، −٣)

٢

أولاً : تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :

(١) مجموعة حل المتباينة : −٢ ≤ س ≤ ٢
تمثل بالمستقيمين المتوازيين ل١ : س = −٢
، ل٢ : س = ٢ والمنطقة المحصورة بينهما.

(٢) مجموعة حل المتباينة : −٤ ≤ ص ≤ ٤
تمثل بالمستقيمين المتوازيين ل٣ : ص = −٤
، ل٤ : ص = ٤ والمنطقة المحصورة بينهما.

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٥ : ٤ س + ٣ ص = ١٢ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٠)

(٤) نرسم المستقيم الحدى ل٦ : ٤ س + ٣ ص = −١٢ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، −٤) ، (−٣ ، ٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات الأربع تمثل بالمنطقة المظللة بالشكل أ ب حـ ء هـ ن حيث :
أ (−٣ ، ٤) ، ب (٠ ، ٤) ، حـ (٣ ، ٠)
، ء (٣ ، −٤) ، هـ (٠ ، −٤) ، ن (−٣ ، ٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ل = س + ٣ ص − ٥

∴ [ل]أ = −٣ + ٣ × ٤ − ٥ = ٤

، [ل]ب = ٠ + ٣ × ٤ − ٥ = ٧

، [ل]حـ = ٣ + ٣ × ٠ − ٥ = −٢

، [ل]ء = ٣ + ٣ × −٤ − ٥ = −١٤

، [ل]هـ = ٠ + ٣ × −٤ − ٥ = −١٧

، [ل]ن = −٣ + ٣ × ٠ − ٥ = −٨

∴ أكبر قيمة تأخذها ل هى ٧ وأقل قيمة هى −١٧

٣

بفرض أن يوسف يمشى س دقيقة يوميًا ويجرى ص دقيقة يوميًا

∴ ١٠ ≤ س ≤ ٢٠ ، ٣٠ ≤ ص ≤ ٤٥

، س + ص ≤ ٦٠

ودالة الهدف : ل = ٦ س + ١٥ ص أكبر ما يمكن

أولاً : تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :

(١) ١٠ ≤ س ≤ ٢٠
تمثل بالمستقيمين المتوازيين ل١ : س = ١٠
، ل٢ : س = ٢٠ والمنطقة المحصورة بينهما.

(٢) مجموعة حل المتباينة : ٣٠ ≤ ص ≤ ٤٥
تمثل بالمستقيمين المتوازيين ل٣ : ص = ٣٠
، ل٤ : ص = ٤٥ والمنطقة المحصورة بينهما.

(٣) نرسم المستقيم الحدى : ل٥ : س + ص = ٦٠
وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦٠) ، (٦٠ ، ٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات الثلاثة تمثل بالمنطقة المظللة بالشكل أ ب حـ ء هـ حيث :
أ (٢٠ ، ٣٠) ، ب (١٠ ، ٣٠) ، حـ (١٠ ، ٤٥)
، ء (١٥ ، ٤٥) ، هـ (٢٠ ، ٤٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ل = ٦ س + ١٥ ص

∴ [ل]أ = ٦ × ٢٠ + ١٥ × ٣٠ = ٥٧٠

، [ل]ب = ٦ × ١٠ + ١٥ × ٣٠ = ٥١٠

، [ل]حـ = ٦ × ١٠ + ١٥ × ٤٥ = ٧٣٥

، [ل]ء = ٦ × ١٥ + ١٥ × ٤٥ = ٧٦٥

، [ل]هـ = ٦ × ٢٠ + ١٥ × ٤٠ = ٧٢٠

∴ ليحرق أكبر قدر ممكن من السعرات الحرارية يجب أن يمشى ١٥ دقيقة ويجرى ٤٥ دقيقة.

٤

بفرض أن عدد الدواليب من النوع أ = س

وعدد الدواليب من النوع ب = ص

∴ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

، س + ص ≤ ٢٠ ، س ≤ ٣ ص

، ودالة الهدف : ر = ٨٠ س + ١٠٠ ص

أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) ترسم المستقيم الحدي ل١ : س + ص = ٢٠

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٠) ، (٢٠ ، ٠)

(٣) ترسم المستقيم الحدي ل٢ : س = ٣ ص

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١٥ ، ٥)

∴ مجموعة الحل للمتباينات تمثلها المنطقة المظللة أ ب و حيث :

و (٠ ، ٠) ، أ (٢٠ ، ٠) ، ب (١٥ ، ٥)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٨٠ س + ١٠٠ ص

∴ [ر]و = ٨٠ × ٠ + ١٠٠ × ٠ = ٠

، [ر]أ = ٨٠ × ٢٠ + ١٠٠ × ٠ = ١٦٠٠

، [ر]ب = ٨٠ × ١٥ + ١٠٠ × ٥ = ١٧٠٠

∴ أعلى ربح يتحقق عند إنتاج ١٥ دولاب من النوع أ ، ٥ دواليب من النوع ب.

٥

بفرض عدد الدجاج س ، عدد البط ص

∴ (١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ (٢) س + ص ≤ ٣٠٠

(٣) س ≥ ٢ ص أي أن س − ٢ ص ≥ ٠

• **دالة الهدف هي :** الربح ر أكبر ما يمكن حيث ر = س + ٢ ص

أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) ترسم المستقيم الحدي ل١ : س + ص = ٣٠٠

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣٠٠) ، (٣٠٠ ، ٠)

(٣) ترسم المستقيم الحدي ل٢ : س − ٢ ص = ٠

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢٠٠ ، ١٠٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات هي المنطقة المظللة أ ب و حيث : أ (٢٠٠ ، ١٠٠) ، ب (٣٠٠ ، ٠) ، و (٠ ، ٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = س + ٢ ص

∴ [ر]أ = ٢٠٠ + ٢ (١٠٠) = ٤٠٠

، [ر]ب = ٣٠٠ ، [ر]و = ٠

∴ أعلى ربح وهو ٤٠٠ جنيه يتحقق عند تربية ٢٠٠ دجاجة و ١٠٠ بطة.

٦

بفرض أن عدد الأسماك من النوع أ = س

، من النوع ب = ص

∴ (١) س + ص ≥ ٥٠ (٢) س ≥ ٣٠

(٣) ص ≥ ٢٥

• **دالة الهدف هي :**

ر = ٤ س + ٣ ص أقل ثمن ممكن للشراء

أولاً : تعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) ترسم المستقيم الحدي ل١ : س + ص = ٥٠

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٥٠) ، (٥٠ ، ٠)

(٢) ترسم المستقيم الحدي ل٢ : س = ٣٠

(٣) ترسم المستقيم الحدي ل٣ : ص = ٢٥

∴ مجموعة الحل للمتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب حـ حيث : أ (٣٠ ، ٢٠) ، ب (٣٠ ، ٢٥) ، حـ (١٥ ، ٣٥)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٤ س + ٣ ص

∴ [ر]أ = ٤ × ٣٠ + ٣ × ٢٠ = ١٨٠

، [ر]ب = ٤ × ٣٠ + ٣ × ٢٥ = ٢٢٥

، [ر]حـ = ٤ × ١٥ + ٣ × ٣٥ = ١٦٥

∴ أقل قيمة للشراء هي ١٦٥ جنيهًا وهذا عند شراء ١٥ سمكة من النوع أ و ٣٥ سمكة من النوع ب

٧

	النوع الأول	النوع الثاني	الكمية المتاحة
النحاس	٢٥	١٥	٩٥
النيكل	٤	٨	٣٢

• نفرض أن عدد الآلات من النوع الأول س

، عدد الآلات من النوع الثاني ص

• **نترجم الجدول في صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(٢) ٢٥ س + ١٥ ص ≤ ٩٥

(٣) ٤ س + ٨ ص ≤ ٣٢

• **دالة الهدف :** الربح أكبر ما يمكن حيث :

ر = ٦٠ س + ٤٨ ص

أولاً : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل١ : ٢٥ س + ١٥ ص = ٩٥

∴ ٥ س + ٣ ص = ١٩

وهو يمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٥ ، −٢)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ٤ س + ٨ ص = ٣٢

∴ س + ٢ ص = ٨

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات هي المنطقة المظللة أ ب حـ و حيث : أ ($3\frac{4}{5}$ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣)

، حـ (٠ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)



ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٦٠ س + ٤٨ ص

∴ [ر]أ = ٦٠ × ٣$\frac{٤}{٥}$ + ٤٨ × ٠ = ٢٢٨

، [ر]ب = ٦٠ × ٢ + ٤٨ × ٣ = ٢٦٤

، [ر]حـ = ٦٠ × ٠ + ٤٨ × ٤ = ١٩٢

، [ر]و = ٦٠ × ٠ + ٤٨ × ٠ = ٠

∴ أعلى ربح هو ٢٦٤ جنيهًا وهو يتحقق عند إنتاج اثنين من النوع الأول وثلاث آلات من النوع الثاني.

٨

	النوع (أ)	النوع (ب)	الكمية على الأقل
النيترات	٤	٢	١٦
الفوسفات	١	٣	٩

• نفرض أن عدد الكيلو جرامات من النوع (أ) = س

، عدد الكيلو جرامات من النوع (ب) = ص

• **نترجم الجدول في صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ (٢) ٤ س + ٢ ص ≥ ١٦

(٣) س + ٣ ص ≥ ٩



• **دالة الهدف :** ر = ١٧٠ س + ١٥٠ ص أقل ما يمكن :

أولًا : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

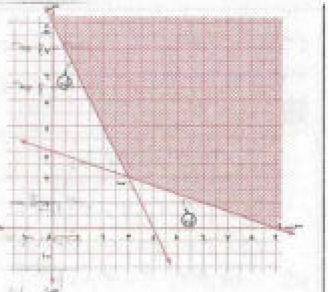
(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س⟷ ∪ و ص⟷ ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل₁ : ٤ س + ٢ ص = ١٦

أي ٢ س + ص = ٨ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٨) ، (٤ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل₂ : س + ٣ ص = ٩ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٩ ، ٠)



∴ مجموعة الحل تمثلها المنطقة المظللة والتي تحدها النقاط أ ، ب ، حـ حيث : أ (٩ ، ٠) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٠ ، ٨)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ١٧٠ س + ١٥٠ ص

∴ [ر]أ = ١٧٠ × ٩ + ١٥٠ × ٠ = ١٥٣٠

، [ر]ب = ١٧٠ × ٣ + ١٥٠ × ٢ = ٨١٠

، [ر]حـ = ١٧٠ × ٠ + ١٥٠ × ٨ = ١٢٠٠

∴ أقل تكلفة هي ٨١٠ جنيهًا وهي عند شراء ٣ كجم من النوع أ ، ٢ كجم من النوع ب

٩

	النوع العادي	النوع الممتاز	الكمية المتاحة
زيت	٢	١	٢٤
زبدة الكاكاو	١	٢	١٨

• نفرض أن عدد عبوات النوع العادي س

، عدد عبوات النوع الممتاز ص

• **نترجم الجدول في صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ (٢) ٢ س + ص ≤ ٢٤

(٣) س + ٢ ص ≤ ١٨

• **دالة الهدف :** ر أكبر ما يمكن حيث :

ر = ١٠ س + ٨ ص

أولًا : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س⟷ ∪ و ص⟷ ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل₁ : ٢ س + ص = ٢٤ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٤) ، (١٢ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل₂ : س + ٢ ص = ١٨ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٩) ، (١٨ ، ٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات يمثلها المنطقة المظللة و أ ب حـ حيث : و (٠ ، ٠) ، أ (١٢ ، ٠) ، ب (١٠ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٩)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ١٠ س + ٨ ص

∴ [ر]و = ٠

، [ر]أ = ١٠ × ١٢ = ١٢٠

، [ر]ب = ١٠ × ١٠ + ٨ × ٤ = ١٣٢

، [ر]حـ = ٨ × ٩ = ٧٢

∴ أكبر ربح ممكن هو ١٣٢ جنيهًا عند تصنيع ١٠ عبوات من النوع العادي و ٤ عبوات من النوع الممتاز.

١٠



	السلعة الأولى	السلعة الثانية	الكمية المطلوبة على الأقل
فيتامين	٥	٢	٢٥
سعر حراري	٣	٦	٣٩

• نفرض أن عدد الوحدات من السلعة الأولى س

، عدد الوحدات من السلعة الثانية ص

• **نترجم الجدول في صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(٢) ٥ س + ٢ ص ≥ ٢٥

(٣) ٣ س + ٦ ص ≥ ٣٩ أي أن س + ٢ ص ≥ ١٣

• **دالة الهدف :** ت = ٦ س + ٨ ص ، ت أقل ما يمكن

أولًا : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س⟷ ∪ و ص⟷ ∪ الربع الأول.

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل₁ : ٥ س + ٢ ص = ٢٥ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ١٢,٥) ، (٥ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل₂ : س + ٢ ص = ١٣ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦,٥) ، (١٣ ، ٠)

∴ مجموعة الحل للمتباينات هي المنطقة المظللة بالشكل والتي تحدها النقط : أ (٠ ، ١٢,٥) ، ب (٣ ، ٥) ، حـ (١٣ ، ٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ت = ٦ س + ٨ ص

∴ [ت]أ = ٨ × ١٢,٥ = ١٠٠

، [ت]ب = ٦ × ٣ + ٨ × ٥ = ٥٨

، [ت]حـ = ٦ × ١٣ = ٧٨

∴ أقل تكلفة هي ٥٨ جنيهًا وهي عند شراء ٣ وحدات من السلعة الأولى ، ٥ وحدات من السلعة الثانية.

١١

	النوع الأول	النوع الثاني	حد ساعات العمل
العامل الأول	٢	٣	٦ على الأقل
العامل الثاني	١,٥	٢	٦ على الأكثر

• نفرض أن عدد مكاتب النوع الأول س ، عدد مكاتب النوع الثاني ص

• **نترجم الجدول في صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(٢) ٢ س + ٣ ص ≥ ٦

(٣) ١,٥ س + ٢ ص ≤ ٦

• **دالة الهدف :** الربح ر = ٥٠ س + ٥٠ ص أكبر ما يمكن

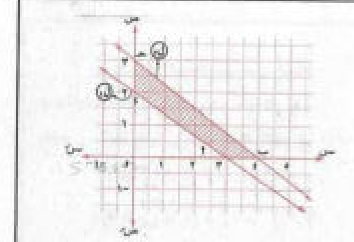
أولًا : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل١ : ٢ س + ٣ ص = ٦ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ١,٥ س + ٢ ص = ٦ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٤ ، ٠)



∴ مجموعة الحل للمتباينات هي المنطقة المظللة أ ب حـ ء حيث : أ (٣ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٣) ، ء (٠ ، ٢)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٥٠ س + ٥٠ ص

∴ [ر]أ = ٥٠ × ٣ = ١٥٠

، [ر]ب = ٥٠ × ٤ = ٢٠٠

، [ر]حـ = ٥٠ × ٣ = ١٥٠

، [ر]ء = ٥٠ × ٢ = ١٠٠

∴ أكبر ربح يحققه المصنع هو ٢٠٠ جنيه عندما ينتج ٤ مكاتب من النوع الأول.

١٢

	المنتج (أ)	المنتج (ب)	الحد الأقصى
مواد خام	٣٠	٢٠	٧٥
ساعات تشغيل	١٨	٢٤	٧٢

• نفرض أن المصنع ينتج عدد س مما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج أ ، ص مما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب

• **نترجم الجدول في صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(٢) ٣٠ س + ٢٠ ص ≤ ٧٥ أي أن ٦ س + ٤ ص ≤ ١٥

(٣) ١٨ س + ٢٤ ص ≤ ٧٢ أي أن ٣ س + ٤ ص ≤ ١٢

• **دالة الهدف :** ر أكبر ما يمكن حيث :

ر = ١٠٠ س + ١٠٠ ص

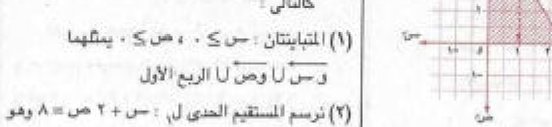
أولًا : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل١ : ٦ س + ٤ ص = ١٥ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣,٧٥) ، (٢,٥ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ٣ س + ٤ ص = ١٢ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٤ ، ٠)



∴ مجموعة الحل للمتباينات تمثلها المنطقة المظللة و أ ب حـ حيث : و (٠ ، ٠) ، أ (٢,٥ ، ٠) ، ب (١ ، ٢ ١/٢) ، حـ (٠ ، ٣)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ١٠٠ س + ١٠٠ ص

∴ [ر]و = ٠

، [ر]أ = ١٠٠ × ٢,٥ = ٢٥٠ جنيهًا

، [ر]ب = ١٠٠ + ٢٢٥ = ٣٢٥ جنيهًا

، [ر]حـ = ٣٠٠ جنيه

∴ أكبر قيمة للمنتجات هي ٣٢٥ جنيهًا عندما تنتج من النوع أ ما قيمته ١٠٠ جنيه ومن المنتج ب ما قيمته ٢٢٥ جنيهًا.

١٣

	أ	ب	عدد ساعات العمل على الأكثر
الترزي الأول	١	٢	٨
الترزي الثاني	٣	١	٩

• بفرض أن عدد البلوزات المنتجة من النموذج أ هو س ، عدد البلوزات المنتجة من النموذج ب هو ص

• **نترجم بيانات الجدول في صورة المتباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

(٢) س + ٢ ص ≤ ٨

(٣) ٣ س + ص ≤ ٩

• **دالة الهدف :** ر = ١٠ س + ١٥ ص ، ر أكبر ما يمكن

أولًا : نعين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالي :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدي ل١ : س + ٢ ص = ٨ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدي ل٢ : ٣ س + ص = ٩ وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٩) ، (٣ ، ٠)

∴ مجموعة الحل المتباينات هى المنطقة المظللة أ ب حـ و حيث : أ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٠) ، و (٠ ، ٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ١٠ س + ١٥ ص

∴ [ر]أ = ١٥ × ٤ = ٦٠

، [ر]ب = ١٠ × ٢ + ١٥ × ٣ = ٦٥

، [ر]حـ = ١٠ × ٣ = ٣٠ ، [ر]و = ٠

∴ أكبر ربح ممكن هو ٦٥ جنيهًا عند إنتاج عدد ٢ بلوزة من النموذج (أ) ، عدد ٣ بلوزة من النموذج (ب)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

• نفرض أن يوسف يعمل س ساعة ، سامى يعمل ص ساعة فى اليوم

∴ يوسف ينتج عدد س وحدة ، سامى ينتج عدد ٢ ص وحدة.

• **نترجم المعلومات فى صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ (٢) س + ص ≥ ٦

(٣) س + ٢ ص ≥ ٨

(٤) ∵ سامى يمكن أن يعمل ساعتين زيادة عن يوسف على الأكثر

∴ ص − س ≤ ٢

• **دالة الهدف :** ر أقل ما يمكن حيث :

ر = ٥ س + ٨ ص

أولاً : تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل المتباينات كالتالى :

(١) المتباينتان : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ص = ٦

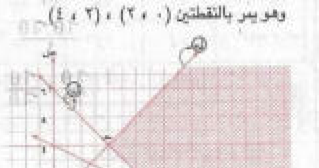
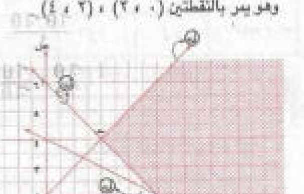
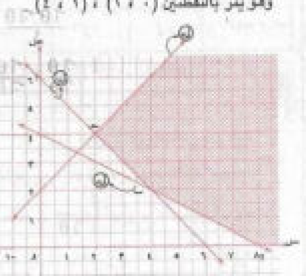
وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : س + ٢ ص = ٨

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)

(٤) نرسم المستقيم الحدى ل٣ : ص − س = ٢

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٤)

∴ مجموعة الحل المتباينات هى المنطقة المظللة بالشكل والتى تحدها النقاط :

أ (٨ ، ٠) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (٢ ، ٤)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = ٥ س + ٨ ص

∴ [ر]أ = ٤٠ جنيهًا

، [ر]ب = ٢٠ + ١٦ = ٣٦ جنيهًا

، [ر]حـ = ١٠ + ٣٢ = ٤٢ جنيهًا

∴ أقل أجور يومية هى ٣٦ جنيهًا يدفع ٢٠ جنيهًا منها ليوسف ، ١٦ جنيهًا لسامى حيث يعمل يوسف ٤ ساعات وسامى ساعتين.

٢

	النوع (أ)	النوع (ب)	الحد الأقصى
الوزن	١	١	٢٠
السمك	٦	٤	٩٦

• نفرض أن عدد الكتب من النوع أ = س كتاب

، وأن عدد الكتب من النوع ب = ص كتاب

• **نترجم الجدول فى صورة متباينات :**

(١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ (٢) س + ص ≤ ٢٠

(٣) ٦ س + ٤ ص ≤ ٩٦ أى أن ٣ س + ٢ ص ≤ ٤٨

• **دالة الهدف :** ر أكبر ما يمكن حيث : ر = س + ص

أولاً : تعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل المتباينات كالتالى :

(١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

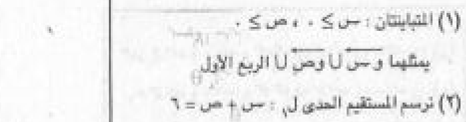
يمثلهما و س ∪ و ص ∪ الربع الأول

(٢) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س + ص = ٢٠

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٠) ، (٢٠ ، ٠)

(٣) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ٣ س + ٢ ص = ٤٨

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٢٤) ، (١٦ ، ٠)



∴ مجموعة الحل هى المنطقة و أ ب حـ المظللة فى الشكل حيث : و (٠ ، ٠) ، أ (١٦ ، ٠)

، ب (٨ ، ١٢) ، حـ (٠ ، ٢٠)

ثانيًا : ∵ دالة الهدف : ر = س + ص

ويكون [ر]و = ٠ ، [ر]أ = ١٦

، [ر]ب = ٢٠ ، [ر]حـ = ٢٠

∴ أكبر عدد من الكتب = ٢٠ كتابًا ويتحقق ذلك عند النقطتين ب ، حـ ولذلك تتعدد الحلول وهى كل النقاط (س ، ص) ∈ ب حـ بحيث س ∈ ص ، ص ∈ ص أى النقاط التالية :

(٨ ، ١٢) ، (٧ ، ١٣) ، (٦ ، ١٤)

، (٥ ، ١٥) ، (٤ ، ١٦) ، (٣ ، ١٧)

، (٢ ، ١٨) ، (١ ، ١٩) ، (٠ ، ٢٠) كلها حلول والسبب فى ذلك أن المستقيم الممثل لدالة الهدف ر = س + ص يوازى المستقيم

ل١ : س + ص = ٢٠

الحامل للقطعة المستقيمة ب حـ

ارشادات الوحدة الثالثة

8 ارشادات تمارين

اولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١)(ج) (٢)(د) (٣)(ج) (٤)(ب) (٥)(د)
(٦)(أ) (٧)(ب) (٨)(ج) (٩)(ج) (١٠)(د)
(١١)(أ) (١٢)(د) (١٣)(أ) (١٤)(أ) (١٥)(أ)
(١٦)(د) (١٧)(ب) (١٨)(أ) (١٩)(د) (٢٠)(ب)
(٢١)(أ) (٢٢)(د) (٢٣)(ج) (٢٤)(ب) (٢٥)(ب)
(٢٦)(أ) (٢٧)(أ) (٢٨)(أ) (٢٩)(ب) (٣٠)(د)
(٣١)(ج) (٣٢)(أ) (٣٣)(ج) (٣٤)(د) (٣٥)(أ)
(٣٦)(ج) (٣٧)(د) (٣٨)(ب) (٣٩)(ب) (٤٠)(د)
(٤١)(ج) (٤٢)(ب) (٤٣)(ب) (٤٤)(أ) (٤٥)(ج)
(٤٦)(ج) (٤٧)(د) (٤٨)(ب) (٤٩)(ب) (٥٠)(ب)
(٥١)(أ) (٥٢)(ج)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

(١) $\frac{1}{\text{جتا}^2\theta} - \frac{1}{\text{ظتا}^2\theta} = \text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta = 1$

(٢) $\text{جتا}(\frac{\pi}{2}-\theta)\,\text{قتا}(\frac{\pi}{2}-\theta) = \text{جا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta = 1$

(٣) $\text{جا}(\pi-\theta)\,\text{قتا}(\pi-\theta) = \text{جا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta = 1$

(٤) $\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\text{جتا}(2\pi-\theta)} = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = 1$

(٥) $(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^2 - 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= \text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta - 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

(٦) $\text{جا}(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\text{قا}(-\theta) = \text{جتا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta = 1$

(٧) $\text{جا}^2\theta\,\text{قتا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta = \text{جا}^2\theta \times \frac{1}{\text{جا}\,\theta} \times \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} = \text{ظا}\,\theta$

(٨) $\text{جا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta - \text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جتا}^2\theta = \text{جا}^2\theta$

(٩) $\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\theta)\,\text{جتا}\,\theta$

$- \text{جتا}(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\text{جا}(\pi-\theta) = \text{جتا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$-(-\text{جا}\,\theta)\,\text{جا}\,\theta = \text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 1$

(١٠) $\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\theta)\,\text{ظا}(\frac{\pi}{2}-\theta)\,\text{قتا}(\pi-\theta)$

$= \text{جتا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta = \text{جتا}\,\theta \times \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \times \frac{1}{\text{جا}\,\theta} = 1$

(١١) $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,(\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)$

$= \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta + \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta$

$= \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

(١٢) $\frac{1+\text{ظا}^2(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{1+\text{ظا}^2(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1+\text{ظا}^2\theta}{1+\text{ظتا}^2\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{قتا}^2\theta}$

$= \text{ظا}^2\theta$

(١٣) $\frac{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta} + \frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta}$

$= \frac{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} + \frac{\text{جا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 1$

2

(١) الطرف الأيمن $= \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

$= \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta} = \frac{1}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}$

$= \text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر

(٢) الطرف الأيمن $= \text{قتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta$

$= \frac{1}{\text{جا}\,\theta} - \text{جا}\,\theta = \frac{1-\text{جا}^2\theta}{\text{جا}\,\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\,\theta}$

$= \text{جتا}\,\theta \times \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \text{جتا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر

(٣) الطرف الأيمن $= 2\,\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta$

$= \text{جا}^2\theta + \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta$

$= 1 + \text{جا}^2\theta =$ الطرف الأيسر

(٤) الطرف الأيمن $= \text{جا}^2\alpha\,(1 + \text{ظا}^2\alpha)$

$= \text{جا}^2\alpha\,\text{قا}^2\alpha$

$= \text{جا}^2\alpha \times \frac{1}{\text{جتا}^2\alpha} = \frac{\text{جا}^2\alpha}{\text{جتا}^2\alpha}$

$= \text{ظا}^2\alpha =$ الطرف الأيسر

(٥) الطرف الأيمن $= \text{جا}(90^\circ - \mu)\,\text{جتا}\,\mu$

$= \text{جتا}\,\mu\,\text{جتا}\,\mu = \text{جتا}^2\mu$

$= 1 - \text{جا}^2\mu =$ الطرف الأيسر

(٦) الطرف الأيمن $= \text{قتا}^2\mu\,\text{جتا}^2\mu - \text{جتا}^2\mu = \frac{\text{جتا}^2\mu}{\text{جا}^2\mu} - \text{جتا}^2\mu$

$= \text{جتا}^2\mu\,(\frac{1}{\text{جا}^2\mu} - 1)$

$= \text{جتا}^2\mu\,(\text{قتا}^2\mu - 1)$

$= \text{جتا}^2\mu\,\text{ظتا}^2\mu =$ الطرف الأيسر

(٧) الطرف الأيمن $= \text{قا}^2\beta + \text{قتا}^2\beta$

$= \frac{1}{\text{جتا}^2\beta} + \frac{1}{\text{جا}^2\beta} = \frac{\text{جا}^2\beta + \text{جتا}^2\beta}{\text{جا}^2\beta\,\text{جتا}^2\beta}$

$= \frac{1}{\text{جا}^2\beta\,\text{جتا}^2\beta} = \text{قا}^2\beta\,\text{قتا}^2\beta$

= الطرف الأيسر

(٨) الطرف الأيمن $= \text{قا}\,\theta - \text{جا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$

$= \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} - \text{جا}\,\theta\,\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{1-\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \text{جتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر

(٩) الطرف الأيمن $= \text{ظا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta - (\text{قا}^2\theta + \text{قتا}^2\theta)$

$= \text{ظا}^2\theta - \text{قا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta - \text{قتا}^2\theta$

$= -(\text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta)$

$-(\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta) = -1 - 1 = -2$

= الطرف الأيسر

(١٠) الطرف الأيمن $= \text{ظا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta\,\text{جا}^2\theta$

$= \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}\,\text{جتا}^2\theta + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}\,\text{جا}^2\theta$

$= \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

= الطرف الأيسر

(١١) الطرف الأيمن $= (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^2 + (\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta)^2$

$= \text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta$

$+ \text{جا}^2\theta - 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta$

$+ \text{جا}^2\theta = 2\,\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جتا}^2\theta$

$= 2\,(\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta) = 2$

= الطرف الأيسر

(١٢) الطرف الأيمن $= \text{جا}^2\theta\,\text{قتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta\,\text{قا}\,\theta$

$= \text{جا}^2\theta \times \frac{1}{\text{جا}\,\theta} + \text{جتا}^2\theta \times \frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

= الطرف الأيسر

(١٣) الطرف الأيمن $= (1 - \text{جا}\,\theta)(\text{قا}\,\theta + \text{ظا}\,\theta)$

$= \text{قا}\,\theta + \text{ظا}\,\theta - \text{جا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta$

$- \text{جا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$- \text{جا}\,\theta\,\frac{1}{\text{جتا}\,\theta} - \text{جا}\,\theta\,\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{1 + \text{جا}\,\theta - \text{جا}\,\theta - \text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{1-\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \text{جتا}\,\theta =$ الطرف الأيسر

(١٤) الطرف الأيمن $= \text{جا}\,\theta\,\text{جا}(90^\circ - \theta)\,\text{ظا}\,\theta$

$= \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$= \text{جا}^2\theta = 1 - \text{جتا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

(15) الطرف الأيمن = $\text{جتا}^2\theta\,\text{ظا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta$

= $\text{جتا}^2\theta \times \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \text{جتا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta$

= $\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta$

= $1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

(16) الطرف الأيمن = $\text{جا}^4\theta - \text{جتا}^4\theta + \text{جتا}^2\theta$

= $(\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta)$

$(\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta) + \text{جتا}^2\theta$

= $\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta$

= $\text{جا}^2\theta$ = الطرف الأيسر

(17) الطرف الأيمن

= $\text{جا}^2\alpha\,\text{جا}^2\beta + \text{جا}^2\alpha\,\text{جتا}^2\beta + \text{جتا}^2\alpha$

= $\text{جا}^2\alpha\,(\text{جا}^2\beta + \text{جتا}^2\beta) + \text{جتا}^2\alpha$

= $\text{جا}^2\alpha + \text{جتا}^2\alpha = 1$ = الطرف الأيسر

3

(1) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا}\theta \times \text{ظا}\theta}{\text{قتا}\theta}$

= $\text{جتا}\theta \times \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \times \text{جا}\theta$

= $\text{جا}^2\theta = 1 - \text{جتا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

(2) الطرف الأيمن = $\frac{\text{ظتا}\theta}{1+\text{ظتا}^2\theta} = \frac{\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}}{\text{قتا}^2\theta}$

= $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} \times \text{جا}^2\theta$

= $\text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta$ = الطرف الأيسر

(3) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا}\theta}{1+\text{جا}\theta} + \text{ظا}\theta$

= $\frac{\text{جتا}\theta}{1+\text{جا}\theta} + \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{\text{جتا}^2\theta + \text{جا}\theta + \text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\theta + \text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}$

= $\frac{1+\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta\,(1+\text{جا}\theta)} = \frac{1}{\text{جتا}\theta} = \text{قا}\theta$

= الطرف الأيسر

(4) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا}^2\theta}{1-\text{جا}\theta} = \frac{1-\text{جا}^2\theta}{1-\text{جا}\theta}$

= $\frac{(1-\text{جا}\theta)(1+\text{جا}\theta)}{1-\text{جا}\theta}$

= $1 + \text{جا}\theta$ = الطرف الأيسر

(5) الطرف الأيمن = $\frac{1-\text{جا}^2\theta}{1-\text{جتا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

= $\text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta - 1$

= الطرف الأيسر

(6) الطرف الأيمن = $\frac{1-\text{ظا}^2\theta}{1+\text{ظا}^2\theta}$

= $(1-\text{ظا}^2\theta)\,(\text{جتا}^2\theta)$

= $\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta$

= $\text{جتا}^2\theta - (1 - \text{جتا}^2\theta)$

= $2\,\text{جتا}^2\theta - 1$ = الطرف الأيسر

(7) الطرف الأيمن = $\frac{\text{قا}\theta}{\text{جا}\theta}\,(1 - \text{جا}^2\theta)$

= $\frac{1}{\text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta} \times \text{جتا}^2\theta$

= $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \text{ظتا}\theta$

= الطرف الأيسر

(8) الطرف الأيمن = $\frac{1}{\text{جا}^2(90^\circ - \theta)} - \text{ظا}^2\theta$

= $\frac{1}{\text{جتا}^2\theta} - \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

= $\frac{1-\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = 1$

= الطرف الأيسر

(9) الطرف الأيمن = $\frac{1+\text{ظا}^2\theta}{\text{قا}^4\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{قا}^4\theta}$

= $\frac{1}{\text{قا}^2\theta} = \text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

(10) الطرف الأيمن = $\frac{1}{1+\text{ظا}^2\alpha} - \frac{1}{1+\text{ظا}^2\beta}$

= $\frac{1}{\text{قا}^2\alpha} - \frac{1}{\text{قا}^2\beta}$

= $\text{جتا}^2\alpha - \text{جتا}^2\beta$ = الطرف الأيسر

(11) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا}^2\theta - \text{جتا}^4\theta}{\text{جا}^2\theta - \text{جا}^4\theta}$

= $\frac{\text{جتا}^2\theta\,(1 - \text{جتا}^2\theta)}{\text{جا}^2\theta\,(1 - \text{جا}^2\theta)}$

= $\frac{\text{جتا}^2\theta \times \text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta \times \text{جتا}^2\theta} = 1$

، الطرف الأيسر = $\text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta = 1$

∴ الطرفان متساويان

(12) الطرف الأيمن = $(\text{قا}\theta - \text{ظا}\theta)^2 = \left(\frac{1}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}\right)^2$

= $\left(\frac{1-\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}\right)^2 = \frac{(1-\text{جا}\theta)^2}{\text{جتا}^2\theta}$

= $\frac{(1-\text{جا}\theta)^2}{1-\text{جا}^2\theta}$

= $\frac{(1-\text{جا}\theta)^2}{(1-\text{جا}\theta)(1+\text{جا}\theta)}$

= $\frac{1-\text{جا}\theta}{1+\text{جا}\theta}$ = الطرف الأيسر

(13) الطرف الأيمن = $\frac{1}{1+\text{ظتا}\theta} \times \frac{\text{ظا}\theta}{\text{ظا}\theta} = \frac{\text{ظا}\theta}{\text{ظا}\theta + 1}$

= الطرف الأيسر

(14) الطرف الأيمن

= $\frac{\text{جا}^3\alpha + \text{جتا}^3\alpha}{\text{جا}\alpha + \text{جتا}\alpha} + \frac{\text{جا}^3\alpha - \text{جتا}^3\alpha}{\text{جا}\alpha - \text{جتا}\alpha}$

= $\frac{(\text{جا}\alpha + \text{جتا}\alpha)(\text{جا}^2\alpha - \text{جا}\alpha\,\text{جتا}\alpha + \text{جتا}^2\alpha)}{\text{جا}\alpha + \text{جتا}\alpha}$

+ $\frac{(\text{جا}\alpha - \text{جتا}\alpha)(\text{جا}^2\alpha + \text{جا}\alpha\,\text{جتا}\alpha + \text{جتا}^2\alpha)}{\text{جا}\alpha - \text{جتا}\alpha}$

= $\text{جا}^2\alpha - \text{جا}\alpha\,\text{جتا}\alpha + \text{جتا}^2\alpha + \text{جا}^2\alpha$

+ $\text{جا}\alpha\,\text{جتا}\alpha + \text{جتا}^2\alpha$

= $2\,\text{جا}^2\alpha + 2\,\text{جتا}^2\alpha$

= $2\,(\text{جا}^2\alpha + \text{جتا}^2\alpha) = 2$

= الطرف الأيسر

(15) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta\,\text{جتا}\theta}$

= $\frac{(\text{جتا}\theta - \text{جا}\theta)(\text{جتا}\theta + \text{جا}\theta)}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta\,(\text{جتا}\theta + \text{جا}\theta)}$

= $\frac{\text{جتا}\theta - \text{جا}\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta} = \frac{1}{\text{جا}\theta} - \frac{1}{\text{جتا}\theta}$

= $\text{قتا}\theta - \text{قا}\theta$

= الطرف الأيسر

(16) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا}\theta\,\text{جا}(90^\circ - \theta)}{\text{ظا}\theta}$

+ $\frac{\text{ظا}(180^\circ + \theta)}{\text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta}$

= $\frac{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}{\text{ظا}\theta} + \frac{\text{ظا}\theta}{\text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta}$

= $\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta \times \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} + \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\times\ \text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta = \text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 1$

= الطرف الأيسر

(17) الطرف الأيمن = $(\text{جا}\theta + \text{قتا}\theta)^2 + (\text{جتا}\theta + \text{قا}\theta)^2$

= $\text{جا}^2\theta + \text{قتا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta\,\text{قتا}\theta$

+ $\text{جتا}^2\theta + \text{قا}^2\theta + 2\,\text{جتا}\theta\,\text{قا}\theta$

= $1 + \text{قتا}^2\theta + 2 + \text{قا}^2\theta + 2$

= $5 + \text{قتا}^2\theta + \text{قا}^2\theta$

= $5 + 1 + \text{ظتا}^2\theta + 1 + \text{ظا}^2\theta$

= $\text{ظا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta + 7$

= الطرف الأيسر

(18) الطرف الأيمن

= $\frac{1 - (\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta)^2}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta - \text{ظا}\theta}$

= $\frac{1 - (\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta + \text{جتا}^2\theta)}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta - \text{ظا}\theta}$

٧

$\therefore \dfrac{\text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta} = \dfrac{٥}{٤}$

$\therefore \dfrac{(\text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta)(\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta)}{\text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta} = \dfrac{٥}{٤}$

$\therefore \text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \dfrac{٥}{٤}$ وبتربيع الطرفين

$\therefore (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} = \left(\dfrac{٥}{٤}\right)^{٢}$

$\therefore \text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٢٥}{١٦}$

$\therefore ١ + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٢٥}{١٦}$

$\therefore ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٢٥}{١٦} - ١ = \dfrac{٩}{١٦}$

$\therefore \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٩}{٣٢}$

٨

(١) $\because \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = ٥ \quad \therefore (\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)^{٢} = ٢٥$

$\therefore \text{ظا}^{٢}\theta + \text{ظتا}^{٢}\theta + ٢\,\text{ظا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta = ٢٥$

$\therefore \text{ظا}^{٢}\theta + \text{ظتا}^{٢}\theta = ٢٥ - ٢ = ٢٣$

(٢) $\text{ظا}^{٣}\theta + \text{ظتا}^{٣}\theta$

$= (\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)(\text{ظا}^{٢}\theta - \text{ظا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\theta)$

$= ٥ \times (٢٣ - ١) = ٥ \times ٢٢ = ١١٠$

(٣) $\text{ظا}\,\theta - \text{ظتا}\,\theta = \pm\sqrt{(\text{ظا}\,\theta - \text{ظتا}\,\theta)^{٢}}$

$= \pm\sqrt{(\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)^{٢} - ٤\,\text{ظا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta}$

$= \pm\sqrt{٢٥ - ٤} = \pm\sqrt{٢١}$

(٤) $\text{ظا}^{٢}\theta - \text{ظتا}^{٢}\theta = (\text{ظا}\,\theta - \text{ظتا}\,\theta)(\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)$

$= \pm\sqrt{٢١} \times ٥ = \pm ٥\sqrt{٢١}$

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)
(٤) (أ)	(٥) (د)	(٦) (ب)
(٧) (ب)	(٨) (ب)	(٩) (جـ)
(١٠) (جـ)	(١١) (أ)	

$= \dfrac{١ - ١ - ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,(١ - \text{قا}^{٢}\theta)} = \dfrac{-٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta\,(-\text{ظا}^{٢}\theta)}$

$= ٢\,\text{ظتا}^{٢}\theta =$ الطرف الأيسر

٤

$\because \dfrac{٣\,\text{جتا}\,\theta - ٢\,\text{جا}\,\theta}{٣\,\text{جتا}\,\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta} = \dfrac{٣}{٢}$ بقسمة كل من بسط

ومقام الطرف الأيمن على جتا θ

$\therefore \dfrac{٣ - ٢\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}}{٣ + ٢\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}} = \dfrac{٣}{٢}$

$\therefore \dfrac{٣ - ٢\,\text{ظا}\,\theta}{٣ + ٢\,\text{ظا}\,\theta} = \dfrac{٣}{٢}$

$\therefore ٩ + ٦\,\text{ظا}\,\theta = ٦ - ٤\,\text{ظا}\,\theta$

$\therefore ١٠\,\text{ظا}\,\theta = -٣ \qquad \therefore \text{ظا}\,\theta = \dfrac{-٣}{١٠}$

٥

$\because \text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \dfrac{٣}{٢}$

وبتربيع الطرفين $\therefore (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} = \left(\dfrac{٣}{٢}\right)^{٢}$

$\therefore \text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٩}{٤}$

$\therefore ١ + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٩}{٤}$

$\therefore ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٩}{٤} - ١$

$\therefore ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٥}{٤} \qquad \therefore \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{٥}{٨}$

٦

$\because \text{قا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta = \dfrac{١}{٤}$ (١)

$\therefore \text{قا}\,\theta = \dfrac{١}{٤} + \text{ظا}\,\theta$ وبتربيع الطرفين

$\therefore \text{قا}^{٢}\theta = \left(\dfrac{١}{٤} + \text{ظا}\,\theta\right)^{٢}$

$\therefore \text{قا}^{٢}\theta = \dfrac{١}{١٦} + \dfrac{١}{٢}\,\text{ظا}\,\theta + \text{ظا}^{٢}\theta$

$\therefore \text{قا}^{٢}\theta - \text{ظا}^{٢}\theta = \dfrac{١}{١٦} + \dfrac{١}{٢}\,\text{ظا}\,\theta$

$\therefore ١ = \dfrac{١}{١٦} + \dfrac{١}{٢}\,\text{ظا}\,\theta$

$\therefore \text{ظا}\,\theta = \dfrac{١٥}{٨}$ ، بالتعويض في (١)

$\therefore \text{قا}\,\theta = \dfrac{١٧}{٨}$

إرشادات لحل رقم ١

(١) بفرض أن:

أ = س + ٢ ص ، ب = ٢ س + ص

∴ أ + ب = ٣ س + ٣ ص

= ٣ (س + ص) = ٩٠°

∴ ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص)

= ظا أ × ظا ب

= ظا أ × ظا (٩٠ − أ)

= ظا أ × ظتا أ = ١

(٢) $\because \theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

$\therefore \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\theta} = \sqrt{\text{قا}^{٢}\theta}$

$= \text{قا}\,\theta = \dfrac{ب}{\sqrt{ب^{٢} - ١}}$

(٣) $\because \sqrt{٤ + ٤\,\text{ظا}^{٢}\theta} = \sqrt{٤(١ + \text{ظا}^{٢}\theta)} = ٢\sqrt{\text{قا}^{٢}\theta}$

$= ٢\,|\text{قا}\,\theta| = -٢\,\text{قا}\,\theta$

حيث $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

(٤) $\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \dfrac{-ب}{٢}$ ، $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{ل}{٢}$

$\therefore (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢} = \dfrac{ب^{٢}}{٤}$

$\therefore \text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{ب^{٢}}{٤}$

$\therefore ١ + ٢\left(\dfrac{ل}{٢}\right) = \dfrac{ب^{٢}}{٤}$ ومنها ب = صفر

(٥) $\because ٣\,\text{جا}\,\theta + ٤\,\text{جتا}\,\theta = ٥$ (١)

ويفرض أن: $٣\,\text{جتا}\,\theta - ٤\,\text{جا}\,\theta = م$ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع:

$\therefore (٣\,\text{جا}\,\theta + ٤\,\text{جتا}\,\theta)^{٢} + (٣\,\text{جتا}\,\theta - ٤\,\text{جا}\,\theta)^{٢}$

$= ٢٥ + م^{٢}$

$\therefore ٩\,\text{جا}^{٢}\theta + ١٦\,\text{جتا}^{٢}\theta + ٢٤\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$+ ٩\,\text{جتا}^{٢}\theta + ١٦\,\text{جا}^{٢}\theta$

$- ٢٤\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢٥ + م^{٢}$

$\therefore ٢٥ (\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta) = ٢٥ + م^{٢}$

$\therefore ٢٥ (١) = ٢٥ + م^{٢}$

∴ م² = صفر ومنها م = صفر

$\therefore ٣\,\text{جتا}\,\theta - ٤\,\text{جا}\,\theta =$ صفر

(٦) $\because \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta = ٨ \qquad \therefore \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = ٨$

$\therefore \dfrac{\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta} = ٨ \qquad \therefore \dfrac{١}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta} = ٨$

$\therefore \text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = \dfrac{١}{٨}$

$، \because (\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)^{٢}$

$= \text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= ١ + ٢ \times \dfrac{١}{٨} = \dfrac{٥}{٤}$

$، \because \theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

$\therefore \text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \dfrac{\sqrt{٥}}{٢}$

(٧) $\sqrt{\text{قا}^{٢}\theta + \text{قتا}^{٢}\theta} = \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\theta + ١ + \text{ظتا}^{٢}\theta}$

$= \sqrt{\text{ظا}^{٢}\theta + ٢ + \text{ظتا}^{٢}\theta}$

$= \sqrt{(\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta)^{٢}}$

$= |\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta|$

$، \because \theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

$\therefore \sqrt{\text{قا}^{٢}\theta + \text{قتا}^{٢}\theta} = \text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta$

(٨) $\because \text{جا}\,أ + \text{جا}^{٢}\,أ = ١$

$\therefore \text{جا}\,أ = ١ - \text{جا}^{٢}\,أ = \text{جتا}^{٢}\,أ$

$\therefore \text{جتا}^{٢}\,أ + \text{جتا}^{٤}\,أ = \text{جا}\,أ + \text{جا}^{٢}\,أ = ١$

(٩) $\because \text{جا}^{٢}\theta + \text{جا}^{٢}\,٢\theta + \text{جا}^{٢}\,٣\theta$

$+ \ldots + \text{جا}^{٢}\,١٠٠\theta = ن$ (١)

وبوضع $\text{جتا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\,٢\theta + \text{جتا}^{٢}\,٣\theta$

$+ \ldots + \text{جتا}^{٢}\,١٠٠\theta = م$ (٢)

بجمع (١) ، (٢):

$\therefore (\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta) + (\text{جا}^2 2\theta + \text{جتا}^2 2\theta)$

$+ \dots + (\text{جا}^2 100\theta + \text{جتا}^2 100\theta) = \text{ن} + \text{م}$

$\therefore 1 + 1 + \dots + 1 = \text{ن} + \text{م}$

$\therefore \text{ن} + \text{م} = 100 \qquad \therefore \text{م} = 100 - \text{ن}$

(١٠) $\because \text{جا}^2 89^\circ = \text{جا}^2(90^\circ - 1^\circ) = \text{جتا}^2 1^\circ$

وبالمثل $\text{جا}^2 88^\circ = \text{جتا}^2 2^\circ$ ، ... وهكذا

$\therefore \text{جا}^2 1 + \text{جا}^2 2^\circ + \text{جا}^2 3^\circ + \dots + \text{جا}^2 45^\circ$

$+ \dots + \text{جا}^2 88 + \text{جا}^2 89 + \text{جا}^2 90^\circ$

$= \text{جا}^2 1^\circ + \text{جا}^2 2^\circ + \text{جا}^2 3^\circ + \dots + \text{جا}^2 45^\circ$

$+ \dots + \text{جتا}^2 2^\circ + \text{جتا}^2 1^\circ + \underline{\underline{\text{جا}^2 90^\circ}}$

$= (\text{جا}^2 1^\circ + \text{جتا}^2 1^\circ) + (\text{جا}^2 2 + \text{جتا}^2 2) + \dots$

$+ (\text{جا}^2 44^\circ + \text{جتا}^2 44^\circ) + \text{جا}^2 45^\circ + \text{جا}^2 90^\circ$

$= 1 \times 44 + \frac{1}{2} + 1 = 45\frac{1}{2}$

(١١) $\because \text{جتا}\,179^\circ = -\text{جتا}\,1^\circ$ ، $\text{جتا}\,178^\circ = -\text{جتا}\,2^\circ$

$\therefore \text{المقام} = \text{جتا}\,1^\circ + \text{جتا}\,2^\circ + \text{جتا}\,3^\circ + \dots$

$+ \text{جتا}\,90^\circ + \text{جتا}\,91^\circ + \dots + \text{جتا}\,179^\circ$

$+ \text{جتا}\,180^\circ$

$= (\text{جتا}\,1^\circ + \text{جتا}\,179^\circ) + (\text{جتا}\,2^\circ + \text{جتا}\,178^\circ)$

$+ \dots (\text{جتا}\,89^\circ + \text{جتا}\,91^\circ) + \text{جتا}\,90 + \text{جتا}\,180$

$= \text{صفر} + \text{صفر} + \dots + \text{صفر} + (-1) = -1$

، $\text{البسط} = \text{جتا}^2 1^\circ + \text{جتا}^2 2^\circ + \text{جتا}^2 3^\circ + \dots$

$+ \text{جتا}^2 89^\circ + \text{جتا}^2 90^\circ + \text{جتا}^2 91^\circ$

$+ \text{جتا}^2 92^\circ + \text{جتا}^2 93^\circ + \dots + \text{جتا}^2 179^\circ + \text{جتا}^2 180^\circ$

$= \text{جتا}^2 1^\circ + \text{جتا}^2 2 + \text{جتا}^2 3^\circ + \dots$

$+ \text{جتا}^2 89^\circ + \text{صفر} + \text{جتا}^2 1^\circ$

$+ \text{جتا}^2 2^\circ + \text{جتا}^2 3^\circ + \dots$

$+ \text{جتا}^2 89^\circ + (-1)^2 = 1 \times 89 + 1 = 90$

$\therefore \text{المقدار} = \frac{90}{-1} = -90$

٢

$\text{الطرف الأيمن} = \text{جا}^6\theta + \text{جتا}^6\theta$

$= (\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta)$

$(\text{جا}^4\theta - \text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta + \text{جتا}^4\theta)$

$= 1 \times (\text{جا}^4\theta + 2\,\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta$

$+ \text{جتا}^4\theta - 3\,\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta)$

$= (\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta)^2 - 3\,\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta$

$= 1 - 3\,\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta$

$= \text{الطرف الأيسر}$

٣

$\because \text{جتا}\,\theta = \frac{1}{\text{وحـ}}$

، $\because \text{وحـ} = 1 + \text{جا}\,\theta \qquad \therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{1}{1 + \text{جا}\,\theta}$

وبالضرب × $(1 - \text{جا}\,\theta)$ بسطًا ومقامًا

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{1}{1 + \text{جا}\,\theta} \times \frac{1 - \text{جا}\,\theta}{1 - \text{جا}\,\theta}$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{1 - \text{جا}\,\theta}{1 - \text{جا}^2\theta}$

، $\because 1 - \text{جا}^2\theta = \text{جتا}^2\theta \qquad \therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{1 - \text{جا}\,\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

$\therefore \text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جا}\,\theta \qquad \therefore \text{جتا}^2\theta + \text{جا}\,\theta = 1$

إرشادات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (ب)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)
(٩) (د)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (د)
(١٣) (أ)	(١٤) (أ)	(١٥) (أ)	(١٦) (أ)
(١٧) (د)	(١٨) (جـ)	(١٩) (د)	(٢٠) (د)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (أ)	(٢٦) (جـ)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (د)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (أ)	(٣١) (د)	(٣٢) (ب)

(٣٣) (د)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (جـ)	(٣٦) (ب)
(٣٧) (ب)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (ب)	(٤٠) (د)
(٤١) (جـ)	(٤٢) (جـ)	(٤٣) (د)	(٤٤) (أ)
(٤٥) (جـ)	(٤٦) (أ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $\because \text{جا}\,\theta = \frac{1}{2}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول $\qquad \therefore \theta = 30^\circ$

أ، θ تقع في الربع الثاني

$\therefore \theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ + 2\text{ن}\pi$ أ، $\theta = 150 + 2\text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو :

$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\text{ن}\pi$ أ، $\frac{5\pi}{6} + 2\text{ن}\pi$

(٢) $\because \text{جتا}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول $\qquad \therefore \theta = 45^\circ$

أ، θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ وهي تكافئ -45

$\therefore \theta = 45^\circ + 2\text{ن}\pi$ أ، $\theta = -45 + 2\text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + 2\text{ن}\pi$

(٣) $\because \text{ظا}\,\theta = \sqrt{3}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول $\qquad \therefore \theta = 60^\circ$

أ، θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ + \text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو $\theta = \frac{\pi}{3} + \text{ن}\pi$

(٤) $\because \text{جا}\,\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

أ، θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$\therefore \theta = 240^\circ + 2\text{ن}\pi$

أ، $\theta = 300^\circ + 2\text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2\text{ن}\pi$

أ، $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2\text{ن}\pi$

(٥) $\because \text{جتا}\,\theta = -\frac{1}{2}$ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$\therefore \theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

أ، θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ وهي تكافئ -120°

$\therefore \theta = 120^\circ + 2\text{ن}\pi$

أ، $\theta = -120^\circ + 2\text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\text{ن}\pi$

(٦) $\because \text{ظا}\,\theta = -1$ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$\therefore \theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

أ، θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

$\therefore \theta = 135^\circ + \text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \frac{3\pi}{4} + \text{ن}\pi$

(٧) $\because \text{قتا}\,\theta = -2 \qquad \therefore \text{جا}\,\theta = -\frac{1}{2}$ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

أ، θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

$\therefore \theta = 210^\circ + 2\text{ن}\pi$

أ، $\theta = 330^\circ + 2\text{ن}\pi$

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\text{ن}\pi$

أ، $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2\text{ن}\pi$

(٨) ∵ قا θ = √٢ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٤٥°

أو θ تقع في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥° وهي تكافئ −٤٥°

∴ θ = ٤٥° + ٢ ن π

أو θ = −٤٥° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± $\frac{π}{٤}$ + ٢ ن π

(٩) ∵ ظتا θ = −√٣ ∴ ظا θ = −$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

أو θ تقع في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

∴ θ = ١٥٠° + ن π

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{٥π}{٦}$ + ن π

(١٠) ∵ ٢ جتا θ − √٣ = ٠

∴ جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٣٠°

أو θ تقع في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠° وهي تكافئ −٣٠°

∴ θ = ± ٣٠° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± $\frac{π}{٦}$ + ٢ ن π

(١١) ∵ ٢ جا θ + √٢ = ٠

∴ جا θ = −$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثالث

∴ θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

أو θ تقع في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ θ = ٢٢٥° + ٢ ن π

أو θ = ٣١٥° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{٥π}{٤}$ + ٢ ن π

أو θ = $\frac{٧π}{٤}$ + ٢ ن π

(١٢) ∵ جتا ($\frac{π}{٢}$ − θ) = $\frac{١}{٢}$

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٣٠°

أو θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ θ = ٣٠° + ٢ ن π

أو θ = ١٥٠° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{π}{٦}$ + ٢ ن π

أو θ = $\frac{٥π}{٦}$ + ٢ ن π

(١٣) ∵ ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠

∴ جتا θ (٢ جا θ + ٣) = ٠

∴ جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠°

أو θ = ٢٧٠° وهي تكافئ −٩٠°

∴ θ = ± ٩٠° + ٢ ن π

أو ٢ جا θ + ٣ = ٠

∴ جا θ = −$\frac{٣}{٢}$ (مرفوض)

∴ الحل العام هو : θ = ± $\frac{π}{٢}$ + ٢ ن π

(١٤) ∵ جا θ جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا θ

∴ جا θ جتا θ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا θ = ٠

∴ جا θ (جتا θ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٠

∴ جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠°

∴ θ = ن π

أو جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٣٠°

أو θ تقع في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠° أي تكافئ −٣٠°

∴ θ = ± ٣٠° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± $\frac{π}{٦}$ + ٢ ن π أو ن π

(١٥) ∵ ٢ جا² θ − √٢ جا θ = ٠

∴ جا θ (٢ جا θ − √٢) = ٠ ∴ جا θ = ٠

∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠°

∴ θ = ن π

أو ٢ جا θ − √٢ = ٠ ∴ جا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٤٥°

أو θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

∴ θ = ٤٥° + ٢ ن π أو θ = ١٣٥° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ن π

أو $\frac{π}{٤}$ + ٢ ن π ، أو $\frac{٣π}{٤}$ + ٢ ن π

(١٦) ∵ جتا² θ − جتا θ = ٠

∴ جتا θ (جتا θ − ١) = ٠ ∴ جتا θ = ٠

∴ θ = ٩٠° أو ٢٧٠° وهي تكافئ −٩٠°

∴ θ = ± ٩٠° + ٢ ن π

أو جتا θ − ١ = ٠ ∴ جتا θ = ١

∴ θ = ٠° ∴ θ = ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± ٩٠° + ٢ ن π

أو θ = ٢ ن π

(١٧) ∵ ٢ جا² θ = جا θ

∴ ٢ جا² θ − جا θ = ٠

∴ جا θ (٢ جا θ − ١) = ٠

∴ جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أو ١٨٠°

∴ θ = ن π

أو جا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٣٠°

أو θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ θ = ٣٠° + ٢ ن π

أو θ = ١٥٠° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ن π أو $\frac{π}{٦}$ + ٢ ن π

أو $\frac{٥π}{٦}$ + ٢ ن π

(١٨) ∵ √٢ جا θ جتا θ − جا θ = ٠

∴ جا θ (√٢ جتا θ − ١) = ٠ ∴ جا θ = ٠

∴ θ = ٠° أو θ = ١٨٠° ∴ θ = ن π

أو √٢ جتا θ − ١ = ٠ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول ∴ θ = ٤٥°

أو θ تقع في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥° أي تكافئ −٤٥°

∴ θ = ± ٤٥° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ن π أو ± $\frac{π}{٤}$ + ٢ ن π

(١٩) ∵ ٢ جتا² θ + جتا θ = ٠

∴ جتا θ (٢ جتا θ + ١) = ٠ ∴ جتا θ = ٠

∴ θ = ٩٠° أو θ = ٢٧٠° وهي تكافئ −٩٠°

∴ θ = ± ٩٠° + ٢ ن π

أو ٢ جتا θ + ١ = ٠

∴ جتا θ = −$\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أو θ تقع في الربع الثالث

∴ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° وهي تكافئ −١٢٠°

∴ θ = ± ١٢٠° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± $\frac{π}{٢}$ + ٢ ن π

أو ± $\frac{٢π}{٣}$ + ٢ ن π

(٢٠) ∵ ٢ جتا² θ + ٣ جتا θ + ١ = ٠

∴ (٢ جتا θ + ١) (جتا θ + ١) = ٠

∴ ٢ جتا θ + ١ = ٠

∴ جتا θ = −$\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أ، θ تقع فى الربع الثالث

∴ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ θ = ± ١٢٠° + ٢ ن π

أ، حتا θ + ١ = ٠

∴ حتا θ = −١ ∴ θ = ١٨٠°

∴ θ = ١٨٠° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± ٢π/٣ + ٢ ن π

أ، θ = π + ٢ ن π

٢

(١) ∵ ٢ حتا θ − ١ = ٠ ∴ حتا θ = ١/٢ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها ١/٢ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٦٠°، ٣٠٠°}

(٢) ∵ ٢ حا θ + ١ = ٠ ∴ حا θ = −١/٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها ١/٢ قياسها ٣٠°

∴ θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

أ، θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

∴ مجموعة الحل = {٢١٠°، ٣٣٠°}

(٣) ∵ ٢ حتا θ + √٣ = ٠

∴ حتا θ = −√٣/٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها √٣/٢ هى ٣٠°

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

أ، θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

∴ م.ح = {١٥٠°، ٢١٠°}

(٤) ∵ ظا θ − ١ = ٠ ∴ ظا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ م.ح = {٤٥°، ٢٢٥°}

(٥) ∵ ٣ قتا θ + ٢ = ٠ ∴ قتا θ = −٢/٣

∴ حا θ = −٣/٢ (أقل من −١) ∴ م.ح = ∅

(٦) ∵ ٤ حا θ + ٣ = ٠ ∴ حا θ = −٣/٤ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها ٣/٤ قياسها ٤٨° ٣٥′ ٢٥″

∴ θ = ١٨٠° + ٤٨° ٣٥′ ٢٥″ = ٢٢٨° ٣٥′ ٢٥″

أ، θ = ٣٦٠° − ٤٨° ٣٥′ ٢٥″ = ٣١١° ٢٤′ ٣٥″

∴ م.ح = {٢٢٨° ٣٥′ ٢٥″، ٣١١° ٢٤′ ٣٥″}

(٧) ∵ قا θ + √٢ = ٠ ∴ قا θ = −√٢

∴ حتا θ = −١/√٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها ١/√٢ قياسها ٤٥°

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ م.ح = {١٣٥°، ٢٢٥°}

(٨) ∵ ٤ ظا θ − ٥ = ٠

∴ ظا θ = ٥/٤ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ٥/٤ قياسها ٥١° ٢٠′ ٢٥″

∴ θ = ٥١° ٢٠′ ٢٥″

أ، θ = ١٨٠° + ٥١° ٢٠′ ٢٥″ = ٢٣١° ٢٠′ ٢٥″

∴ م.ح = {٥١° ٢٠′ ٢٥″، ٢٣١° ٢٠′ ٢٥″}

(٩) ∵ حا θ − ٢ حتا θ = ٠ ∴ حا θ = ٢ حتا θ

∴ ظا θ = ٢ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ٢ قياسها ٦٣° ٢٦′ ٩″

∴ θ = ٦٣° ٢٦′ ٩″

أ، θ = ١٨٠° + ٦٣° ٢٦′ ٩″ = ٢٤٣° ٢٦′ ٩″

∴ م.ح = {٦٣° ٢٦′ ٩″، ٢٤٣° ٢٦′ ٩″}

(١٠) ∵ حتا θ + ١ = ٠ ∴ حتا θ = −١

∴ θ = ١٨٠° ∴ م.ح = {١٨٠°}

(١١) ∵ حا θ حتا θ = ٠

∴ حا θ = ٠ ومنها θ = ٠°، ١٨٠°

أ، حتا θ = ٠ ومنها θ = ٩٠°، ٢٧٠°

∴ م.ح = {٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°}

(١٢) ∵ حا ٢٥° / حتا ٦٥° + ظا (٩٠° − θ) = ٠

∴ ١ + ظتا θ = ٠ ∴ ظتا θ = −١

∴ ظا θ = −١ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

أ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ م.ح = {١٣٥°، ٣١٥°}

(١٣) ∵ حتا (θ − ٥٠°) = ١/٢ (موجبة)

∴ (θ − ٥٠°) تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها ١/٢ قياسها ٦٠°

∴ θ − ٥٠° = ٦٠° ∴ θ = ١١٠°

أ، θ − ٥٠° = ٣٦٠° − ٦٠°

∴ θ − ٥٠° = ٣٠٠° ∴ θ = ٣٥٠°

∴ م.ح = {١١٠°، ٣٥٠°}

(١٤) ∵ ٤ حا² θ = ٣ ∴ حا² θ = ٣/٤

∴ حا θ = ± √٣/٢ ∴ حا θ = √٣/٢ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها √٣/٢ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أ، حا θ = −√٣/٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٦٠°، ١٢٠°، ٢٤٠°، ٣٠٠°}

(١٥) ∵ ٣ قا² θ = ٤ ∴ قا² θ = ٤/٣

∴ حتا² θ = ٣/٤ ∴ حتا θ = ± √٣/٢

∴ حتا θ = √٣/٢ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها √٣/٢ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

أ، حتا θ = −√٣/٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

أ، θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

∴ م.ح = {٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°}

(١٦) ∵ حا² θ − حتا² θ = ٠

∴ (حا θ − حتا θ) (حا θ + حتا θ) = ٠

، عندما حا θ − حتا θ = ٠ ∴ حا θ = حتا θ

∴ ظا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

أ، جا θ + جتا θ = ٠ ∴ جا θ = − جتا θ

∴ ظا θ = −١ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

أ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ م.ح = {٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥°}

(١٧) ∵ ٣ جتا² θ + ٢ جا θ جتا θ = ٠

∴ جتا θ (٣ جتا θ + ٢ جا θ) = ٠

∴ جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° أ، ٢٧٠°

أ، ٣ جتا θ + ٢ جا θ = ٠

∴ ٣ جتا θ = −٢ جا θ

∴ ظا θ = $-\frac{٣}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٢}$ قياسها ٥٦° ١٨′ ٣٦″

∴ θ = ١٨٠° − ٥٦° ١٨′ ٣٦″ = ١٢٣° ٤١′ ٢٤″

أ، θ = ٣٦٠° − ٥٦° ١٨′ ٣٦″ = ٣٠٣° ٤١′ ٢٤″

∴ م.ح = {٩٠° ، ١٢٣° ٤١′ ٢٤″ ، ٢٧٠° ، ٣٠٣° ٤١′ ٢٤″}

(١٨) ∵ ٤ جا² θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠

∴ جا θ (٤ جا θ − ٣ جتا θ) = ٠

∴ جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أ، ١٨٠°

أ، ٤ جا θ − ٣ جتا θ = ٠

∴ ٤ جا θ = ٣ جتا θ ∴ ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٤}$ قياسها ٣٦° ٥٢′ ١٢″

∴ θ = ٣٦° ٥٢′ ١٢″ أ، θ = ١٨٠° + ٣٦° ٥٢′ ١٢″ = ٢١٦° ٥٢′ ١٢″

∴ م.ح = {٠° ، ٣٦° ٥٢′ ١٢″ ، ١٨٠° ، ٢١٦° ٥٢′ ١٢″}

(١٩) ∵ ٤ ظا² θ + ٣ ظا θ = ٠

∴ ظا θ (٤ ظا θ + ٣) = ٠

∴ ظا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أ، ١٨٠°

أ، ٤ ظا θ + ٣ = ٠ ∴ ظا θ = $\frac{-٣}{٤}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{٣}{٤}$ قياسها ٣٦° ٥٢′ ١٢″

∴ θ = ١٨٠° − ٣٦° ٥٢′ ١٢″ = ١٤٣° ٧′ ٤٨″

أ، θ = ٣٦٠° − ٣٦° ٥٢′ ١٢″ = ٣٢٣° ٧′ ٤٨″

∴ م.ح = {٠° ، ١٤٣° ٧′ ٤٨″ ، ١٨٠° ، ٣٢٣° ٧′ ٤٨″}

(٢٠) ∵ ٢ جا² θ + جا θ − ١ = ٠

∴ (٢ جا θ − ١) (جا θ + ١) = ٠

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

أ، جا θ = −١ ∴ θ = ٢٧٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٧٠°}

(٢١) ∵ ظا² θ − $\frac{١}{ظتا θ}$ = ٠ ∴ ظا² θ − ظا θ = ٠

∴ ظا θ (ظا θ − ١) = ٠

∴ ظا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أ، ١٨٠°

أ، ظا θ − ١ = ٠ ∴ ظا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ م.ح = {٠° ، ٤٥° ، ١٨٠° ، ٢٢٥°}

٣

(١) ∵ ظا² θ − ظا θ = ٠

∴ ظا θ (ظا θ − ١) = ٠

∴ ظا θ = ٠ ∴ θ = ٠° أ، ١٨٠°

أ، ظا θ − ١ = ٠

∴ ظا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ م.ح = {٠° ، ٤٥° ، ١٨٠° ، ٢٢٥°}

(٢) ∵ ٢ جا θ جتا θ − جتا θ = ٠

∴ جتا θ (٢ جا θ − ١) = ٠

∴ جتا θ = ٠

∴ θ = ٩٠° أ، ٢٧٠° (مرفوض)

أ، ٢ جا θ − ١ = ٠ ∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠° ، ٩٠°}

٤

∵ جا θ جتا θ − $\frac{١}{٢}$ جتا θ = ٠

∴ جتا θ (جا θ − $\frac{١}{٢}$) = ٠

∴ جتا θ = ٠

∴ θ = ٩٠° أ، ٢٧٠° (مرفوض)

أ، جا θ − $\frac{١}{٢}$ = ٠ ∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ٩٠° ، ١٥٠°}

٥

(١) ∵ جتا θ = جا ٢θ

∴ ٢θ ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = ٣٠° + ١٢٠° ن

أ، θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{٢\pi}{٣}$ ن

أ، θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π

(٢) ∵ جتا ٢θ = جا θ

∴ θ ± ٢θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = ٣٠° + ١٢٠° ن

أ، −θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = −٩٠° − ٣٦٠° ن

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{٢\pi}{٣}$ ن

أ، θ = −$\frac{\pi}{٢}$ − ٢ ن π

(٣) ∵ جتا ٥θ = جا ٤θ

∴ ٤θ ± ٥θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٩θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = ١٠° + ٤٠° ن

أ، −θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = −٩٠° − ٣٦٠° ن

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{\pi}{١٨}$ + $\frac{٢\pi ن}{٩}$

أ، θ = −$\frac{\pi}{٢}$ − ٢ ن π

(٤) ∵ قا ٤θ = قتا ٢θ

∴ ٢θ ± ٤θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٦θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = ١٥° + ٦٠° ن

أ، −٢θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ = −٤٥° − ١٨٠° ن

∴ الحل العام هو : θ = $\frac{\pi}{١٢}$ + $\frac{\pi}{٣}$ ن

أ، θ = −$\frac{\pi}{٤}$ − π ن

٦

(١) ∵ ٢ جا^2 θ − ٥ جا θ + ٢ = ٠

∴ (٢ جا θ − ١) (جا θ − ٢) = ٠

∴ ٢ جا θ − ١ = ٠

∴ جا θ = $\frac{1}{2}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أ، الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $\frac{1}{2}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

أ، جا θ − ٢ = ٠

∴ جا θ = ٢ (مرفوض)

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠°}

(٢) ∵ ٤ جا^2 θ + ٨ جا θ + ٣ = ٠

∴ (٢ جا θ + ٣) (٢ جا θ + ١) = ٠

∴ جا θ = $-\frac{3}{2}$ (مرفوض)

أ، جا θ = $-\frac{1}{2}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ θ ∈]٠ ، π[

∴ المعادلة ليس لها حل فى الفترة المعطاة

∴ م.ح = ∅

(٣) ∵ ٢ ظا^2 θ − ظا θ − ١ = ٠

∴ (٢ ظا θ + ١) (ظا θ − ١) = ٠

∵ ٢ ظا θ + ١ = ٠

∴ ظا θ = $-\frac{1}{2}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\frac{1}{2}$ قياسها ٢٦° ٣٣َ ٥٤ً

∴ θ = ١٨٠° − ٢٦° ٣٣َ ٥٤ً = ١٥٣° ٢٦َ ٦ً

أ، θ = ٣٦٠° − ٢٦° ٣٣َ ٥٤ً

= ٣٣٣° ٢٦َ ٦ً (مرفوض)

أ، ظا θ − ١ = ٠ ∴ ظا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥°

= ٢٢٥° (مرفوض)

∴ م.ح = {٤٥° ، ١٥٣° ٢٦َ ٦ً}

(٤) ∵ ٢ قا^2 θ − ٧ قا θ + ٢ = ٠

∴ (قا θ − ٢) (٢ قا θ − ١) = ٠

∴ قا θ = ٢

∴ جتا θ = $\frac{1}{2}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{1}{2}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠°

= ٣٠٠° (مرفوض)

أ، ٢ قا θ − ١ = ٠ ∴ قا θ = $\frac{1}{2}$

∴ جتا θ = ٢ (مرفوض)

∴ م.ح = {٦٠°}

٧

∵ ٢ جتا θ + ١ = ٠ ∴ جتا θ = $-\frac{1}{2}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{1}{2}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أ، θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° (١)

، ∵ ظا θ − $\sqrt{3}$ = ٠ ∴ ظا θ = $\sqrt{3}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها $\sqrt{3}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلتين معًا قياسها ٢٤٠°

٨

∵ جا $\left(\frac{9\theta}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (موجبة)

∴ $\frac{9\theta}{4}$ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ قياسها ٤٥°

∴ $\frac{9\theta}{4}$ = ٤٥° ومنها θ = ٢٠° أ، $\frac{9\theta}{4}$ = ١٣٥°

ومنها θ = ٦٠° ∴ م.ح = {٢٠° ، ٦٠°}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (د)	(٤) (د)
(٥) (جـ)	(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (د)	(١٠) (جـ)	(١١) (أ)	

إرشادات لحل رقم ١

(١) الحل العام للمعادلة جا س = ٠ هو س = π ن

لكل ن ∈ ص

∴ عند ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

فإن : س = ٠ ، π ، ٢π ، ٣π ، ٤π ، ٥π

حيث س ∈ [٠ ، ٦π]

∴ عدد حلول المعادلة = ٦

(٢) ∵ جا أ ∈ [−١ ، ١] ، جا ب ∈ [−١ ، ١]

، ∵ جا أ + جا ب = ٢ ∴ جا أ = جا ب = ١

∴ أ = ب = ٩٠°

∴ جتا أ + جتا ب = جتا ٩٠° + جتا ٩٠° = صفر

(٣) ∵ جا س ∈ [−١ ، ١] ، جتا س ∈ [−١ ، ١]

، ∵ جتا س + جا س = ٢

∴ لابد وأن يكون جتا س = ١

وفى نفس الوقت جا س = ١

أى أن س = صفر° [و] س = ٩٠°

وهذا مستحيل ∴ م.ح = ∅

(٤) ∵ ٣ جا س = ظا س ∴ ٣ جا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

∴ ٣ جا س جتا س − جا س = ٠

∴ جا س (٣ جتا س − ١) = ٠

∴ جا س = ٠

ومنها س = صفر أ، ١٨٠° أ، ٣٦٠°

أ، جتا س = $\frac{1}{3}$

ومنها س = ٧٠° ٣٢َ أ، ٢٨٩° ٢٨َ

∴ عدد حلول المعادلة = ٥ حلول

(٥) ∵ ظا θ + ظتا θ = ٢ ∴ ظا θ + $\frac{1}{\text{ظا }\theta}$ = ٢

∴ ظا^2 θ − ٢ ظا θ + ١ = ٠

∴ (ظا θ − ١)^2 = ٠

∴ ظا θ = ١ ∴ ظتا θ = ١

∴ ظا^{2019} θ + ظتا^{2019} θ = (١)^{2019} + (١)^{2019} = ٢

(٦) ∵ الجذران متساويان ∴ ب^2 − ٤ أ جـ = ٠

∴ (٢)^2 − ٤ (١) (٢ جتا θ) = ٠

∴ ٤ − ٨ جتا θ = ٠

∴ جتا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{3}$ أ، $\frac{5\pi}{3}$

(٧) ∵ جا^2 س − جا س جتا س − جتا س + جا س = ٠

∴ جا س (جا س − جتا س)

+ (جا س − جتا س) = ٠

∴ (جا س − جتا س) (جا س + ١) = ٠

∴ جا س − جتا س = ٠ ومنها ظا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{4}$ أ، $\frac{5\pi}{4}$

أو جا س + ١ = ٠ ∴ جا س = −١

∴ س = $\frac{3\pi}{2}$

∴ مجموع حلول المعادلة = $\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}$

= ٣π

(٨) ∵ جتا ٢س = − جا ٢س ∴ ظا ٢س = −١

∴ ٢س = $\frac{٣}{٤}\pi + \text{ن}\pi$ حيث ن ∈ ص

∴ ٢س = $\frac{٣\pi}{٤}$ أو $\frac{٧\pi}{٤}$ أو $\frac{١١\pi}{٤}$

أو $\frac{١٥\pi}{٤}$ أو .....

∴ س = $\frac{٣\pi}{٨}$ أو $\frac{٧\pi}{٨}$ أو $\frac{١١\pi}{٨}$

أو $\frac{١٥\pi}{٨}$ أو .....

، ∵ س ∈ [٠ ، ٢π]

∴ مجموع حلول المعادلة

= $\frac{٣\pi}{٨} + \frac{٧\pi}{٨} + \frac{١١\pi}{٨} + \frac{١٥\pi}{٨} = \frac{٩}{٢}\pi$

(٩) لكي تكون للمعادلة حل وحيد موجب لابد أن يكون الطرف الأيمن مربع كامل

أي أن ظا θ + $\frac{١}{\text{ظا } \theta}$ = ٢

∴ $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} + \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$ = ٢ ∴ $\frac{\text{جا}^٢ \theta + \text{جتا}^٢ \theta}{\text{جا } \theta \text{ جتا } \theta}$ = ٢

∴ $\frac{١}{\text{جا } \theta \text{ جتا } \theta}$ = ٢ ∴ جا θ جتا θ = $\frac{١}{٢}$

(١٠) ∵ ٤ جتا س + ٣ جا س = ٣ (بتربيع الطرفين)

∴ ١٦ جتا² س + ٩ جا² س + ٢٤ جتا س جا س = ٩

∴ ٧ جتا² س + (٩ جتا² س + ٩ جا² س)

+ ٢٤ جتا س جا س = ٩

∴ ٧ جتا² س + ~~٩~~ + ٢٤ جتا س جا س = ~~٩~~

∴ جتا س (٧ جتا س + ٢٤ جا س) = ٠

∴ جتا س = ٠ ومنها س = ٩٠° مرفوضة

أو ٧ جتا س + ٢٤ جا س = ٠ ومنها ظا س = $\frac{-٧}{٢٤}$

(١١) ∵ ظتا θ − ظا θ = قا θ

∴ $\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta} - \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta} = \frac{١}{\text{جتا } \theta}$

حيث جا θ ≠ ٠ ، جتا θ ≠ ٠

∴ $\frac{\text{جتا}^٢ \theta - \text{جا}^٢ \theta}{\text{جا } \theta \text{ جتا } \theta} = \frac{١}{\text{جتا } \theta}$

∴ جتا² θ − جا² θ = جا θ

∴ ١ − جا² θ − جا² θ = جا θ

∴ ٢ جا² θ + جا θ − ١ = ٠

∴ (٢ جا θ − ١) (جا θ + ١) = ٠

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة هو $\frac{\pi}{٦}$

∴ θ = $(-١)^{\text{ن}} \times \frac{\pi}{٦} + \text{ن}\pi$

أو جا θ = −١ مرفوض لأن عندها جتا θ = ٠

٢

(١) ∵ ٢ جتا² θ + ١١ جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ − ٦ = ٠

∴ ٢ جتا² θ + ١١ جتا θ − ٦ = ٠

∴ (٢ جتا θ − ١) (جتا θ + ٦) = ٠

∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التي جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أو θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

أو جتا θ = −٦ (مرفوض)

∴ م.ح = {٦٠° ، ٣٠٠°}

(٢) ∵ ٤ جا θ + قتا θ − ٤ = ٠

∴ ٤ جا² θ − ٤ جا θ + ١ = ٠

∴ (٢ جا θ − ١)² = ٠ ∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

، ∵ الزاوية الحادة التي جيبها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أو θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠°}

(٣) ∵ جتا θ + ظا θ جا θ = $\sqrt{٢}$

∴ جتا θ + جتا θ = $\sqrt{٢}$

∴ جتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التي جيب تمامها $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أو θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ٣٣٠°}

(٤) ∵ ظا⁴ θ − ٣ ظا² θ + ٢ = ٠

∴ (ظا² θ − ١) (ظا² θ − ٢) = ٠

∴ ظا² θ = ١ ∴ ظا θ = ±١

، ∵ الزاوية الحادة التي ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أو θ = ١٣٥° أو θ = ٢٢٥°

أو θ = ٣١٥° أو ظا² θ = ٢

∴ ظا θ = ±$\sqrt{٢}$

، ∵ الزاوية الحادة التي ظلها $\sqrt{٢}$ قياسها ٥٤° ٤٤ََ ٨َ

∴ θ = ٥٤° ٤٤َ ٨ً أو θ = ١٢٥° ١٥َ ٥٢ً

أو θ = ٢٣٤° ٤٤َ ٨ً أو θ = ٣٠٥° ١٥َ ٥٢ً

∴ م.ح = {٤٥° ، ٥٤° ٤٤َ ٨ً ، ١٢٥° ١٥َ ٥٢ً

، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٢٣٤° ٤٤َ ٨ً

، ٣٠٥° ١٥َ ٥٢ً ، ٣١٥°}

(٥) ∵ ٢ جا θ جتا θ + ٢ جا θ − جتا θ − ١ = ٠

∴ ٢ جا θ (جتا θ + ١) − (جتا θ + ١) = ٠

∴ (جتا θ + ١) (٢ جا θ − ١) = ٠

∴ جتا θ = −١ ∴ θ = ١٨٠°

أو جا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

، ∵ الزاوية الحادة التي جيبها $\frac{١}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أو θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠°}

(٦) $\sqrt{٣}$ ظا² θ − (١ + $\sqrt{٣}$) ظا θ + ١ = ٠

∴ ($\sqrt{٣}$ ظا θ − ١) (ظا θ − ١) = ٠

∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التي ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ قياسها ٣٠°

∴ θ = ٣٠° أو θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

أو ظا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التي ظلها ١ قياسها ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أو θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ θ = {٣٠° ، ٤٥° ، ٢١٠° ، ٢٢٥°}

(٧) ∵ ظا² θ + قا² θ = ٧

∴ ظا² θ + ظا² θ + ١ = ٧

∴ ٢ ظا² θ = ٦ ∴ ظا² θ = ٣

∴ ظا θ = ±$\sqrt{٣}$ ∴ ظا θ = $\sqrt{٣}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التي ظلها $\sqrt{٣}$ قياسها ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أو θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

أو ظا θ = −$\sqrt{٣}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أو θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٦٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°}

(٨) ∵ ٦ ظا² θ + ٥ قا θ + ٥ = ٠

∴ ٦ (قا² θ − ١) + ٥ قا θ + ٥ = ٠

∴ ٦ قا² θ − ٦ + ٥ قا θ + ٥ = ٠

∴ ٦ قا² θ + ٥ قا θ − ١ = ٠

∴ (٦ قا θ − ١) (قا θ + ١) = ٠

∴ ٦ قا θ − ١ = ٠ ∴ قا θ = $\frac{١}{٦}$

∴ جتا θ = ٦ (مرفوض)

أو قا θ = −١ ∴ جتا θ = −١

∴ θ = ١٨٠° ∴ م.ح = {١٨٠°}

ارشادات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (أ)	(٦) (ب)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (أ)	(١٠) (د)	(١١) (د)	
(١٢) أولاً : (ب) ثانيًا : (د)		(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)
(١٥) (ب)	(١٦) (ب)	(١٧) (ب)	(١٨) (أ)
(١٩) (ب)	(٢٠) (أ)	(٢١) (د)	(٢٢) (أ)
(٢٣) (د)	(٢٤) (أ)	(٢٥) (ب)	(٢٦) (ب)
(٢٧) (ب)	(٢٨) (جـ)	(٢٩) (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ جا ٤٧° = $\frac{س}{٧}$ ∴ س = ٧ جا ٤٧°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : س ≈ ٤,٧٧ سم

، ∵ جتا ٤٧° = $\frac{ص}{٧}$ ∴ ص = ٧ جتا ٤٧°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ص ≈ ٥,١٢ سم

(٢) ∵ جا ٢٧° = $\frac{س}{١٢}$ ∴ س = ١٢ جا ٢٧°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : س ≈ ٥,٤٥ سم

، ∵ جتا ٢٧° = $\frac{ص}{١٢}$ ∴ ص = ١٢ جتا ٢٧°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ص ≈ ١٠,٦٩ سم

(٣) ∵ ظا ٥٦° = $\frac{٨}{س}$ ∴ س = $\frac{٨}{ظا ٥٦°}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : س ≈ ٥,٤ سم

، ∵ جا ٥٦° = $\frac{٨}{ص}$ ∴ ص = $\frac{٨}{جا ٥٦°}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ص ≈ ٩,٦٥ سم

٢

(١) ∵ ظا α = $\frac{٥}{٦}$ باستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

ق(∠ α) = ٢٠ً ٤٨َ ٣٩°

∴ ق(∠ β) = ٩٠° − ٢٠ً ٤٨َ ٣٩°

= ٤٠ً ١١َ ٥٠°

(٢) ∵ جا α = $\frac{٥}{١٣}$ باستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

ق(∠ α) = ١٢ً ٤٧َ ٢٢°

∴ ق(∠ β) = ٩٠° − ١٢ً ٤٧َ ٢٢° = ٤٨ً ١٢َ ٦٧°

(٣) ∵ ظا α = $\frac{٣}{٥}$ باستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

ق(∠ α) = ٥٠ً ٥٧َ ٣٠°

∴ ق(∠ β) = ٩٠° − ٥٠ً ٥٧َ ٣٠° = ١٠ً ٢َ ٥٩°

٣

(١) ∵ جاحـ = $\frac{أب}{أحـ}$

∴ $\frac{أب}{٢٥}$ = جا ١٨َ ٣٢°

∴ أب = ٢٥ × جا ١٨َ ٣٢°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

أب ≈ ١٣,٤ سم.

(٢) ∵ $\frac{بحـ}{أب}$ = ظا أ

∴ $\frac{١١}{أب}$ = ظا ٤٤َ ٦٢°

∴ أب = $\frac{١١}{ظا ٤٤َ ٦٢°}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أب ≈ ٨,٢ سم.

(٣) ∵ $\frac{أب}{أحـ}$ = جتا أ

∴ $\frac{أب}{٢١}$ = جتا ٨َ ٤٢°

∴ أب = ٢٤ × جتا ٨َ ٤٢°

وباستخدام حاسبة الجيب

نجد أن : أب ≈ ١٧,٨ سم.

٤

(١) ∵ جاحـ = $\frac{أب}{أحـ}$

∴ جاحـ = $\frac{١٢,٦}{١٨,٦}$

وباستخدام حاسبة

الجيب نجد أن : ق(∠حـ) ≈ ٣٩ً ٤٢°

(٢) ∵ جاحـ = $\frac{بحـ}{أحـ}$

∴ جاحـ = $\frac{٤٤}{٨٨}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

ق(∠حـ) ≈ ٩ً ٥٢°

(٣) ∵ ظاحـ = $\frac{أب}{بحـ}$

∴ ظاحـ = $\frac{٢٧,٢}{٢٠,٤}$

وباستخدام حاسبة الجيب

نجد أن : ق(∠حـ) ≈ ٨َ ٥٣°

٥

(١) ∵ ظا أ = $\frac{بحـ}{أب}$ = $\frac{٦}{٤}$

وباستخدام حاسبة

الجيب نجد أن :

ق(∠ أ) ≈ ٥٦°

، ق(∠حـ) = ٩٠° − ٥٦° = ٣٤°

، ∵ جا أ = $\frac{بحـ}{أحـ}$ ∴ جا ٥٦° = $\frac{٦}{أحـ}$

∴ أحـ = $\frac{٦}{جا ٥٦°}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أحـ ≈ ٧ سم

(٢) ∵ ظا أ = $\frac{بحـ}{أب}$ = $\frac{١٧,٦}{١٢,٥}$

وباستخدام حاسبة

الجيب نجد أن :

ق(∠ أ) ≈ ٥٥°

، ق(∠حـ) = ٩٠° − ٥٥° = ٣٥°

، ∵ جا أ = $\frac{بحـ}{أحـ}$ ∴ جا ٥٥° = $\frac{١٧,٦}{أحـ}$

∴ أحـ = $\frac{١٧,٦}{جا ٥٥°}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أحـ ≈ ٢١ سم

(٣) ∵ جتا أ = $\frac{أب}{أحـ}$

∴ جتا أ = $\frac{٥,٣}{١٢,٢}$

وباستخدام حاسبة

الجيب نجد أن :

ق(∠ أ) ≈ ٦٤°

∴ ق(∠حـ) = ٩٠° − ٦٤° = ٢٦°

، ∵ جا أ = $\frac{بحـ}{أحـ}$ ∴ جا ٦٤° = $\frac{بحـ}{١٢,٢}$

∴ بحـ = ١٢,٢ × جا ٦٤°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : بحـ ≈ ١١ سم

(٤) ∵ جا أ = $\frac{بحـ}{أحـ}$

∴ جا أ = $\frac{٣١}{٤٢}$

وباستخدام حاسبة

الجيب نجد أن :

ق(∠ أ) ≈ ٤٨°

∴ ق(∠حـ) = ٩٠° − ٤٨° = ٤٢°

، ∵ جتا أ = $\frac{أب}{أحـ}$ ∴ جتا ٤٨° = $\frac{أب}{٤٢}$

∴ أب = ٤٢ × جتا ٤٨°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أب ≈ ٢٨ سم

٦

(١) ∵ جاحـ = $\frac{أب}{أحـ}$

∴ جاحـ = $\frac{١٦,٢}{٢٤,٦}$

وباستخدام حاسبة الجيب

نجد أن : ق(∠حـ) = ١١ً ٤١°

∴ ق(∠ أ) = ٩٠° − ١١ً ٤١° = ٤٩ً ٤٨°

، ∵ جتاحـ = $\frac{بحـ}{أحـ}$

∴ بحـ = ٢٤,٦ جتا ١١ً ٤١°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : بحـ ≈ ١٨,٥ سم

(٢) ∵ ظا أ = $\frac{بحـ}{أب}$ = $\frac{٦٢}{٣٩}$

وباستخدام حاسبة

الجيب نجد أن :

ق(∠ أ) ≈ ٥٠َ ٥٧°

∴ ق(∠حـ) = ٩٠° − ٥٠َ ٥٧° = ١٠َ ٣٢°

، ∵ جا أ = ب جـ / أ جـ ∴ جا ٥٠َ ٥٧° = ٦٢ / أ جـ

∴ أ جـ = ٦٢ / جا ٥٠َ ٥٧°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ جـ ≃ ٧٣,٢ سم

(٣) ق(∠ أ) = ٩٠° − ٦٢°

= ٢٨°

، ∵ جا جـ = أ ب / أ جـ

∴ أ ب / ٧٦ = جا ٦٢°

∴ أ ب = ٧٦ جا ٦٢°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ ب ≃ ٦٧,١ سم

، ∵ جتا جـ = ب جـ / أ جـ ∴ ب جـ / ٧٦ = جتا ٦٢°

∴ ب جـ = ٧٦ × جتا ٦٢°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب جـ ≃ ٣٥,٦٨ سم

(٤) ق(∠ جـ) = ٩٠° − ٢٤َ ٤٢° = ٣٦َ ٤٧°

∵ ظا أ = ب جـ / أ ب

∴ ب جـ / ١٢ = ظا ٢٤َ ٤٢°

∴ ب جـ = ١٢ ظا ٢٤َ ٤٢°

وباستخدام حاسبة الجيب :

∴ ب جـ ≃ ١٠,٩٦ سم

، ∵ جتا أ = أ ب / أ جـ ∴ جتا ٢٤َ ٤٢° = ١٢ / أ جـ

∴ أ جـ = ١٢ / جتا ٢٤َ ٤٢°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

أ جـ ≃ ١٦,٢٥ سم.

٧

(١) ق(∠ جـ) = π/٢ − ١,١٦٩ ء

≃ ٠,٤٠٢ ء

، ∵ جتا أ = أ ب / أ جـ

∴ أ جـ = ١٨ / جتا ١,١٦٩ ء

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

أ جـ ≃ ٤٦,٠٢٧ سم

، ∵ ظا أ = ب جـ / أ ب

∴ ب جـ = ١٨ × ظا ١,١٦٩ ء

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب جـ ≃ ٤٢,٣٦٢ سم

(٢) ق(∠ أ) = π/٢ − ٠,٦٤٦ ء

≃ ٠,٩٢٥ ء

، ∵ جا جـ = أ ب / أ جـ

∴ أ ب = ١٥,٧ × جا ٠,٦٤٦ ء

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ ب ≃ ٩,٤٥١ سم

، ∵ جتا جـ = ب جـ / أ جـ

∴ ب جـ = ١٥,٧ × جتا ٠,٦٤٦ ء

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب جـ ≃ ١٢,٥٣٦ سم

(٣) ق(∠ أ) = π/٢ − ١,٠٨٢ ء

≃ ٠,٤٨٩ ء

، ∵ جتا جـ = ب جـ / أ جـ

∴ ب جـ = ٢٥,٨ × جتا ١,٠٨٢ ء

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ب جـ ≃ ١٦,٨١٠ سم

، ∵ جا جـ = أ ب / أ جـ

∴ أ ب = ٢٥,٨ × جا ١,٠٨٢ ء ≃ ٢١,٦٠٨ سم

٨

نرسم أ ء ⊥ ب جـ

يقطعه في ء

∴ ء منتصف ب جـ

من Δ أ ب ء : جتا ب = ب ء / أ ب = ٥/٧

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن :

ق(∠ ب) ≃ ٥٥ ٢٤َ ٤٤°

، ∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ جـ) = ٥٥ ٢٤َ ٤٤°

، ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° − ٢ × ٥٥ ٢٤َ ٤٤°

= ١٠ ١٠َ ٩١°

٩

نرسم أ ء ⊥ ب جـ

فتكون ء منتصف ب جـ

∴ ب ء = ½ ب جـ = ١٠ سم

في Δ أ ب ء : ∵ ب ء / أ ب = جتا ٥٤َ ٤٨°

∴ أ ب = ١٠ / جتا ٥٤َ ٤٨°

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : أ ب ≃ ١٥ سم

١٠

∵ (س ع)² = ٨٩٤,٠١

، (س ص)² + (ص ع)²

= ٨٩٤,٠١

∴ (س ص)² + (ص ع)² = (س ع)²

∴ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص

، ∵ جا س = ص ع / س ع ∴ جا س = ٢٧,٦ / ٢٩,٩

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق(∠ س) ≃ ٢٣َ ٦٧°

١١

∵ ∠ أ ب جـ زاوية محيطية

مرسومة في نصف دائرة

∴ ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

، ∵ جتا أ = أ ب / أ جـ ∴ جتا أ = ١٠ / ١٦

وباستخدام حاسبة الجيب : ∴ ق(∠ أ) ≃ ٤ ١٩َ ٥١°

∴ ق(∠ جـ) = ٩٠° − ٤ ١٩َ ٥١° = ٥٦ ٤٠َ ٣٨°

١٢

∵ م أ = م ب = نق

ونرسم م ء ⊥ أ ب

∴ ء منتصف أ ب

، ق(∠ أ م ء) = ١١٠° / ٢ = ٥٥°

، ∵ جا(∠ أ م ء) = أ ء / م أ

∴ جا ٥٥° = أ ء / ٧ ∴ أ ء = ٧ × جا ٥٥°

وباستخدام حاسبة الجيب : ∴ أ ء ≃ ٥,٧٣٤ سم

∴ أ ب = ٢ × ٥,٧٣٤ = ١١,٤٦٨ سم

١٣

نفرض أن :

أ جـ ∩ ب ء = {م}

∴ م منتصف كل من أ جـ ، ب ء

، أ جـ ⊥ ب ء (من خواص المعين)

∴ م أ = ½ أ جـ = ٩,٤ سم

، م ء = ½ ب ء = ١٢,٣ سم

في Δ أ م ء : ∵ ظا(∠ أ ء م) = م أ / م ء = ٩,٤ / ١٢,٣

وباستخدام حاسبة الجيب :

∴ ق(∠ أ ء م) ≃ ٣٧ ٢٣َ ٣٧°

∴ ق(∠ أ ء جـ) = ٢ × ٣٧ ٢٣َ ٣٧°

= ٣٤ ٤٦َ ٧٤° = ٤٧َ ٧٤°

١٤

نفرض أن :

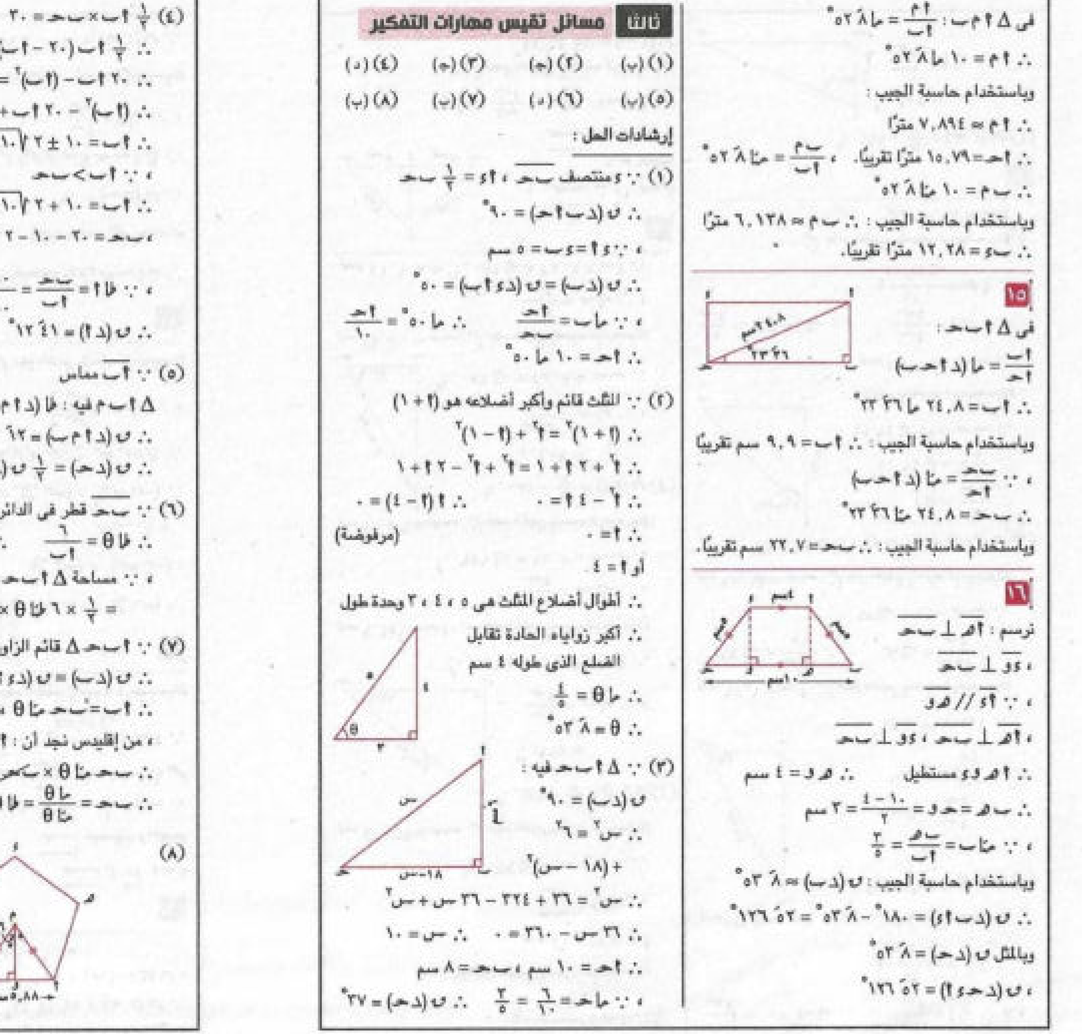
أ جـ ∩ ب ء = {م}

∴ م منتصف كل من أ جـ ، ب ء

، أ جـ ⊥ ب ء

، ب ء ينصف ∠ أ ب جـ (من خواص المعين)

∴ ق(∠ أ ب م) = ½ ق(∠ أ ب جـ) = ٨َ ٥٢°



في Δ أ م ب : أم / أب = جا ٨ ٥٢°

∴ أم = ١٠ جا ٨ ٥٢°

وباستخدام حاسبة الجيب :

∴ أم ≈ ٧,٨٩٤ مترًا

∴ أحـ = ١٥,٧٩ مترًا تقريبًا ، ب م / أب = جتا ٨ ٥٢°

∴ ب م = ١٠ جتا ٨ ٥٢°

وباستخدام حاسبة الجيب : ∴ ب م ≈ ٦,١٢٨ مترًا

∴ ب ء = ١٢,٢٨ مترًا تقريبًا.

١٥

في Δ أ ب حـ :

أب / أحـ = جا (∠ أ حـ ب)

∴ أب = ٢٤,٨ جا ٣٦ ٢٣°

وباستخدام حاسبة الجيب : ∴ أب = ٩,٩ سم تقريبًا

، ∵ ب حـ / أحـ = جتا (∠ أ حـ ب)

∴ ب حـ = ٢٤,٨ جتا ٣٦ ٢٣°

وباستخدام حاسبة الجيب : ∴ ب حـ = ٢٢,٧ سم تقريبًا.

١٦

نرسم : أهـ ⊥ ب حـ

، ء و ⊥ ب حـ

، ∵ أء // هـ و

، أهـ ⊥ ب حـ ، ء و ⊥ ب حـ

∴ أهـ و ء مستطيل ∴ هـ و = ٤ سم

∴ ب هـ = حـ و = (١٠ − ٤) / ٢ = ٣ سم

، ∵ جتا ب = ب هـ / أب = ٣/٥

وباستخدام حاسبة الجيب : ق(∠ ب) ≈ ٨ ٥٣°

∴ ق(∠ ب أ ء) = ١٨٠° − ٨ ٥٣° = ٥٢ ١٢٦°

وبالمثل ق(∠ حـ) = ٨ ٥٣°

، ق(∠ حـ ء أ) = ٥٢ ١٢٦°

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (ب) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب)

إرشادات الحل :

(١) ∵ ء منتصف ب حـ ، أء = ½ ب حـ

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠°

، ∵ أء = ب ء = ٥ سم

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ء أ ب) = ٥٠°

، ∵ جا ب = أحـ / ب حـ ∴ جا ٥٠° = أحـ / ١٠

∴ أحـ = ١٠ جا ٥٠°

(٢) ∵ المثلث قائم وأكبر أضلاعه هو (أ + ١)

∴ (أ + ١)² = أ² + (أ − ١)²

∴ أ² + ٢أ + ١ = أ² + أ² − ٢أ + ١

∴ أ² − ٤أ = ٠ ∴ أ (أ − ٤) = ٠

∴ أ = ٠ (مرفوضة)

أو أ = ٤

∴ أطوال أضلاع المثلث هي ٥ ، ٤ ، ٣ وحدة طول

∴ أكبر زواياه الحادة تقابل الضلع الذي طوله ٤ سم

∴ جا θ = ٤/٥

∴ θ = ٨ ٥٣°

(٣) ∵ Δ أ ب حـ فيه :

ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ س² = ٣٦ + (١٨ − س)²

∴ س² = ٣٦ + ٣٢٤ − ٣٦ س + س²

∴ ٣٦ س − ٣٦٠ = ٠ ∴ س = ١٠

∴ أحـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٨ سم

، ∵ جا حـ = ٦/١٠ = ٣/٥ ∴ ق(∠ حـ) = ٣٧°

(٤) ½ أب × ب حـ = ٣٠ ، ب حـ = ٢٠ − أب

∴ ½ أب (٢٠ − أب) = ٣٠

∴ ٢٠ أب − (أب)² = ٦٠

∴ (أب)² − ٢٠ أب + ٦٠ = ٠

∴ أب = ١٠ ± ٢√١٠ سم

، ∵ أب > ب حـ

∴ أب = ١٠ + ٢√١٠ سم

، ب حـ = ٢٠ − ١٠ − ٢√١٠ = ١٠ − ٢√١٠ سم

، ∵ ظا أ = ب حـ / أب = (١٠ − ٢√١٠) / (١٠ + ٢√١٠)

∴ ق(∠ أ) = ٤١ ١٢°

(٥) ∵ أب مماس ∴ ق(∠ أ) = ٩٠°

Δ أ ب م فيه : ظا (∠ أ م ب) = ٦/٥

∴ ق(∠ أ م ب) = ٦٢ ٥٠°

∴ ق(∠ حـ) = ½ ق(∠ أ م ب) = ٦ ٢٥°

(٦) ∵ ب حـ قطر في الدائرة ∴ ق(∠ أ) = ٩٠°

∴ ظا θ = ٦ / أب ∴ أب = ٦ / ظا θ = ٦ ظتا θ

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = ½ أب × أحـ

= ½ × ٦ ظتا θ × ٦ = ١٨ ظتا θ سم²

(٧) ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في أ ، أء ⊥ ب حـ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ء أ حـ) = θ

∴ أب = ب حـ جتا θ ، أحـ = ب حـ جا θ

، من إقليدس نجد أن : أب × أحـ = أء × ب حـ

∴ ب حـ جتا θ × ب حـ جا θ = جا² θ × ب حـ

∴ ب حـ = جا θ / جتا θ = ظا θ

(٨)

∵ الشكل خماسي منتظم ∴ أم = ب م = نق

(نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه)

، ق(∠ أ م ب) = ٣٦٠° / ٥ = ٧٢°

، ∵ م و ⊥ أب

∴ ق(∠ و م ب) = ٣٦°

∴ في Δ و ب م يكون : جا ٣٦° = و ب / نق

∴ نق = و ب / جا ٣٦° = (½ × ٥,٨٨) / جا ٣٦° ≈ ٥ سم

ارشادات تمارين 11

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (د)

(٥) (د) (٦) (ب) (٧) (جـ) (٨) (أ)

(٩) (ب) (١٠) (جـ) (١١) (ب) (١٢) (جـ)

(١٣) (جـ) (١٤) (جـ) (١٥) (د) (١٦) (د)

(١٧) (ب) (١٨) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

نفرض أن :

أب يمثل ارتفاع الشجرة

∵ ظا ٢٢° = أب / ٨

∴ أب = ٨ ظا ٢٢° = ٣,٢٣ مترًا

∴ ارتفاع الشجرة = ٣,٢٣ مترًا

٢

نفرض أن :

أب يمثل طول البرج

∵ ظا ٢١ ٣٩° = أب / ٥٠

∴ أب = ٥٠ × ظا ٢١ ٣٩°

∴ أب ≈ ٤١ مترًا ∴ ارتفاع البرج ≈ ٤١ مترًا

٣

نفرض أن : أ ب

يمثل ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ، أ حـ بعد الراصد عن الطائرة

∵ جا ٢٥° ١٧َ $= \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{أ حـ}}$

∴ أ حـ $= \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{جا ٢٥° ١٧َ}}$ ≃ ٢٣٤١,٤ مترًا

٤

نفرض أن : أ ب

يمثل ارتفاع الصخرة

∴ ظا حـ $= \frac{\text{١٨٠}}{\text{٣٠٠}}$

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٣٠° ٥٧َ ٥٠ً

∴ قياس زاوية الانخفاض بالراديان

$=$ ٣٠° ٥٧َ ٥٠ً × $\frac{\pi}{\text{١٨٠°}}$ = ٠,٥٤ ^ء^ تقريبًا

٥

نفرض أن : أ ب

يمثل ارتفاع الجبل

، أ حـ يمثل البعد بين النقطة (حـ) والراصد (أ)

∵ جا ٦٣° $= \frac{\text{٢٥٦٠}}{\text{أ حـ}}$

∴ أ حـ $= \frac{\text{٢٥٦٠}}{\text{جا ٦٣°}}$ ≃ ٢٨٧٣ متر

∴ بعد النقطة عن الراصد = ٢٨٧٣ متر تقريبًا

٦

نفرض أن : أ ب

يمثل ارتفاع المنارة

∵ ق(∠ حـ) = ٣١° ٦٤َ

∴ ظا ٣١° ٦٤َ $= \frac{\text{٢٠٠}}{\text{ب حـ}}$ ∴ ب حـ $= \frac{\text{٢٠٠}}{\text{ظا ٣١° ٦٤َ}}$

∴ ب حـ ≃ ٣٢٩,٨ مترًا

∴ بُعد القارب عن قاعدة المنارة = ٣٢٩,٨ مترًا تقريبًا.

٧

بفرض أن : أ ب

يمثل ارتفاع البرج

، حـ يمثل الجسم.

، ∵ ق(∠ حـ) = ٢٨° ٣٦َ ∴ ظا ٢٨° ٣٦َ $= \frac{\text{٦٠}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{٦٠}}{\text{ظا ٢٨° ٣٦َ}}$ ≃ ١١٠ مترًا

∴ بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٠ مترًا تقريبًا

٨

نفرض أن : $\overline{\text{أ ب}}$ يمثل عمود الإنارة

∴ ظا حـ $= \frac{\text{٧,٢}}{\text{٤,٨}}$

وباستخدام الآلة الحاسبة

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٠,٩٨٣ ^ء^

∴ قياس زاوية ارتفاع الشمس ≃ ٠,٩٨٣ ^ء^

٩

بفرض أن : $\overline{\text{أ ب}}$ يمثل البرج

، ∵ ق(∠ حـ) = ٣٥°

∴ ظا ٣٥° $= \frac{\text{١٦٠}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{١٦٠}}{\text{ظا ٣٥°}}$ ∴ ب حـ ≃ ٢٢٩ مترًا

∴ بعد الجسم عن قاعدة البرج = ٢٢٩ متر تقريبًا.

، ∵ جا ٣٥° $= \frac{\text{١٦٠}}{\text{أ حـ}}$ ∴ أ حـ $= \frac{\text{١٦٠}}{\text{جا ٣٥°}}$

∴ أ حـ ≃ ٢٧٩ مترًا

∴ بعد الجسم عن قمة البرج = ٢٧٩ مترًا تقريبًا.

١٠

بفرض أن : أ ب يمثل ارتفاع السلم عن الأرض

∴ ظا ٦٤° $= \frac{\text{٣,٨}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{٣,٨}}{\text{ظا ٦٤°}}$ ≃ ١,٨٥ متر

، ∵ جا ٦٤° $= \frac{\text{٣,٨}}{\text{أ حـ}}$

∴ أ حـ $= \frac{\text{٣,٨}}{\text{جا ٦٤°}}$ ≃ ٤,٢٣ متر

١١

نفرض أن :

$\overline{\text{أ ب}}$ يمثل المئذنة

أولًا : ظا ٢٦° ٤٦َ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{١٤٠}}$

∴ أ ب = ١٤٠ ظا ٢٦° ٤٦َ ≃ ٧١ متر

ثانيًا :

∵ ظا ء $= \frac{\text{٧١}}{\text{١١٠}}$

∴ ق(∠ ء) ≃ ٣٢° ٥٠َ

١٢

بفرض أن : أ ب يمثل

ارتفاع المنطاد

في Δ أ ب حـ :

∵ ق(∠ ب) = ٩٠°

، ق(∠ ب حـ أ) $= \frac{\pi}{\text{٤}}$ × $\frac{\text{١٨٠°}}{\pi}$ = ٤٥°

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ٤٥° ∴ ب أ = ب حـ = س

، ق(∠ ء) $= \frac{\pi}{\text{٦}}$ × $\frac{\text{١٨٠°}}{\pi}$ = ٣٠°

∴ ظا ء $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$ ∴ ظا ٣٠° $= \frac{\text{س}}{\text{(س + ٨٠٠)}}$

∴ $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\text{س}}{\text{س + ٨٠٠}}$ ∴ س + ٨٠٠ = $\sqrt{\text{٣}}$ س

∴ س − $\sqrt{\text{٣}}$ س = −٨٠٠

∴ س (١ − $\sqrt{\text{٣}}$) = −٨٠٠

∴ س $= \frac{\text{−٨٠٠}}{\text{١} - \sqrt{\text{٣}}}$ ≃ ١٠٩٣ متر

∴ ارتفاع المنطاد = ١٠٩٣ متر تقريبًا

١٣

نفرض أن : حـ ، ء يمثلان الرجلين ، السارية يمثلها $\overline{\text{أ ب}}$

في Δ أ ب حـ :

∵ ظا ٥٤° ١٦َ $= \frac{\text{١٢}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{١٢}}{\text{ظا ٥٤° ١٦َ}}$

= ٨,٦ مترًا

، في Δ أ ب ء : ∵ ظا ٤٧° ١٢َ $= \frac{\text{١٢}}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء $= \frac{\text{١٢}}{\text{ظا ٤٧° ١٢َ}}$ ≃ ١١,١ مترًا

، ∵ حـ ء = ب حـ + ب ء = ٨,٦ + ١١,١ = ١٩,٧ مترًا

∴ البعد بين الرجلين = ١٩,٧ متر تقريبًا

١٤

في Δ أ ب ء :

∵ ظا ٤٥° ٣٦َ $= \frac{\text{٥٠}}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء $= \frac{\text{٥٠}}{\text{ظا ٤٥° ٣٦َ}}$

≃ ٤٩ مترًا

، في Δ أ ب حـ : ∵ ظا ٥٢° ١٣َ $= \frac{\text{٥٠}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{٥٠}}{\text{ظا ٥٢° ١٣َ}}$ ≃ ٣٨,٨ متر.

∵ حـ ء = ب ء − ب حـ = ٤٩ − ٣٨,٨ = ١٠,٢ مترًا.

١٥

بفرض أن : حـ ء

يمثل البعد بين السفينتين

∴ في Δ أ ب ء :

ظا ٤١° ٣٥َ $= \frac{\text{٦٠}}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء $= \frac{\text{٦٠}}{\text{ظا ٤١° ٣٥َ}}$ ≃ ٦٧,٦ متر

، في Δ أ ب حـ : ظا ٤٧° $= \frac{\text{٦٠}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{٦٠}}{\text{ظا ٤٧°}}$ ≃ ٥٦ متر تقريبًا.

∴ حـ ء = ب ء − ب حـ = ٦٧,٦ − ٥٦ ≃ ١٢ متر

١٦

بفرض أن : $\overline{\text{ء ب}}$ يمثل البرج

، أ ء يمثل سارية العلم

∴ في Δ أ ب حـ : ظا ٥٦° $= \frac{\text{أ ب}}{\text{٨٥}}$

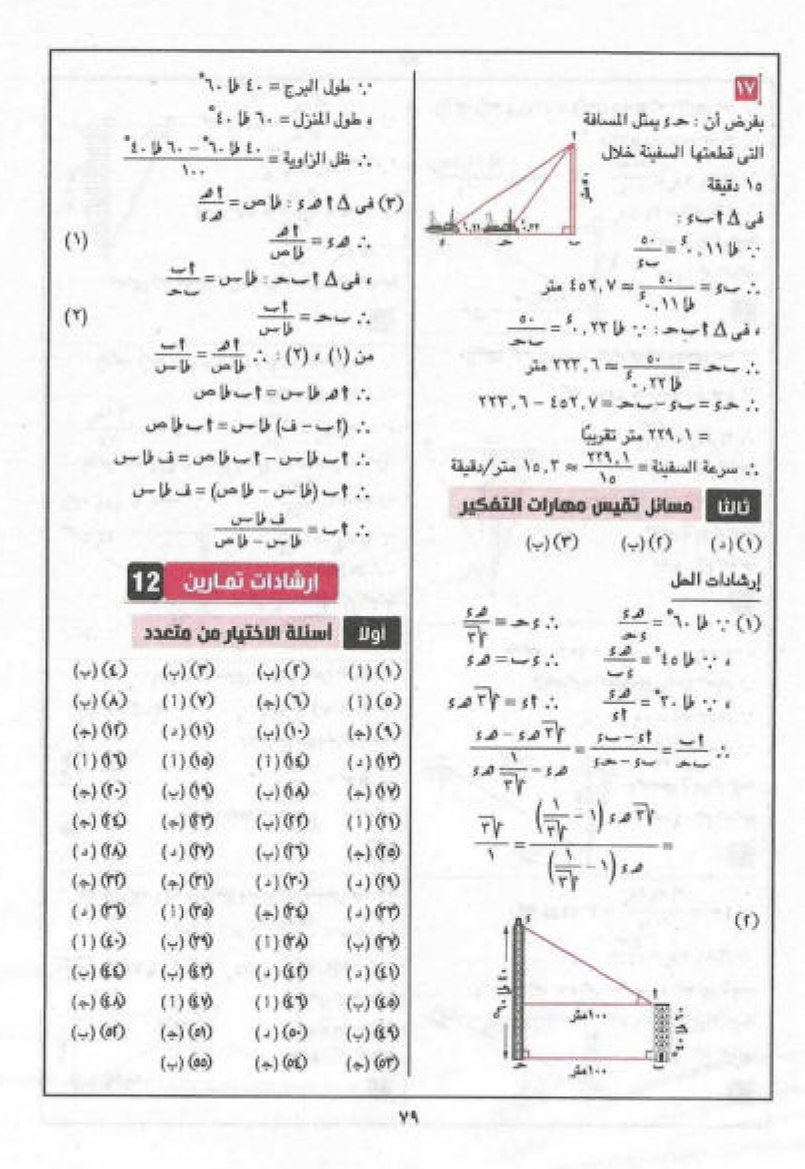
∴ أ ب = ٨٥ ظا ٥٦° ≃ ١٢٦ متر

، في Δ ء ب حـ : ظا ٥٤° $= \frac{\text{ء ب}}{\text{٨٥}}$

∴ ء ب = ٨٥ ظا ٥٤° ≃ ١١٧ متر

∴ أ ء = أ ب − ء ب = ١٢٦ − ١١٧ = ٩ أمتار

١٧



بفرض أن : حـ ء يمثل المسافة التي قطعتها السفينة خلال ١٥ دقيقة

في Δ أ ب ء :

∵ ظا ١١ ٬٠ $= \frac{٥٠}{\text{ب ء}}$

∴ ب ء $= \frac{٥٠}{\text{ظا } ١١ ٬٠} \approx ٤٥٢,٧$ متر

، في Δ أ ب حـ : ∵ ظا ٢٢ ٬٠ $= \frac{٥٠}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{٥٠}{\text{ظا } ٢٢ ٬٠} \approx ٢٢٣,٦$ متر

∴ حـ ء = ب ء − ب حـ = ٤٥٢,٧ − ٢٢٣,٦

= ٢٢٩,١ متر تقريبًا

∴ سرعة السفينة $= \frac{٢٢٩,١}{١٥} \approx ١٥,٣$ متر/دقيقة

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د)   (٢) (ب)   (٣) (ب)

إرشادات الحل

(١) ∵ ظا ٦٠° $= \frac{\text{هـ ء}}{\text{ء حـ}}$ ∴ ء حـ $= \frac{\text{هـ ء}}{\sqrt{٣}}$

، ∵ ظا ٤٥° $= \frac{\text{هـ ء}}{\text{ء ب}}$ ∴ ء ب = هـ ء

، ∵ ظا ٣٠° $= \frac{\text{هـ ء}}{\text{ء أ}}$ ∴ ء أ $= \sqrt{٣}$ هـ ء

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء أ} - \text{ب ء}}{\text{ب ء} - \text{ء حـ}} = \frac{\sqrt{٣}\ \text{هـ ء} - \text{هـ ء}}{\text{هـ ء} - \frac{١}{\sqrt{٣}}\ \text{هـ ء}}$

$= \frac{\sqrt{٣}\ \text{هـ ء}\left(١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)}{\text{هـ ء}\left(١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)} = \frac{\sqrt{٣}}{١}$

(٢)

∵ طول البرج = ٤٠ ظا ٦٠°

، طول المنزل = ٦٠ ظا ٤٠°

∴ ظل الزاوية $= \frac{٤٠\ \text{ظا}\ ٦٠° - ٦٠\ \text{ظا}\ ٤٠°}{١٠٠}$

(٣) في Δ أ هـ ء : ظا ص $= \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}}$

∴ هـ ء $= \frac{\text{أ هـ}}{\text{ظا ص}}$ (١)

، في Δ أ ب حـ : ظا س $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ $= \frac{\text{أ ب}}{\text{ظا س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ظا ص}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ظا س}}$

∴ أ هـ ظا س = أ ب ظا ص

∴ (أ ب − ف) ظا س = أ ب ظا ص

∴ أ ب ظا س − أ ب ظا ص = ف ظا س

∴ أ ب (ظا س − ظا ص) = ف ظا س

∴ أ ب $= \frac{\text{ف ظا س}}{\text{ظا س} - \text{ظا ص}}$

إرشادات تمارين 12

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (ب)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (أ)	(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (ب)
(٩) (جـ)	(١٠) (ب)	(١١) (د)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (أ)	(١٥) (أ)	(١٦) (أ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (د)	(٢٨) (د)
(٢٩) (د)	(٣٠) (د)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (جـ)
(٣٣) (د)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (أ)	(٣٦) (د)
(٣٧) (ب)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (ب)	(٤٠) (أ)
(٤١) (د)	(٤٢) (د)	(٤٣) (ب)	(٤٤) (ب)
(٤٥) (ب)	(٤٦) (أ)	(٤٧) (أ)	(٤٨) (جـ)
(٤٩) (ب)	(٥٠) (د)	(٥١) (جـ)	(٥٢) (ب)
(٥٣) (جـ)	(٥٤) (جـ)	(٥٥) (ب)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ = ٤٨$ سم²

٢

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق

$= \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ٩ = ٧٢$ سم²

٣

مساحة القطاع $= \pi$ نق² $\times \frac{\text{س}°}{٣٦٠°}$

$= \pi \times (٣,٥)^٢ \times \frac{٣٠°}{٣٦٠°} \approx ٣$ سم²

٤

مساحة القطاع $= \pi$ نق² $\times \frac{\text{س}°}{٣٦٠°}$

$= \pi \times ١٠٠ \times \frac{١٢٠°}{٣٦٠°} \approx ١٠٤,٧$ سم²

٥

مساحة القطاع $= \pi$ نق² $\times \frac{\text{س}°}{٣٦٠°}$

$= \pi \times ٣٦ \times \frac{٤٠°}{٣٦٠°} \approx ١٣$ سم²

٦

مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}\theta^{ء}$ نق² $= \frac{١}{٢} \times ١,٢^{ء} \times ١٠٠$

$= ٦٠$ سم²

٧

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∴ ٢٥ = ٢ نق + ٧

∴ ٢ نق = ١٨

∴ نق = ٩ سم

∴ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق $= \frac{١}{٢} \times ٧ \times ٩ = ٣١,٥$ سم²

٨

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∴ ٢٨ = ١٤ + ل   ∴ ل = ١٤ سم

∴ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق $= \frac{١}{٢} \times ١٤ \times ٧$

$= ٤٩$ سم²

، $\theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{ء}$

، $\theta^{ء} = ٢^{ء} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \approx ١١٤\ ٣٥$ °

٩

∵ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق

∴ $٢٧٠ = \frac{١}{٢} \times$ ل $\times ١٥$

∴ ل = ٣٦ سم ، $\theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٣٦}{١٥} = ٢,٤^{ء}$

١٠

∵ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق

∴ $٤٠ = \frac{١}{٢} \times ٨ \times$ نق   ∴ نق = ١٠ سم

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ١٠ + ٨ = ٢٨ سم

١١

∵ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}\theta^{ء}$ نق²

∴ $٢٥ = \frac{١}{٢} \times ٠,٥^{ء} \times$ نق²   ∴ نق = ١٠ سم

، ∵ مساحة القطاع $= \frac{١}{٢}$ ل نق

∴ $٢٥ = \frac{١}{٢} \times$ ل $\times ١٠$ ∴ ل = ٥ سم

١٢

س° $= \frac{٢}{٥} \times ٣٦٠° = ١٤٤°$

، $\theta^{ء} = \frac{٢}{٥} \times ٢\pi = ٢,٥١^{ء}$

، ∵ ل = $\theta^{ء}$ نق ∴ ل = ٢,٥١ × ١٠ = ٢٥,١ سم

∴ محيط القطاع = ل + ٢ نق = ٢٥,١ + ٢ × ١٠

$= ٤٥,١ \approx ٤٥$ سم

١٣

شكل (١) :

مساحة ربع الدائرة

$= \frac{1}{4}\pi$ نق^{2}

$= \frac{\pi \times ٦^{2}}{٤} = ٩\pi$ سم^{2}

مساحة نصف الدائرة $= \frac{1}{2}\pi$ نق^{2} $= \frac{1}{2} \times \pi \times ٣^{2}$

$= ٤,٥\,\pi$ سم^{2}

∴ مساحة الجزء المظلل $= ٩\pi - ٤,٥\,\pi$

$= ٤,٥\,\pi$ سم^{2}

شكل (٢) :

مساحة الجزء المظلل

= مساحة القطاع م أ ب

− مساحة القطاع م حـ ء

$= \frac{1}{4}\pi \times (٦)^{2}$

$- \frac{1}{4}\pi\,(٥)^{2} = ٢,٧٥\,\pi$ سم^{2}

شكل (٣) :

مساحة الجزء المظلل

= مساحة القطاع م أ ب

− مساحة القطاع م حـ ء

$= \pi \times ٥^{2} \times \frac{٦٠^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} - \pi \times ٢^{2} \times \frac{٦٠^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}}$

$= \frac{٧\pi}{٢}$ سم^{2}

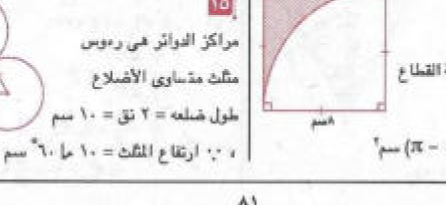
شكل (٤) :

مساحة الجزء المظلل

= مساحة المربع − مساحة القطاع

$= ٨^{2} - \frac{1}{4}\pi \times ٨^{2}$

$= ٦٤ - ١٦\pi = ١٦\,(٤ - \pi)$ سم^{2}



شكل (٥) :

∵ $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، م أ = م ب = نق

∴ Δ أ م حـ ≡ Δ ب م حـ

∴ مساحة Δ أ م حـ = مساحة Δ م حـ ب

∴ مساحة الجزء المظلل = مساحة القطاع (م ء ب)

$= \frac{1}{2}\theta^{ر}$ نق^{2} $= \frac{1}{2} \times ٠,٨^{ر} \times (٣)^{2} = ٣,٦$ سم^{2}

شكل (٦) :

مساحة الجزء المظلل

= مساحة المثلث

− مساحة القطاع

$= \frac{1}{2} \times ٧ \times ٢٤ - \frac{1}{2}\theta^{ر} \times (٧)^{2}$

$= (٨٤ - ٢٤,٥\,\theta^{ر})$ سم^{2}

، من المثلث القائم الزاوية

∴ ظا $\theta^{ر} = \frac{٢٤}{٧}$ ∴ $\theta^{ر} = ١,٢٨٧^{ر}$

∴ مساحة الجزء المظلل = ٥٢,٥ سم^{2}

١٤

∵ جا (∠ أ م ء) $= \frac{٦}{٧,٥} = ٠,٨$

∴ ق (∠ أ م ء) $= ٥٣^{\circ}\,٨'$

∴ ق (∠ أ م ب) $= ١٠٦^{\circ}\,١٦'$

∴ مساحة القطاع $= \frac{١٠٦^{\circ}\,١٦'}{٣٦٠^{\circ}} \times (٧,٥)^{2} \times \pi$

= ٥٢ سم^{2}

١٥

مراكز الدوائر هي رءوس

مثلث متساوي الأضلاع

طول ضلعه = ٢ نق = ١٠ سم

، ∵ ارتفاع المثلث = ١٠ جا ٦٠° سم

∴ مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ١٠ \times ١٠$ جا ٦٠°

= ٤٣,٣ سم^{2}

∵ $\theta^{\circ} = ٦٠^{\circ}$ ∴ $\theta^{ر} = ٦٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٣}$

∴ مساحة القطاعات الثلاثة $= ٣ \times \frac{1}{2}\theta^{ر}$ نق^{2}

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{\pi}{٣} \times ٢٥ \approx ٣٩,٣$ سم^{2}

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين الدوائر

= ٤٣,٣ − ٣٩,٣ = ٤ سم^{2} تقريبًا.

١٦

∵ Δ م أ ب قائم الزاوية

في ب ، م ب $= \frac{1}{2}$ م أ

∴ ق (∠ ب م أ) = ٦٠°

∴ ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°

، ∵ أ ب = ١٠,٣٩٢ سم (فيثاغورس)

∴ مساحة Δ أ م ب $= \frac{1}{2} \times ٦ \times ١٠,٣٩٢$

= ٣١,١٧٧ سم^{2}

∴ مساحة الشكل أ ب م حـ = ٣١,١٧٧ × ٢

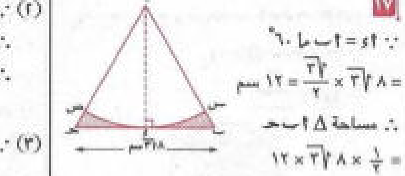
= ٦٢,٣٥٤ سم^{2}

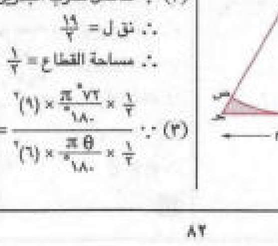
، ∵ مساحة القطاع ب م حـ

$= \frac{١٢٠^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times ٦^{2} \times \pi = ٣٧,٦٩٩$ سم^{2}

∴ المساحة المطلوبة = ٦٢,٣٥٤ − ٣٧,٦٩٩ = ٢٥ سم^{2}

١٧





∵ أ ء = أ ب جا ٦٠°

$= ٨\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٢$ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ

$= \frac{1}{2} \times ٨\sqrt{٣} \times ١٢$

= ٨٣,١٣٦ سم^{2}

، ∵ مساحة القطاع أ س ص

$= \frac{٦٠^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times (١٢)^{2} \times \pi \approx ٧٥,٣٩٨$ سم^{2}

∴ المساحة المطلوبة = ٨٣,١٣٦ − ٧٥,٣٩٨ ≈ ٧,٧ سم^{2}

١٨

∵ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∴ ب ء = ٤ سم

، ق (∠ م ب ء) = ٣٠°

، ق (∠ ب م حـ) = ٢ ق (∠ أ) = ١٢٠°

، ∵ جتا ٣٠° $= \frac{\text{ب ء}}{\text{ب م}}$

∴ ب م $= \frac{٤}{\text{جتا } ٣٠^{\circ}} = ٤,٦٢$ سم

∴ مساحة القطاع $= \frac{١٢٠^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times \pi \times (٤,٦٢)^{2}$

= ٢٢ سم^{2} تقريبًا.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (حـ) (٢) (د) (٣) (حـ) (٤) (ب) (٥) (ب)

(٦) (ب) (٧) (حـ) (٨) (ب) (٩) (حـ) (١٠) (ب)

(١١) (د) (١٢) (حـ) (١٣) (حـ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ مجموع الجذرين = ٢ نق + ل $= \frac{١٩}{٢}$

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل $= \frac{١٩}{٢}$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = ٢ نق ل = ١٩

∴ نق ل $= \frac{١٩}{٢}$

∴ مساحة القطاع $= \frac{1}{2}$ ل نق $= \frac{1}{2} \times \frac{١٩}{٢} = \frac{١٩}{٤}$

(٣) ∵ $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{٧٢^{\circ}\pi}{١٨٠^{\circ}} \times (٩)^{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{\theta\,\pi}{١٨٠^{\circ}} \times (٦)^{2}} = \frac{٩}{٥}$ ∴ $\theta = ٩٠^{\circ}$

(٤) ∵ ق(∠ حـ م ٢) = ٣٠°

، حـ هـ = نق

∴ م حـ = ٢ نق

∴ ٢ نق + نق = ٦

∴ ٣ نق = ٦

∴ نق = ٢ سم

∴ مساحة الجزء المظلل

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times (6)^2 - \pi \times (2)^2 = 2\pi$ سم²

(٥) نفرض أن ق(∠ ٢ م هـ) = $\theta^{ء}$

∴ ق(∠ د و ء) = $\pi - \theta^{ء}$

، ∵ م١ = م٢

∴ $\frac{1}{2}(\pi - \theta^{ء}) \times$ نق²

$= \frac{1}{2}\theta^{ء} \times ((٢\ نق)^2 - نق^2)$

∴ $\pi - \theta^{ء} = 3\theta^{ء}$

∴ $4\theta^{ء} = \pi$ ∴ $\theta^{ء} = \frac{\pi}{4}$

(٦) $\frac{2}{3}$ نق × $\frac{1}{2}$ نق = ٢٧

نق² = ٢٧ × $\frac{4}{3}$ = ٣٦

∴ نق = ٦ سم

Δ م و حـ فيه :

ق(∠ د) = ٩٠° ، م و = $\frac{1}{2}$ نق

∴ ق(∠ حـ) = ٣٠°

∴ ق(∠ ٢ م حـ) = ١٢٠°

مساحة الجزء المظلل = $\frac{1}{2}\left(\frac{120^\circ}{180^\circ}\pi\right) \times 6^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \pi \times 36 = 12\pi$ سم²

(٧) $\frac{م_1}{م_2} = \frac{\frac{1}{2} \times نق^2 \times \theta^{ء}}{\frac{1}{2} \times (٢\ نق)^2 \times \theta^{ء}} = \frac{1}{4}$

(٨) $\frac{م_1}{م_2} = \frac{\pi\ نق^2 - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times نق^2}{\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times (٢\ نق)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times نق^2}$

$= \frac{\frac{5}{6}\pi\ نق^2}{\frac{1}{2}\pi\ نق^2} = \frac{5}{3}$

(٩) ∵ (ء حـ)² = ء ٢ × ء ب

∴ (ء حـ)² = ٦ $\sqrt{3}$ ء حـ

∴ (ء حـ)² − ٦ $\sqrt{3}$ ء حـ = ٠

∴ ء حـ (ء حـ − ٦ $\sqrt{3}$) = ٠

∴ ء حـ = صفر (مرفوض)

أ، ء حـ = ٦ $\sqrt{3}$

، ب ء = $\sqrt{3} \times 6\sqrt{3}$ = ١٨ سم

∴ ٢ ب = ١٢ سم ∴ نق = ٦ سم

، ∵ م حـ = $\frac{1}{2}$ م ء ∴ ق(∠ ء) = ٣٠°

∴ ق(∠ ء م حـ) = ٦٠°

∴ مساحة الشكل المظلل

= مساحة Δ م حـ ء − مساحة القطاع ٢ م حـ

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times (6)^2$

$= (18\sqrt{3} - 6\pi)$ سم²

(١٠) ∵ ق($\overset{\frown}{٢حـ}$)

= ق($\overset{\frown}{حـء}$) = ق($\overset{\frown}{ءب}$)

$= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

∴ $\overline{حـء} \parallel \overline{٢ب}$

، Δ م حـ ء متساوى الأضلاع

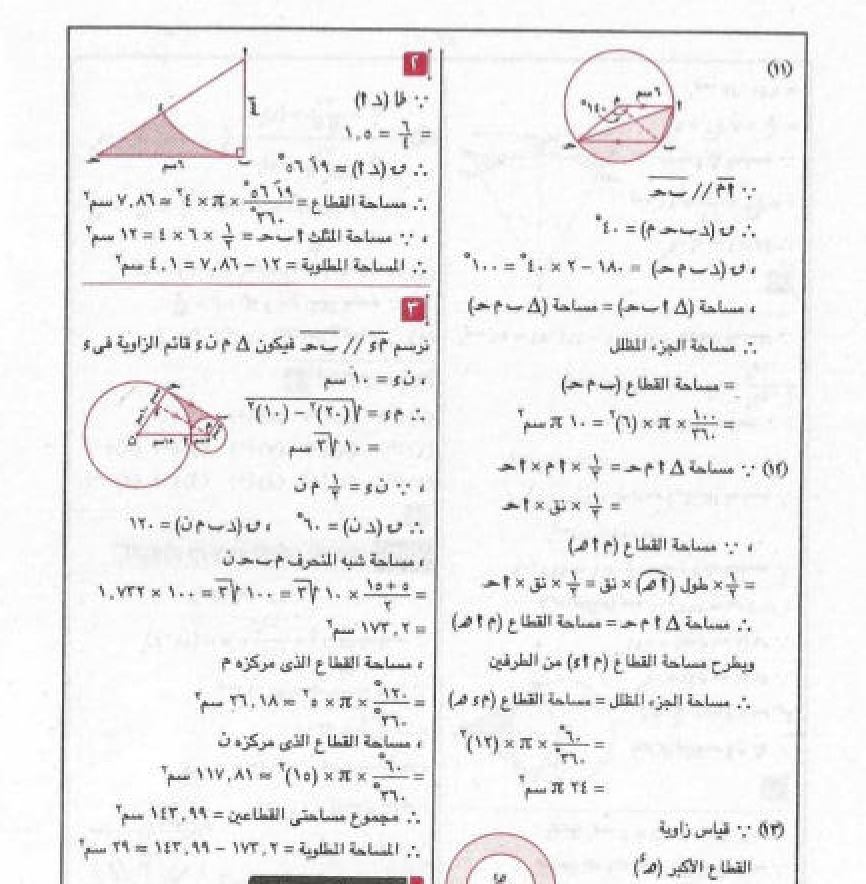
أى أن : حـ ء = نق

∴ Δ حـ ء هـ ≡ Δ ٢ م هـ

∴ مساحة الجزء المظلل = مساحة القطاع (٢ م حـ)

$= \frac{60}{360} \times \pi \times (6)^2$

$= 6\pi$ سم²



(١١) ∵ $\overline{٢م} \parallel \overline{بحـ}$

∴ ق(∠ ب حـ م) = ٤٠°

، ق(∠ ب م حـ) = ١٨٠ − ٢ × ٤٠° = ١٠٠°

، مساحة (Δ ٢ ب حـ) = مساحة (Δ ب م حـ)

∴ مساحة الجزء المظلل

= مساحة القطاع (ب م حـ)

$= \frac{100}{360} \times \pi \times (6)^2 = 10\pi$ سم²

(١٢) ∵ مساحة Δ ٢ م حـ = $\frac{1}{2}$ × ٢ م × ٢ حـ

= $\frac{1}{2}$ × نق × ٢ حـ

، ∵ مساحة القطاع (م ٢ هـ)

= $\frac{1}{2}$ × طول ($\overset{\frown}{٢هـ}$) × نق = $\frac{1}{2}$ × نق × ٢ حـ

∴ مساحة Δ ٢ م حـ = مساحة القطاع (م ٢ هـ)

ويطرح مساحة القطاع (م ٢ ء) من الطرفين

∴ مساحة الجزء المظلل = مساحة القطاع (ء هـ)

$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (12)^2$

$= 24\pi$ سم²

(١٣) ∵ قياس زاوية

القطاع الأكبر ($هـ^{ء}$)

$= 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

∴ مساحة الجزء المظلل

$= \frac{1}{2}$ نق² $هـ^{ء}$ − $\frac{1}{2}$ نق′² $هـ^{ء}$ = $\frac{1}{2}$

$\times \frac{11\pi}{6}(18^2 - 12^2) = 165\pi$

٢

∵ ظا(∠ ٢)

$= \frac{6}{4} = 1.5$

∴ ق(∠ ٢) = ٥٦° ١٩َ

∴ مساحة القطاع $= \frac{56^\circ\ 19'}{360^\circ} \times \pi \times 4^2 \approx 7.86$ سم²

، ∵ مساحة المثلث ٢ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ = ١٢ سم²

∴ المساحة المطلوبة = ١٢ − ٧,٨٦ = ٤,١ سم²

٣

نرسم $\overline{مء} \parallel \overline{بحـ}$ فيكون Δ م ن ء قائم الزاوية فى ء

، ن ء = ١٠ سم

∴ م ء = $\sqrt{(20)^2 - (10)^2}$

= ١٠ $\sqrt{3}$ سم

، ∵ ن ء = $\frac{1}{2}$ م ن

∴ ق(∠ ن) = ٦٠° ، ق(∠ ب م ن) = ١٢٠

، مساحة شبه المنحرف م ب حـ ن

$= \frac{15+5}{2} \times 10\sqrt{3} = 100\sqrt{3} = 100 \times 1.732$

= ١٧٣,٢ سم²

، مساحة القطاع الذى مركزه م

$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2 \approx 26.18$ سم²

، مساحة القطاع الذى مركزه ن

$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (15)^2 \approx 117.81$ سم²

∴ مجموع مساحتى القطاعين = ١٤٣,٩٩ سم²

∴ المساحة المطلوبة = ١٧٣,٢ − ١٤٣,٩٩ = ٢٩ سم²

تطبيقات حياتية

١

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

∴ ٤٨ = $\frac{1}{2}$ × ٦ × نق ∴ نق = ١٦ متر

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ١٦ + ٦ = ٣٨ متر

٢

بفرض أن طول ضلع المربع = نق سم

∴ مساحة المربع = نق^2 سم^2

، ∵ مساحة ربع الدائرة = $\frac{1}{4}$ π نق^2 ≈ ٠,٧٨٥٤ نق^2 سم^2

∴ مساحة المنطقة الباقية = نق^2 − ٠,٧٨٥٤ نق^2 = ٠,٢١٤٦ نق^2 سم^2

∴ ٠,٢١٤٦ نق^2 = ٤٨,٢٨٥ ∴ نق^2 = ٢٢٥

∴ نق = ١٥ سم وهو طول ضلع المربع

ارشادات تمارين 13

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (ب)	(٣) (أ)	(٤) (ب)	(٥) (جـ)
(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)	(٩) (أ)	(١٠) (د)
(١١) (ب)	(١٢) (د)	(١٣) (د)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)
(١٦) (جـ)	(١٧) (ب)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (د)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)	(٢٥) (أ)
(٢٦) (د)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (أ)	(٢٩) (جـ)	(٣٠) (جـ)
(٣١) (أ)	(٣٢) (د)	(٣٣) (جـ)	(٣٤) (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) مساحة القطعة = $\frac{1}{2}$ × ١٤٤ (١,٤^ء − جا ١,٤^ء) = ٣٠ سم^2

(٢) مساحة القطعة = $\frac{1}{2}$ × ٦٤ (١٣٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ١٣٥°) ≈ ٥٣ سم^2

٢

مساحة القطعة = $\frac{1}{2}$ × ٤٠٠ (٢٤َ ١١٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ٢٤َ ١١٥°) ≈ ٢٢٢ سم^2

٣

∵ θ^ء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٣٢}{١٤}$ = $٢\frac{٤}{٧}$^{ء}

∴ مساحة القطعة = $\frac{1}{2}$ × ١٩٦ ($٢\frac{٤}{٧}$^{ء} − جا $٢\frac{٤}{٧}$^{ء}) ≈ ٥٦ سم^2

٤

∵ $\frac{٧}{٨}$ π نق^2 = ٤٩٠ ∴ نق ≈ ١٢,٥ سم

، θ^ء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٢٦,١٨}{١٢,٥}$ = ٢,٠٩٤٤^ء

∴ مساحة القطعة

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{٦٢٥}{٤}$ (٢,٠٩٤٤^ء − جا ٢,٠٩٤٤^ء) ≈ ٩٦ سم^2

٥

في Δ أ ب م :

∵ م أ = م ب = نق

، ق(∠ أ م ب) = ٦٠°

∴ Δ أ ب م متساوي الأضلاع

∴ نق = ١٠ سم

، ق(∠ أ م ب المنعكسة) = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مساحة القطعة الكبرى

= $\frac{1}{2}$ × ١٠٠ ($\frac{٣٠٠° \times \pi}{١٨٠°}$ − جا ٣٠٠°) ≈ ٣٠٥ سم^2

٦

(١) نفرض أن $\overline{أب}$ هو وتر القطعة

، م مركز الدائرة

نرسم $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

∴ جـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ أ جـ = ٣ سم

∴ جا(∠ أ م جـ) = $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦

∴ ق(∠ أ م جـ) = ٥٢َ ٣٦°

∴ ق(∠ أ م ب) = ٢ × ٥٢َ ٣٦° = ٤٤َ ٧٣°

∴ θ^ء = ٤٤َ ٧٣° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = ١,٢٨٦٩^ء

∴ مساحة القطعة

= $\frac{1}{2}$ × ٢٥ (١,٢٨٦٩^ء − جا ٤٤َ ٧٣°)

= ٤ سم^2

(٢) نفرض أن $\overline{أب}$ هو وتر القطعة

، م مركز الدائرة

، $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

∴ د م = ١٠ − ٥ = ٥ سم

∴ جتا(∠ أ م د) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{1}{2}$

∴ ق(∠ أ م د) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

∴ مساحة القطعة

= $\frac{1}{2}$ × ١٠٠ × (١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ١٢٠°)

≈ ٦١ سم^2

٧

∵ م أ = م ب = أ ب

∴ ق(∠ أ م ب) = ٦٠°

∴ مساحة القطعة

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦ (٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ٦٠°) ≈ ٣,٢٦ سم^2

٨

∵ جا(∠ أ م د) = $\frac{٧}{١٠,٥}$

∴ ق(∠ أ م د) = ٤٩َ ٤١°

∴ ق(∠ أ م ب) = ٣٨َ ٨٣°

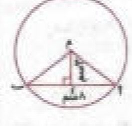
∴ ق(∠ أ م ب المنعكسة) = ٢٢َ ٢٧٦°

∴ مساحة القطعة الكبرى

= $\frac{1}{2}$ × $\left(\frac{٢١}{٢}\right)^2$ (٢٢َ ٢٧٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ٢٢َ ٢٧٦°)

≈ ٣٢١ سم^2

٩



في Δ أ م د :

م أ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ سم

∴ ظا ∠ أ م د = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق(∠ أ م د) = ٨َ ٥٣°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٠٦,٢٦°

∴ مساحة القطعة

= $\frac{1}{2}$ × ٢٥ (١٠٦,٢٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ١٠٦,٢٦°)

≈ ١١ سم^2

١٠

∵ ق(∠ ب م جـ) = ٢ ق(∠ أ)

= ١٢٠°

∴ مساحة القطعة التي

وترها $\overline{بجـ}$ = $\frac{1}{2}$ × ٦٤ (١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ − جا ١٢٠°)

≈ ٣٩ سم^2

∴ مساحة كل جزء = ٣٩ سم^2 تقريبًا

١١

∵ جا(∠ ب م د) = $\frac{١٢}{نق}$

∴ نق = $\frac{١٢}{جا ٦٠°}$ = ٨$\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحة القطعة الدائرية

= $\frac{1}{2}$ × ١٩٢ ($\frac{\pi \times ١٢٠°}{١٨٠°}$ − جا ١٢٠°)

≈ ١١٨ سم^2

١٢

∵ جا(∠ ب أ د) = $\frac{٩}{١٥}$ = ٠,٦

∴ ق(∠ ب أ د) ≈ ٥٢َ ٣٦°

∴ ق(∠ ب أ جـ) ≈ ٤٤َ ٧٣°

، أ د = $\sqrt{٢٢٥ − ٨١}$ = ١٢ سم

١٣

∵ ق(د م ؟ ء) = ٣٠° ، ق(د ؟ م ء) = ٦٠°

∴ ق(د ؟ م ب) = ١٢٠°

، ∵ ما(د ؟ م ء) = $\frac{\text{؟ ء}}{\text{؟ م}}$

∴ ما ٦٠° = $\frac{٣\sqrt{٣}}{\text{نق}}$

∴ نق = ٦ سم

∴ مساحة كل من القطعتين اللتين وتراهما $\overline{\text{؟ ب}}$ ، $\overline{\text{؟ حـ}}$

= $\frac{١}{٢}$ $(٦)^٢$ $\left(\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°} - \text{ما } ١٢٠°\right)$ ≈ ٢٢ سم^٢

∴ مجموع مساحتي القطعتين = ٤٤ سم^٢

، ∵ مساحة الدائرة = π نق^٢ ≈ ١١٣ سم^٢

∴ مساحة الجزء المحصور = ١١٣ − ٤٤ = ٦٩ سم^٢

∴ م ء = ١٢ − نق

ومن Δ ب م ء : (ب م)^٢ = (م ء)^٢ + (ب ء)^٢

∴ نق^٢ = (١٢ − نق)^٢ + ٨١

∴ نق^٢ = ١٤٤ − ٢٤ نق + نق^٢ + ٨١

∴ ٢٤ نق = ٢٢٥ ∴ نق = $\frac{٢٢٥}{٢٤}$ = $\frac{٧٥}{٨}$ سم

، ∵ ق(د ب م حـ) = ٢ ق(د ب ؟ حـ) = ٢ × ٤٤َ ٧٣°

= ٢٨َ ١٤٧°

∴ مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{ب حـ}}$

= $\frac{١}{٢} \times \left(\frac{٧٥}{٨}\right)^٢$ $\left(٢٨َ\ ١٤٧° \times \frac{\pi}{١٨٠°} - \text{ما } ٢٨َ\ ١٤٧°\right)$

= ٨٩,٥ سم^٢

، ∵ ق(د ؟ م ب) = ق(د ؟ م حـ)

= $\frac{٣٦٠ - ٢٨َ\ ١٤٧°}{٢}$ = ١٦َ ١٠٦°

∴ مساحة كل من القطعتين اللتين وتراهما $\overline{\text{؟ ب}}$ ، $\overline{\text{؟ حـ}}$

= $\frac{١}{٢}\left(\frac{٧٥}{٨}\right)^٢$ $\left(١٦َ\ ١٠٦° \times \frac{\pi}{١٨٠°} - \text{ما } ١٦َ\ ١٠٦°\right)$

≈ ٣٩,٣ سم^٢

١٤

مساحة الجزء المظلل

= مجموع مساحتي القطعتين

الدائريتين اللتين وتر كل

منهما $\overline{\text{ء ب}}$

، ∵ الدائرتين متطابقتان.

∴ مساحة الجزء المظلل = ٢ مساحة القطعة الدائرية

بالدائرة ؟ والتي وترها $\overline{\text{ء ب}}$

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (θ$^{\text{ء}}$ − ما θ)

= $(٦)^٢$ $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{ما } ٩٠°\right)$ ≈ ٢١ سم^٢

١٥

∵ ؟ م = م ن = ؟ ن

= ١٢ سم

∴ ق(د ؟ م ن) = ق(د ؟ ن م) = ٦٠°

∴ ق(د ؟ م ب) = ق(د ؟ ن ب) = ١٢٠°

∴ مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{؟ ب}}$

في الدائرة م = مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{؟ ب}}$

في الدائرة ن = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٤ $\left(١٢٠° \times \frac{\pi}{١٨٠°} - \text{ما } ١٢٠°\right)$

≈ ٨٨,٤ سم^٢

∴ مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين ≈ ١٧٧ سم^٢

١٦

(؟ حـ)^٢ = $(٦)^٢$ + $(٨)^٢$ = ١٠٠

∴ ؟ حـ = ١٠ سم

∴ نق = ٥ سم

∵ ما حـ = ٠,٦ ∴ ق(د حـ) ≈ ٥٢َ ٣٦°

∴ ق(د ؟ م ب) ≈ ٤٤َ ٧٣°

، ق(د ب م حـ) = ١٨٠° − ٤٤َ ٧٣° = ١٦َ ١٠٦°

∴ مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{؟ ب}}$

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ $\left(\frac{٤٤َ\ ٧٣° \times \pi}{١٨٠°} - \text{ما } ٤٤َ\ ٧٣°\right)$ ≈ ٤ سم^٢

، مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{ب حـ}}$

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ $\left(\frac{١٦َ\ ١٠٦° \times \pi}{١٨٠°} - \text{ما } ١٦َ\ ١٠٦°\right)$

≈ ١١ سم^٢

، مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{؟ حـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة

= $\frac{١}{٢}$ π نق^٢ = $\frac{١}{٢}$ × π × ٢٥ ≈ ٣٩ سم^٢

١٧

∵ $\overline{\text{؟ ب}}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(د ؟ حـ ب) = ٩٠°

∴ (؟ ب)^٢ = (؟ حـ)^٢ + (حـ ب)^٢

∴ (٢ نق$_م$)^٢ = (٢ نق$_ن$)^٢ + (٢ نق$_هـ$)^٢

∴ نق$_م^٢$ = نق$_ن^٢$ + نق$_هـ^٢$

∴ $\frac{١}{٢}$ π نق$_م^٢$ = $\frac{١}{٢}$ π نق$_ن^٢$ + $\frac{١}{٢}$ π نق$_هـ^٢$

∴ م (نصف الدائرة م)

= م (نصف الدائرة ن) + م (نصف الدائرة هـ)

مساحة الجزء المظلل = مساحة الشكل بالكامل − مساحة نصف الدائرة م

= مساحة الشكل بالكامل − (مساحة نصف الدائرة ن + مساحة نصف الدائرة هـ)

= م (Δ ؟ حـ ب)

= $\frac{١}{٢}$ ب حـ × ؟ حـ = ٣ × ٨ = ٢٤ سم^٢

<u>حل آخر :</u>

مساحة الجزء المظلل

= (مساحة نصف الدائرة ن

+ مساحة نصف الدائرة هـ)

− (مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{؟ حـ}}$ + مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{ب حـ}}$)

= $\left[\frac{١}{٢}\pi(٤)^٢ + \frac{١}{٢}\pi(٣)^٢\right]$

− $\left[\frac{١}{٢} \times ٢٥\,(\theta_١^{\text{ء}} - \text{ما }\theta_١) + \frac{١}{٢} \times ٢٥\,(\theta_٢^{\text{ء}} - \text{ما }\theta_٢)\right]$

= $\frac{١}{٢}$ π [١٦ + ٩]

− $\left[\frac{٢٥}{٢}(\theta_١^{\text{ء}} + \theta_٢^{\text{ء}} - \text{ما }\theta_١ - \text{ما}(١٨٠° - \theta_١))\right]$

= $\frac{٢٥}{٢}$ π − $\left[\frac{٢٥}{٢}(\pi - ٢\text{ ما }\theta_١)\right]$ = ٢٥ ما θ$_١$

، ∵ طا(د حـ ؟ ب) = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق(د حـ ؟ ب) ≈ ١٢ َ٥٢ ً٣٦°

∴ θ$_١$ = ١٨٠° − ٢ × ١٢ َ٥٢ ً٣٦° = ٤٧ َ١٥ ً١٠٦°

∴ مساحة الجزء المظلل = ٢٤ سم^٢

١٨

∵ ب م = $\frac{١}{٢}$ ؟ م

، ق(د ب) = ٩٠°

∴ ق(د ب م ؟) = ٦٠°

∴ ق(د ب م حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة القطعة

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ $\left(١٢٠° \times \frac{\pi}{١٨٠°} - \text{ما } ١٢٠°\right)$

= ١٥,٣٥٥ سم^٢

١٩

∵ (م ن)^٢ = (م ؟)^٢ + (؟ ن)^٢

∴ ق(د م ؟ ن) = ٩٠°

∵ ما(د ؟ م ن) = ٠,٨

∴ ق(د ؟ م ن) ≈ ٨َ ٥٣°

∴ ق(د ؟ م ب) = ١٦َ ١٠٦°

∴ مساحة القطعة التي وترها $\overline{\text{؟ ب}}$ في الدائرة الصغرى

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ $\left(١٦َ\ ١٠٦° \times \frac{\pi}{١٨٠°} - \text{ما } ١٦َ\ ١٠٦°\right)$

= ١٦,١١ سم^٢

، ∵ ق(د ؟ ن م) = ٩٠° − ٨َ ٥٣° = ٥٢َ ٣٦°

∴ ق(د ؟ ن ب) = ٢ × ٥٢َ ٣٦° = ٤٤َ ٧٣°

$\therefore$ مساحة القطعة التي وترها $\overline{أب}$ في الدائرة الكبرى

$= \frac{١}{٢} \times ٦٤ \left(٤٤ ْ ٧٣ \times \frac{\pi}{١٨٠ْ} - \text{جا } ٤٤ ْ ٧٣ \right)$

$\approx ١٠,٤٦$ سم^٢

$\therefore$ مساحة المنطقة المشتركة

$= ١٦,١١ + ١٠,٤٦ \approx ٢٦,٦$ سم^٢

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) مساحة الجزء المظلل

= مساحة القطعة الصغرى التي وترها $\overline{هـ جـ}$

+ مساحة Δ م جـ ب

= مساحة القطاع م جـ ب

$= \frac{١}{٢} \times (١٢)^٢ \times \frac{٤٠ْ}{١٨٠ْ} \pi = ١٦ \pi$ سم^٢

(٢) Δ أ م جـ $\sim$ Δ أ ن ب

$\frac{نق_٢}{نق_١} = \frac{أب}{أجـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

، ق(د أ م جـ) = ق(د أ ن ب) = θ

$\therefore \frac{م_٢}{م_١} = \frac{\frac{١}{٢} نق_٢^٢ (\theta - \text{جا}\theta)}{\frac{١}{٢} نق_١^٢ (\theta - \text{جا}\theta)}$

$= \frac{نق_٢^٢}{نق_١^٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$

(٣) $\because$ محيط الشكل المظلل

= نق + طول $\overset{\frown}{أب}$

$=$ نق $+ \frac{١}{٢} \pi$ نق

$=$ نق $\left(١ + \frac{\pi}{٢}\right)$

$\therefore ٢ (\pi + ٢) = \frac{١}{٢}$ نق $(٣ + \pi)$

$\therefore$ نق = ٩ سم

$\therefore$ مساحة القطعة الدائرية

$= \frac{١}{٢} \times (٩)^٢ \left[\frac{\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right]$

$= \frac{٢٧}{٤} \left(٢\pi - ٣\sqrt{٣}\right)$

٢

مساحة القطعة التي وترها $\overline{أب}$

في الدائرة الصغرى

= مساحة نصف هذه الدائرة

$= \frac{١}{٢} \times \pi \times ٢٥ \approx ٣٩,٢٧$ سم^٢

، $\because$ ق(د أ ن ب) = ٦٠ْ

$\therefore$ مساحة القطعة التي وترها $\overline{أب}$ في الدائرة الكبرى

$= \frac{١}{٢} \times ١٠٠ \left(٦٠ْ \times \frac{\pi}{١٨٠ْ} - \text{جا } ٦٠ْ\right) \approx ٩,٠٦$ سم^٢

$\therefore$ مساحة المنطقة المشتركة

$\approx ٣٩,٢٧ + ٩,٠٦ = ٤٨,٣٣$ سم^٢ تقريبًا

٣

مساحة القطاع جـ م ء $= \frac{١}{٢} \theta^{ء}$ نق^٢

، مساحة القطعة الدائرية التي وترها $\overline{أب}$

$= \frac{١}{٢} \times (٢ \text{ نق})^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta)$

$= \frac{١}{٢} \times ٤$ نق$^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta) = ٢$ نق$^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta)$

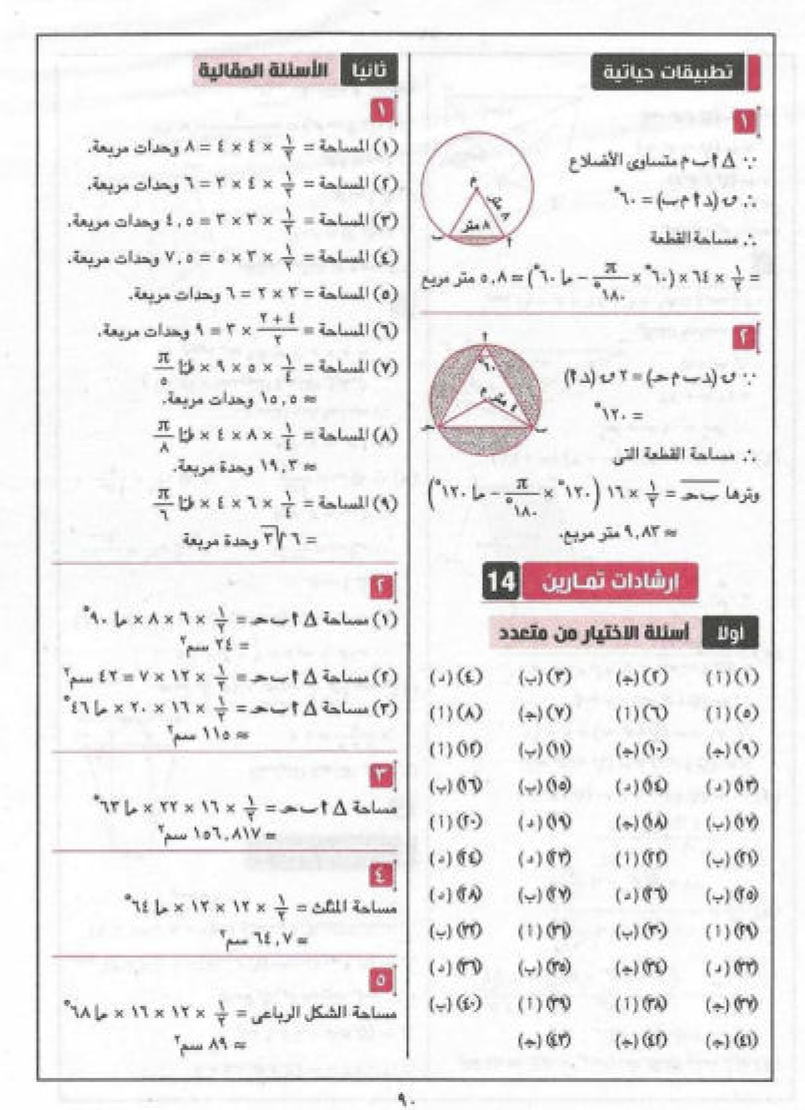
، $\because$ المساحتين متساويتان

$\therefore \frac{١}{٢} \theta^{ء}$ نق$^٢ = ٢$ نق$^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta)$

$\therefore \theta^{ء} = ٤\theta^{ء} - ٤ \text{ جا}\theta$

$\therefore ٤ \text{ جا}\theta = ٣\theta^{ء}$

$\therefore \frac{\theta^{ء}}{\text{جا}\theta} = \frac{٤}{٣}$



تطبيقات حياتية

١

$\because \Delta$ أ ب م متساوي الأضلاع

$\therefore$ ق(د أ م ب) = ٦٠ْ

$\therefore$ مساحة القطعة

$= \frac{١}{٢} \times ٦٤ \times \left(٦٠ْ \times \frac{\pi}{١٨٠ْ} - \text{جا } ٦٠ْ\right) = ٥,٨$ متر مربع

٢

$\because$ ق(د ب م جـ) = ٢ ق(د أ)

$= ١٢٠ْ$

$\therefore$ مساحة القطعة التي

وترها $\overline{ب جـ} = \frac{١}{٢} \times ١٦ \left(١٢٠ْ \times \frac{\pi}{١٨٠ْ} - \text{جا } ١٢٠ْ\right)$

$\approx ٩,٨٣$ متر مربع.

إرشادات تمارين 14

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (جـ)	(٣) (ب)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)
(٩) (جـ)	(١٠) (جـ)	(١١) (ب)	(١٢) (أ)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (ب)	(١٨) (جـ)	(١٩) (د)	(٢٠) (أ)
(٢١) (ب)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (د)	(٢٤) (د)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (د)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (ب)	(٣١) (أ)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (د)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (ب)	(٣٦) (د)
(٣٧) (جـ)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (جـ)	(٤٢) (جـ)	(٤٣) (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤ = ٨$ وحدات مربعة.

(٢) المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ = ٦$ وحدات مربعة.

(٣) المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ = ٤,٥$ وحدات مربعة.

(٤) المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٥ = ٧,٥$ وحدات مربعة.

(٥) المساحة $= ٣ \times ٢ = ٦$ وحدات مربعة.

(٦) المساحة $= \frac{٤ + ٢}{٢} \times ٣ = ٩$ وحدات مربعة.

(٧) المساحة $= \frac{١}{٤} \times ٥ \times ٩ \times \text{ظتا } \frac{\pi}{٥}$

$\approx ١٥,٥$ وحدات مربعة.

(٨) المساحة $= \frac{١}{٤} \times ٨ \times ٤ \times \text{ظتا } \frac{\pi}{٨}$

$\approx ١٩,٣$ وحدة مربعة.

(٩) المساحة $= \frac{١}{٤} \times ٦ \times ٤ \times \text{ظتا } \frac{\pi}{٦}$

$= ٦\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

٢

(١) مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٨ \times \text{جا } ٩٠ْ$

$= ٢٤$ سم^٢

(٢) مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٧ = ٤٢$ سم^٢

(٣) مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ٢٠ \times \text{جا } ٤٦ْ$

≈ ١١٥ سم^٢

٣

مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ٢٢ \times \text{جا } ٦٣ْ$

$\approx ١٥٦,٨١٧$ سم^٢

٤

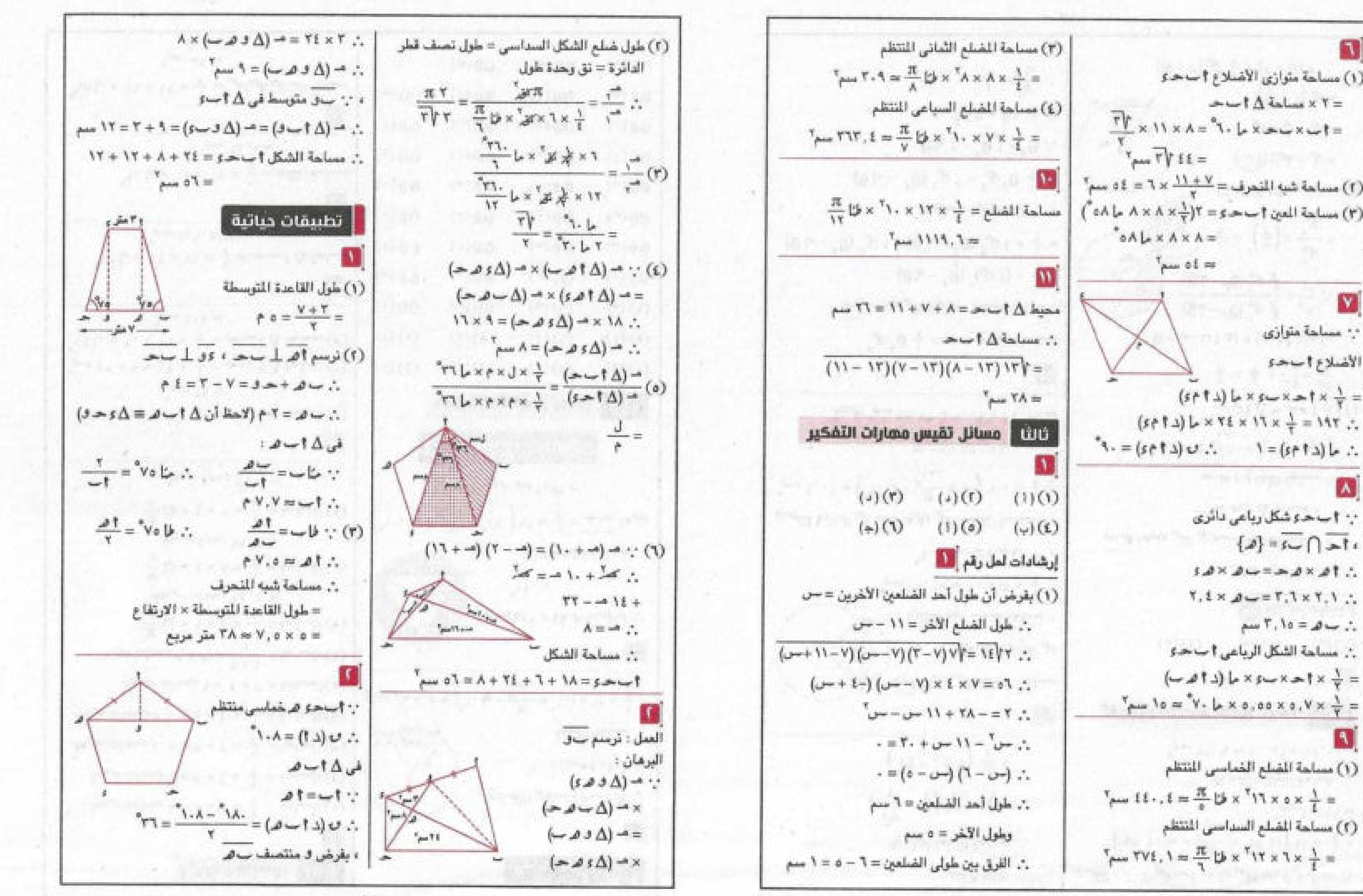
مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٢ \times \text{جا } ٦٤ْ$

$\approx ٦٤,٧$ سم^٢

٥

مساحة الشكل الرباعي $= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٦ \times \text{جا } ٦٨ْ$

≈ ٨٩ سم^٢



٦

(١) مساحة متوازى الأضلاع أ ب جـ ء

= ٢ × مساحة Δ أ ب جـ

= أ ب × ب جـ × جا ٦٠° = ٨ × ١١ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٤٤ $\sqrt{٣}$ سم٢

(٢) مساحة شبه المنحرف = $\frac{٧ + ١١}{٢}$ × ٦ = ٥٤ سم٢

(٣) مساحة المعين أ ب جـ ء = ٢($\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨ × جا ٥٨°)

= ٨ × ٨ × جا ٥٨°

≃ ٥٤ سم٢

٧

∵ مساحة متوازى

الأضلاع أ ب جـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × أ جـ × ب ء × جا (∠ أ م ء)

∴ ١٩٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٤ × جا (∠ أ م ء)

∴ جا (∠ أ م ء) = ١ ∴ ق (∠ أ م ء) = ٩٠°

٨

∵ أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى

، $\overline{أ جـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {هـ}

∴ أ هـ × هـ جـ = ب هـ × هـ ء

∴ ٢,١ × ٣,٦ = ب هـ × ٢,٤

∴ ب هـ = ٣,١٥ سم

∴ مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × أ جـ × ب ء × جا (∠ أ هـ ب)

= $\frac{١}{٢}$ × ٥,٧ × ٥,٥٥ × جا ٧٠° ≃ ١٥ سم٢

٩

(١) مساحة المضلع الخماسى المنتظم

= $\frac{١}{٤}$ × ٥ × ١٦٢ × ظتا $\frac{\pi}{٥}$ ≃ ٤٤٠,٤ سم٢

(٢) مساحة المضلع السداسى المنتظم

= $\frac{١}{٤}$ × ٦ × ١٢٢ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$ ≃ ٣٧٤,١ سم٢

(٣) مساحة المضلع الثمانى المنتظم

= $\frac{١}{٤}$ × ٨ × ٨٢ × ظتا $\frac{\pi}{٨}$ ≃ ٣٠٩ سم٢

(٤) مساحة المضلع السباعى المنتظم

= $\frac{١}{٤}$ × ٧ × ١٠٢ × ظتا $\frac{\pi}{٧}$ ≃ ٣٦٣,٤ سم٢

١٠

مساحة المضلع = $\frac{١}{٤}$ × ١٢ × ١٠٢ × ظتا $\frac{\pi}{١٢}$

≃ ١١١٩,٦ سم٢

١١

محيط Δ أ ب جـ = ٨ + ٧ + ١١ = ٢٦ سم

∴ مساحة Δ أ ب جـ

= $\sqrt{١٣ (١٣ - ٨)(١٣ - ٧)(١٣ - ١١)}$

= ٢٨ سم٢

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (د)

(٤) (ب) (٥) (أ) (٦) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) بفرض أن طول أحد الضلعين الآخرين = س

∴ طول الضلع الآخر = ١١ – س

∴ ٢ $\sqrt{١٤}$ = $\sqrt{٧ (٧ - ٣) (٧ - س) (٧ - ١١ + س)}$

∴ ٥٦ = ٧ × ٤ × (٧ – س) (–٤ + س)

∴ ٢ = –٢٨ + ١١ س – س٢

∴ س٢ – ١١ س + ٣٠ = ٠

∴ (س – ٦) (س – ٥) = ٠

∴ طول أحد الضلعين = ٦ سم

وطول الآخر = ٥ سم

∴ الفرق بين طولى الضلعين = ٦ – ٥ = ١ سم

(٢) طول ضلع الشكل السداسى = طول نصف قطر الدائرة = نق وحدة طول

∴ $\frac{م_٢}{م_١}$ = $\frac{\pi نق^٢}{\frac{١}{٤} × ٦ × نق^٢ × ظتا \frac{\pi}{٦}}$ = $\frac{٢ \pi}{٣ \sqrt{٣}}$

(٣) $\frac{م_١}{م_٢}$ = $\frac{٦ × \frac{١}{٢} نق^٢ × جا \frac{٣٦٠°}{٦}}{١٢ × \frac{١}{٢} نق^٢ × جا \frac{٣٦٠°}{١٢}}$

= $\frac{جا ٦٠°}{٢ جا ٣٠°}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) ∵ م (Δ أ هـ ب) × م (Δ ء هـ جـ)

= م (Δ أ هـ ء) × م (Δ ب هـ جـ)

∴ ١٨ × م (Δ ء هـ جـ) = ٩ × ١٦

∴ م (Δ ء هـ جـ) = ٨ سم٢

(٥) $\frac{م (Δ أ ب جـ)}{م (Δ أ جـ ء)}$ = $\frac{\frac{١}{٢} × ل × م × جا ٣٦°}{\frac{١}{٢} × م × م × جا ٣٦°}$

= $\frac{ل}{م}$

(٦) ∵ م (م + ١٠) = (م – ٢) (م + ١٦)

∴ م٢ + ١٠ م = م٢

+ ١٤ م – ٣٢

∴ م = ٨

∴ مساحة الشكل

أ ب جـ ء = ١٨ + ٦ + ٢٤ + ٨ = ٥٦ سم٢

٢

العمل : نرسم $\overline{ب و}$

البرهان :

∵ م (Δ و هـ ء)

× م (Δ ب هـ جـ)

= م (Δ و هـ ب)

× م (Δ ء هـ جـ)

∴ ٢ × ٢٤ = م (Δ و هـ ب) × ٨

∴ م (Δ و هـ ب) = ٦ سم٢

، ∵ $\overline{ب و}$ متوسط فى Δ أ ب ء

∴ م (Δ أ ب و) = م (Δ و ب ء) = ٩ + ٣ = ١٢ سم

∴ مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٢٤ + ٨ + ١٢ + ١٢

= ٥٦ سم٢

تطبيقات حياتية

١

(١) طول القاعدة المتوسطة

= $\frac{٣ + ٧}{٢}$ = ٥ م

(٢) نرسم $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ء و}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ ب هـ + جـ و = ٧ – ٣ = ٤ م

∴ ب هـ = ٢ م (لاحظ أن Δ أ ب هـ ≡ Δ ء جـ و)

فى Δ أ ب هـ :

∵ جتا ب = $\frac{ب هـ}{أ ب}$ ∴ جتا ٧٥° = $\frac{٢}{أ ب}$

∴ أ ب = ٧,٧ م

(٣) ∵ ظا ب = $\frac{أ هـ}{ب هـ}$ ∴ ظا ٧٥° = $\frac{أ هـ}{٢}$

∴ أ هـ ≃ ٧,٥ م

∴ مساحة شبه المنحرف

= طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

= ٥ × ٧,٥ ≃ ٣٨ متر مربع

٢

∵ أ ب جـ ء هـ خماسى منتظم

∴ ق (∠ أ) = ١٠٨°

فى Δ أ ب هـ

∵ أ ب = أ هـ

∴ ق (∠ أ ب هـ) = $\frac{١٨٠° - ١٠٨°}{٢}$ = ٣٦°

، بفرض و منتصف $\overline{ب هـ}$

∴ ب و = ٣٦ سم

، $\overline{أو} \perp \overline{ب هـ}$ ∴ جتا (∠ أ ب و) = $\frac{٣٦}{أ ب}$

∴ جتا ٣٦° = $\frac{٣٦}{أ ب}$ ∴ أ ب = ٤٤,٥ سم

∴ مساحة الشكل الخماسى

= $\frac{١}{٤} \times ٥ \times (٤٤,٥)^٢ \times$ ظتا $\frac{\pi}{٥}$ = ٣٤٠٧ سم^٢

٣

∵ مساحة الشكل السداسى المنتظم

= $\frac{١}{٤} \times ٦ \times س^٢ \times$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$

∴ $٥٤\sqrt{٣} = \frac{١}{٤} \times ٦ \times س^٢ \times \sqrt{٣}$

∴ $س^٢ = ٣٦$ ∴ س = ٦ م

∴ طول ضلع الشكل السداسى = ٦ م



ثانيًا

إرشادات الهندسة التحليلية

ارشادات الوحدة الرابعة

ارشادات تمارين 1

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) أولاً : (ب) ثانياً : (جـ)
(٣) (جـ) (٤) أولاً : (ب) ثانياً : (ب)
(٥) (د) (٦) (د) (٧) (جـ)
(٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (جـ)
(١١) (د) (١٢) أولاً : (د) ثانياً : (أ)
(١٣) أولاً : (ب) ثانياً : (جـ)
(١٤) أولاً : (ب) ثانياً : (جـ)
(١٥) أولاً : (د) ثانياً : (أ)
(١٦) (جـ) (١٧) (أ)
(١٨) أولاً : (جـ) ثانياً : (جـ) (١٩) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) متضادان في الاتجاه (٢) متضادان في الاتجاه
(٣) متحدان في الاتجاه (٤) مختلفان في الاتجاه
(٥) متحدان في الاتجاه (٦) متحدان في الاتجاه

٢

(١) حـ م (٢) ب م (٣) ب حـ (٤) حـ ء

٣

أولاً : (١) و م ، هـ أ (٢) ء م
(٣) و ب ، حـ و (٤) لا يوجد
(٥) ء حـ (٦) أ ء

ثانياً : (١) لأنهما متضادان في الاتجاه
(٢) لأنهما غير متساويين في المعيار
(٣) لأنهما متضادان في الاتجاه
(٤) لأنهما متضادان في الاتجاه

٤

(١) ل ع (٢) ص ع (٣) ل حـ
(٤) س أ (٥) لا يوجد

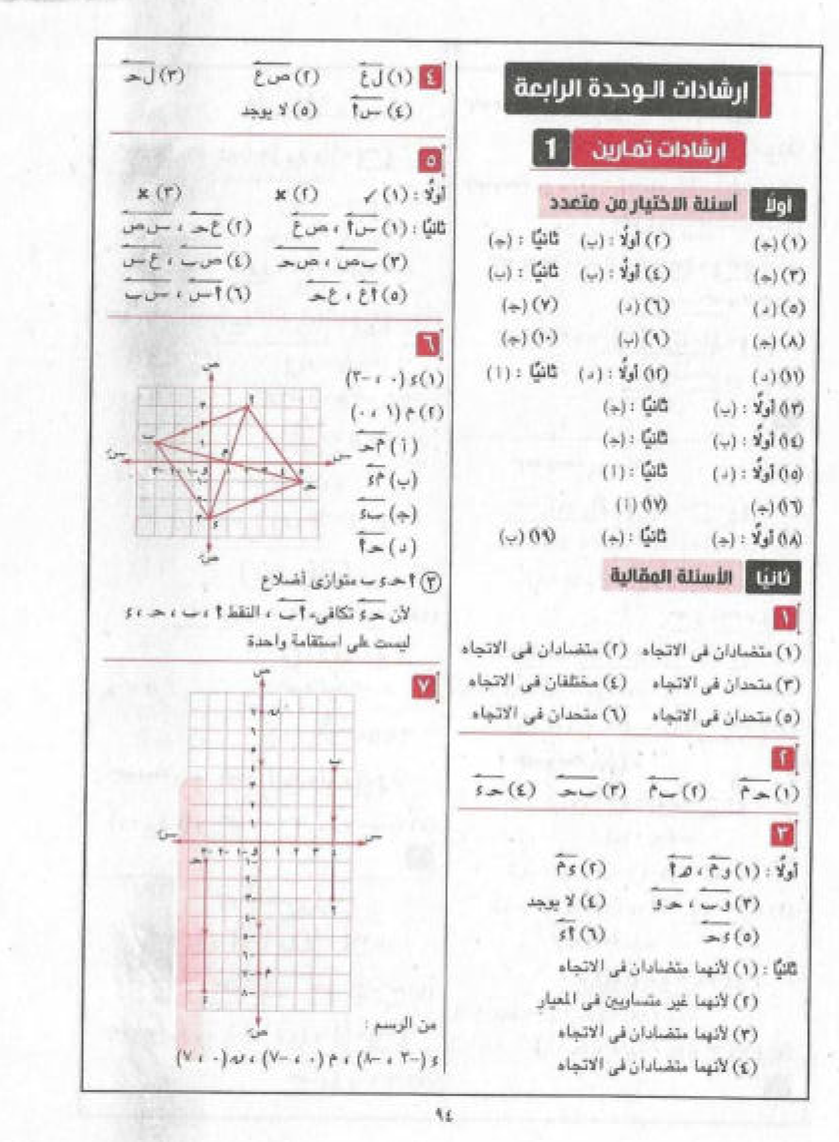
٥

أولاً : (١) ✓ (٢) ✗ (٣) ✗
ثانياً : (١) س أ ، ص ع (٢) ع حـ ، س ص
(٣) ب ص ، ص حـ (٤) ص ب ، ع س
(٥) أ ع ، ع حـ (٦) أ س ، س ب

٦

(١) ء(٠ ، −٣)
(٢) م(١ ، ٠)
(أ) م حـ
(ب) ء م
(جـ) ب ء
(د) حـ أ
(٣) أ حـ ء ب متوازي أضلاع
لأن حـ ء تكافيء أ ب ، النقط أ ، ب ، حـ ، ء ليست على استقامة واحدة

٧



من الرسم :
ء(−٣ ، −٨) ، م(٠ ، −٧) ، هـ(٠ ، ٧)

٨

(١) من الرسم : ||أ ب|| = ٥ وحدات طول
، ||حـ ء|| = ٥ وحدات طول
(٢) أ ب تكافيء حـ ء
لأن لهما نفس الطول ونفس الاتجاه
(٣) من الرسم : م(−٢ ، −١) ، هـ(٩ ، ٦)
، ن(−٥ ، ١)

٩

من الرسم : ء(٥ ، −٦) ، هـ(٣ ، −٣)
، ل(٠ ، −٢) ، ع(١ ، ٤)

ارشادات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (د)
(٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (جـ) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)
(١١) (ب) (١٢) (أ) (١٣) (جـ) (١٤) (أ) (١٥) (جـ)
(١٦) (ب) (١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (ب) (٢٠) (أ)
(٢١) (جـ) (٢٢) (ب) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب) (٢٥) (ب)
(٢٦) (د) (٢٧) (أ) (٢٨) (ب) (٢٩) (ب) (٣٠) (جـ)
(٣١) (ب) (٣٢) (ب) (٣٣) (جـ) (٣٤) (جـ) (٣٥) (جـ)
(٣٦) (جـ) (٣٧) (جـ) (٣٨) (جـ) (٣٩) (جـ) (٤٠) (ب)
(٤١) (جـ) (٤٢) (جـ) (٤٣) (د) (٤٤) (جـ) (٤٥) (ب)
(٤٦) (جـ) (٤٧) (جـ) (٤٨) (جـ) (٤٩) (جـ) (٥٠) (د)
(٥١) (جـ) (٥٢) (جـ) (٥٣) (جـ) (٥٤) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−١ ، −٤)
(١) أ + ب = (٣ ، −٢) + (−١ ، −٤) = (٢ ، −٦)
= ٢ س − ٦ ص
(٢) أ − ب = (٣ ، −٢) − (−١ ، −٤) = (٤ ، ٢)
= ٤ س + ٢ ص
(٣) ∵ أ + ب = (٢ ، −٦)
∴ ||أ + ب|| = √(٢² + (−٦)²)
= ٢√١٠ وحدة طول
(٤) ٢ أ + ٣ ب = ٢(٣ ، −٢) + ٣(−١ ، −٤)
= (٦ ، −٤) + (−٣ ، −١٢)
= (٣ ، −١٦) = ٣ س − ١٦ ص
(٥) أ − ٣ ب = (٣ ، −٢) − ٣(−١ ، −٤)
= (٣ ، −٢) − (−٣ ، −١٢)
= (٦ ، ١٠) = ٦ س + ١٠ ص
(٦) −٣ أ = −٣(٣ ، −٢) = (−٩ ، ٦)
= −٩ س + ٦ ص

٢

(١) $\vec{أ} + ٢\vec{جـ} = (٣، -٢) + ٢(٧، ١)$

$= (٣، -٢) + (١٤، ٢) = (١٧، ٠)$

∴ $\|\vec{أ} + ٢\vec{جـ}\| = \sqrt{(١٧)^٢ + ٠}$

= ١٧ وحدة طول

(٢) $٥\vec{ب} + ٣\vec{أ} = ٥(-٢، ٤) + ٣(٣، -٢)$

$= (-١٠، ٢٠) + (٩، -٦)$

$= (-١، ١٤)$

∴ $\|٥\vec{ب} + ٣\vec{أ}\| = \sqrt{١ + ١٩٦}$

$= \sqrt{١٩٧}$ وحدة طول

(٣) $\vec{أ} - \frac{١}{٢}\vec{ب} = (٣، -٢) - \frac{١}{٢}(-٢، ٤)$

$= (٣، -٢) + (١، -٢) = (٤، -٤)$

∴ $\|\vec{أ} - \frac{١}{٢}\vec{ب}\| = \sqrt{١٦ + ١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

(٤) $\vec{أ} + \vec{ب} - ٢\vec{جـ}$

$= (٣، -٢) + (-٢، ٤) - ٢(٧، ١)$

$= (١، ٢) + (-١٤، -٢) = (-١٣، ٠)$

∴ $\|\vec{أ} + \vec{ب} - ٢\vec{جـ}\| = \sqrt{(-١٣)^٢ + ٠}$

= ١٣ وحدة طول

٣

(١) $\vec{م} = -٤\vec{س} - ٣\vec{ص}$

$\|\vec{م}\| = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٣)^٢} = ٥$ وحدة طول

(٢) $\vec{ن} = ٨\vec{س} - ٦\vec{ص}$

∴ $\|\vec{ن}\| = \sqrt{٨^٢ + (-٦)^٢} = ١٠$ وحدة طول

(٣) $\vec{ق} = -٥\vec{س} - ١٢\vec{ص}$

∴ $\|\vec{ق}\| = \sqrt{(-٥)^٢ + (-١٢)^٢} = ١٣$ وحدة طول

(٤) $\vec{أ} = ٢\sqrt{٢}\,\vec{ص}$

∴ $\|\vec{أ}\| = \sqrt{(٠)^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

(٥) $\vec{ب} = -٢\sqrt{٣}\,\vec{س}$

$\|\vec{ب}\| = \sqrt{(-٢\sqrt{٣})^٢ + (٠)^٢} = ٢\sqrt{٣}$ وحدة طول

(٦) $\vec{جـ} = \sqrt{٢}\,\vec{س} - ٣\sqrt{٢}\,\vec{ص}$

∴ $\|\vec{جـ}\| = \sqrt{(\sqrt{٢})^٢ + (-٣\sqrt{٢})^٢}$

$= ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

٤

(١) ∵ $\vec{م} = ٨\sqrt{٣}\,\vec{س} + ٨\vec{ص} = (٨\sqrt{٣}، ٨)$

∴ $\|\vec{م}\| = \sqrt{(٨\sqrt{٣})^٢ + (٨)^٢} = ١٦$ وحدة طول

، $ظا\,\theta = \frac{٨}{٨\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $\theta = ٣٠°$

∴ $\vec{م} = (١٦، ٣٠°)$

(٢) ∵ $\vec{ن} = ٣\sqrt{٢}\,\vec{س} + ٣\sqrt{٢}\,\vec{ص}$

$= (٣\sqrt{٢}، ٣\sqrt{٢})$

∴ $\|\vec{ن}\| = \sqrt{(٣\sqrt{٢})^٢ + (٣\sqrt{٢})^٢}$

= ٦ وحدات طول

، ∵ $ظا\,\theta = \frac{٣\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٢}} = ١$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $\theta = ٤٥°$

∴ $\vec{ن} = (٦، ٤٥°)$

(٣) ∵ $\|\vec{و}\| = \sqrt{(٥)^٢ + (٥\sqrt{٣})^٢} = ١٠$ وحدات طول

، ∵ $ظا\,\theta = \frac{٥\sqrt{٣}}{٥} = \sqrt{٣}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $\theta = ٦٠°$

∴ $\vec{و} = (١٠، ٦٠°)$

(٤) ∵ $\|\vec{ل}\| = \sqrt{(٧\sqrt{٣})^٢ + (-٧)^٢} = ١٤$ وحدة طول

، ∵ $ظا\,\theta = \frac{-٧}{٧\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

، قياس الزاوية الحادة التي ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}} = ٣٠°$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ $\theta = ٣٦٠° - ٣٠° = ٣٣٠°$

∴ $\vec{ل} = (١٤، ٣٣٠°)$

(٥) ∵ $\vec{جـ} = -٤\vec{س} - ٤\vec{ص} = (-٤، -٤)$

∴ $\|\vec{جـ}\| = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٤)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $ظا\,\theta = \frac{-٤}{-٤} = ١$

، ∵ قياس الزاوية الحادة التي ظلها ١ = ٤٥°

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ $\theta = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°$

∴ $\vec{جـ} = (٤\sqrt{٢}، ٢٢٥°)$

٥

(١) س = $١٢\sqrt{٣}$ جتا ٦٠° = $٦\sqrt{٣}$ ،

، ص = $١٢\sqrt{٣}$ جا ٦٠° = ١٨

∴ أ$(٦\sqrt{٣}، ١٨)$

(٢) س = $٥\sqrt{٢}$ جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ = −٥

، ص = $٥\sqrt{٢}$ جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = ٥ ∴ أ(−٥ ، ٥)

(٣) س = ٢٤ جتا ١٥٠° = $-١٢\sqrt{٣}$

ص = ٢٤ جا ١٥٠° = ١٢

∴ أ$(-١٢\sqrt{٣}، ١٢)$

(٤) س = ٦ جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ = ٣

ص = ٦ جا $\frac{٥\pi}{٣}$ = $-٣\sqrt{٣}$ ∴ أ$(٣، -٣\sqrt{٣})$

٦

(١) ∵ (−٦ س ، س ص) = (٣ ، ٥)

∴ −٦ س = ٣ ∴ س = $-\frac{١}{٢}$

، س ص = ٥ ∴ $-\frac{١}{٢}$ ص = ٥

∴ ص = −١٠

(٢) س − ٥ = ٢ ∴ س = ٧

، −٢ − ٠ = ص ∴ ص = −٣

(٣) ∵ (٣ ، ص) + (س ، −٢ س) − (−٤ ، ١) = $\vec{٠}$

∴ ٣ + س + ٤ = ٠ ∴ س = −٧

، ص − ٢ س − ١ = ٠ ∴ ص + ١٤ − ١ = ٠

∴ ص = −١٣

(٤) ∵ (٢ س ، ٣ س) + (−٣ ص ، ص) = (−٤ ، ٥)

∴ ٢ س − ٣ ص = −٤ (١)

، ٣ س + ص = ٥ (بضرب المعادلة × ٣)

∴ ٩ س + ٣ ص = ١٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١١ س = ١١ ∴ س = ١

وبالتعويض في (١) : ∴ ٢ − ٣ ص = −٤

∴ −٣ ص = −٦ ∴ ص = ٢

٧

(١) ∵ ٦ × ١٢ − (−٩) × (−٨) = ٧٢ − ٧٢ = ٠

∴ $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$

، ∵ −٩ × −٤ + ١٢ × −٣ = ٣٦ − ٣٦ = ٠

∴ $\vec{ب} \perp \vec{جـ}$

، $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ ، $\vec{ب} \perp \vec{جـ}$ ∴ $\vec{جـ} \perp \vec{أ}$

(٢) $٢\vec{أ} + \vec{ب} = ٢(٦، -٨) + (-٩، ١٢)$

$= (١٢، -١٦) + (-٩، ١٢) = (٣، -٤)$

، $\vec{ب} - ٢\vec{جـ} = (-٩، ١٢) - ٢(-٤، -٣)$

$= (-٩، ١٢) - (-٨، -٦) = (-١، ١٨)$

، $\frac{١}{٢}\vec{أ} + \vec{ب} - ٢\vec{جـ}$

$= \frac{١}{٢}(٦، -٨) + (-٩، ١٢) - ٢(-٤، -٣)$

$= (٣، -٤) + (-٩، ١٢) - (-٨، -٦)$

$= (٦، ١٧)$

٨

∵ -٢ ٢√٣ × ٢√٣ - ٢ × (-٣) = -٦ + ٦ = ٠

∴ أ // ب

٩

(١) ∵ ٢ × -١٢ - (-٨) × ٣ = -٢٤ + ٢٤ = ٠

∴ م // ن

(٢) ∵ ن // ل ∴ -٨ × ١٥ - (-١٢) × م = ٠

∴ ١٢م = ١٢٠ ∴ م = ١٠

(٣) ٤ م + ن = ٤ (٢ ، ٣) + (-٨ ، -١٢)

= (٨ ، ١٢) + (-٨ ، -١٢) = (٠ ، ٠)

، ٤ (م + ن) = ٤ [(٢ ، ٣) + (-٨ ، -١٢)]

= ٤ (-٦ ، -٩) = (-٢٤ ، -٣٦)

(٤) ∵ ق ⊥ ن ∴ ٦ × -٨ + ب × -١٢ = ٠

∴ -٤٨ - ١٢ ب = ٠ ∴ -١٢ ب = ٤٨

∴ ب = -٤

(٥) ∵ ق ⊥ ن ، ن // م ∴ ق ⊥ م

١٠

(١) ∵ ٢ ب = ٢ (-٢ ، ٥) = (-٤ ، ١٠)

= -٤ س + ١٠ ص

، ٢ ج = ٢ (٠ ، ١١) = (٠ ، ٢٢) = ٢٢ ص

، أ + ب - ج = (٣ ، -٢) + (-٢ ، ٥) - (٠ ، ١١)

= (١ ، -٨) = س - ٨ ص

، ١/٢ (ب + ج) = ١/٢ ((-٢ ، ٥) + (٠ ، ١١))

= ١/٢ (-٢ ، ١٦) = (-١ ، ٨)

= -س + ٨ ص

(٢) نفرض أن ج = ك أ + ل ب حيث ك ، ل ∈ ح

∴ ج = ك (٣ ، -٢) + ل (-٢ ، ٥)

= (٣ك ، -٢ك) + (-٢ل ، ٥ل)

= (٣ك - ٢ل ، -٢ك + ٥ل) = (٠ ، ١١)

∴ ٣ك - ٢ل = ٠ ∴ ٣ك = ٢ل

∴ ك = ٢/٣ ل ، -٢ك + ٥ل = ١١

∴ -٢ × ٢/٣ ل + ٥ل = ١١

∴ ١١/٣ ل = ١١ ∴ ل = ٣ ∴ ك = ٢

∴ ج = ٢ أ + ٣ ب

١١

∵ ٢ أ = ٢ ج - ٣ ء + ٢ هـ

∴ ٢ أ = ٢ (٤ ، -١) - ٣ (-٣ ، ٢) + ٢ (-٥ ، ١)

= (٨ ، -٢) - (-٩ ، ٦) + (-١٠ ، ٢)

= (٧ ، -٦)

∴ أ = (٧/٢ ، -٣)

١٢

(١) ∵ ج = (٢ ، ٣)

∴ ل = ٢ (٢ ، ٣) + ٣ (-٢ ، ٥) - (٧ ، -٣)

= (٤ ، ٦) + (-٦ ، ١٥) - (٧ ، -٣)

= (-٩ ، ٢٤)

، م = (٣ ، -٨)

، ∵ -٩ × -٨ - ٣ × ٢٤ = ٧٢ - ٧٢ = ٠

∴ ل // م

(٢) ∵ ل = ك م ∴ (-٩ ، ٢٤) = ك (٣ ، -٨)

∴ ك = -٣

١٣

∵ ج = ل + م + ٢ ن

= (٥ ، -٣√٣) + (-١ ، -٢√٣) + ٢ (-٣ ، √٣)

= (٤ ، -٥√٣) + (-٦ ، ٣√٣)

= (-٢ ، -٢√٣)

∴ ‖ج‖ = √((-٢)² + (-٢√٣)²)

= ٤ وحدات طول

، ظا θ = (-٢√٣)/(-٢) = √٣

∴ قياس الزاوية الحادة التي ظلها √٣ = ٦٠°

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ ج = (٤ ، ٢٤٠°)

١٤

(١) نفرض أن متجه الموضع للقوة = أ

∴ θ = ٩٠° ∴ أ = (٣٧ ، ٩٠°)

∴ س = ٣٧ جتا ٩٠° = ٠

، ص = ٣٧ جا ٩٠° = ٣٧ ∴ أ = ٣٧ ص

(٢) نفرض أن متجه الموضع للسرعة = ب

∴ θ = ١٨٠° ∴ ب = (٦٠ ، ١٨٠°)

∴ س = ٦٠ جتا ١٨٠° = -٦٠

، ص = ٦٠ جا ١٨٠° = ٠

∴ ب = -٦٠ س

(٣) نفرض أن متجه الموضع للإزاحة = ء

∴ θ = ٢٧٠° ∴ ء = (٢٥ ، ٢٧٠°)

∴ س = ٢٥ جتا ٢٧٠° = ٠

، ص = ٢٥ جا ٢٧٠° = -٢٥

∴ ء = -٢٥ ص

(٤) س = ٦ جتا π/٤ = ٣√٢

، ص = ٦ جا π/٤ = ٣√٢

∴ متجه الموضع = ٣√٢ س + ٣√٢ ص

(٥) نفرض أن متجه

موضع الإزاحة = أ

∴ θ = ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°

∴ أ = ١٥٠ جتا ١٥٠° س + ١٥٠ جا ١٥٠° ص

= -٧٥√٣ س + ٧٥ ص

(٦) نفرض أن متجه

موضع القوة = ج

∴ θ = ٣٦٠° - ٣٠°

= ٣٣٠°

∴ ج = ٢٠ جتا ٣٣٠° س

+ ٢٠ جا ٣٣٠° ص = ١٠√٣ س - ١٠ ص

(٧) نفرض أن متجه

موضع الإزاحة = ء

∴ θ = ٩٠° + ٤٥° = ١٣٥°

∴ ء = ٤٠ جتا ١٣٥° س

+ ٤٠ جا ١٣٥° ص

= -٢٠√٢ س + ٢٠√٢ ص

١٥

(١) ٢/٣ (٢) -٣/٢ (٣) ٥/٢ (٤) -١ (٥) ٣/٥

(٦) ١ (٧) -٤ (٨) -٥/٢ (٩) -٢

١٦

∵ أ = (٢ ، ١) ، ب = (١ ، ٣)

(١) أ + ك ب = (٢ ، ١) + (ك ، ٣ك)

= (٢ + ك ، ١ + ٣ك)

، ∵ المتجه س = (١ ، ٠)

∴ ١ + ٣ك = ٠

∴ ك = -١/٣

(٢) ل أ + ب = (٢ل ، ل) + (١ ، ٣)

= (٢ل + ١ ، ل + ٣)

، ∵ المتجه ص = (٠ ، ١)

∴ ٢ل + ١ = ٠

∴ ل = -١/٢

17

(١) ٢ هـ — (٢) ٤ ى — (٣) −٢ ى

(٤) −هـ — (٥) −٢ ى — (٦) −٢ هـ

(٧) ى — (٨) ٢ هـ — (٩) ٥ ى

(١٠) −٤ هـ — (١١) ٣ ى — (١٢) ٥ هـ

18

(١) إحداثيى نقطة النهاية = (١ ، ٤)

(٢) إحداثيى نقطة النهاية = (٢ ، ٢)

19

أ = −٤ س ، ب = −٣ ص

جـ = ٤ س + ٥ ص ، ء = ٥ ص

هـ = −٥ س + ٢ ص ، ل = ٥ س

ك = ٧ س − ٥ ص ، ر = ٣ س + ٢ ص

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (ب)
(٤) (ب)	(٥) (د)	(٦) (د)
(٧) (د)	(٨) (د)	(٩) (جـ)

إرشادات الحل :

(١) إذا كان طول المتجه أ = ٤ وحدات

فإن متجه الوحدة = ± $\frac{١}{٤}$ أ

∴ − $\frac{١}{٤}$ أ هو متجه وحده

(٢) ∵ ١٥ س + ٢٠ ص = ٥ (٣ س + ٤ ص)

= ٥ أ

∴ ١٥ س + ٢٠ ص // أ

، ∵ ‖ب‖ = √(٤٩ + ٥٧٦) = ٢٥

، ‖١٥ س + ٢٠ ص‖ = √(٢٢٥ + ٤٠٠) = ٢٥

∴ ‖١٥ س + ٢٠ ص‖ = ‖ب‖

∴ المتجه الذى له نفس معيار ب ويوازى أ

هو ١٥ س + ٢٠ ص

(٣) ك ب + جـ = ك (س + ص)

+ (س + ٢ ص)

= (ك + ١) س + (ك + ٢) ص

∵ أ ⊥ (ك ب + جـ)

∴ ٢ (ك + ١) + (−١) (ك + ٢) = صفر

∴ ٢ ك + ٢ − ك − ٢ = صفر

∴ ك = ١

(٤) نفرض أن أ = س ، ب = ص

فإن ‖أ‖ = ‖ب‖ ولكن أ ≠ ب

أى أن الجملة الغير صحيحة هى (ب)

(٥) ∵ ٦ × ١ + (−٣) (٢) = صفر ∴ أ ⊥ ب

أى أن الزاوية بين المتجهين = ٩٠°

(٦) ∵ أ = (٣ ، √٣) ∴ ظا θ_1 = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ θ_1 = ٣٠° ، ∵ ب = (−٤ ، ٠)

∴ ظا θ_2 = $\frac{٠}{−٤}$ ∴ θ_2 = ١٨٠°

∴ قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب

= ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

(٧) (د) هى عبارة خاطئة وذلك لأن عبارة تصنع ٣٠° مع الشمال تحمل معنيان هما ٣٠° شرق الشمال ، ٣٠° غرب الشمال

(٨) ‖−أ‖ = ‖أ‖ = ١٢

، θ = $\frac{٢}{٣}$ π + π = $\frac{٥}{٣}$ π

∴ الصورة القطبية للمتجه −أ = (١٢ ، $\frac{٥}{٣}$ π)

(٩) ∵ ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ق (∠ هـ) = ٣٠°

∴ المتجه أ بعد دورانه

٤٥° فى عكس اتجاه دوران

عقارب الساعة يصنع زاوية

مع محور السينات = ٣٠° + ٤٥° = ٧٥°

، ∵ ‖أ‖ = √((√٣)² + (١)²) = ٢

∴ المتجه أ فى صورته القطبية = (٢ ، ٧٥°)

3 إرشادات تمارين

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (أ)	(٥) (ب)
(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (أ)	(٩) (د)	(١٠) (جـ)
(١١) (أ)	(١٢) (د)	(١٣) (جـ)	(١٤) (أ)	(١٥) (ب)
(١٦) (ب)	(١٧) (جـ)	(١٨) (د)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (د)	(٢٥) (أ)
(٢٦) (أ)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (د)	(٢٩) (جـ)	(٣٠) (د)
(٣١) (أ)	(٣٢) أولاً : (ب)	ثانيًا : (جـ)		(٣٣) (ب)
(٣٤) (د)	(٣٥) (جـ)	(٣٦) (ب)	(٣٧) (جـ)	(٣٨) (جـ)
(٣٩) (أ)	(٤٠) (ب)	(٤١) (د)	(٤٢) (ب)	(٤٣) (د)
(٤٤) (جـ)	(٤٥) (جـ)	(٤٦) (جـ)	(٤٧) (جـ)	(٤٨) (ب)
(٤٩) (جـ)	(٥٠) (ب)	(٥١) (د)	(٥٢) (جـ)	(٥٣) (ب)
(٥٤) (جـ)	(٥٥) (ب)	(٥٦) (جـ)	(٥٧) (د)	(٥٨) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع ∴ ب جـ = أ ء

∴ جـ − ب = ء − أ

∴ جـ = ء − أ + ب = (−٢ ، −١) − (٣ ، ٠) + (٠ ، ٤)

= (−٥ ، ٣)

∴ إحداثيى نقطة جـ هما : (−٥ ، ٣)

2

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع ∴ أ ء = ب جـ

∴ (٧ − س ، ص − ٢) = (٩ − ٣ ، ١ − ٨)

∴ ٧ − س = ٦ ∴ س = ١

، ص − ٢ = −٧ ∴ ص = −٥

، ∵ أ ب = (٣ − ١ ، ٨ − ٢) = (٢ ، ٦)

∴ ‖أ ب‖ = √(٢² + ٦²) = ٢ √١٠ وحدة طول

∴ أ ء = (٧ − ١ ، −٥ − ٢) = (٦ ، −٧)

∴ ‖أ ء‖ = √(٦² + (−٧)²) = √٨٥ وحدة طول

3

أ ب = (١ + ١ ، ١ + ٤) = (٢ ، ٥)

= ٢ س + ٥ ص

ب جـ = (٦ − ١ ، −١ − ١) = (٥ ، −٢)

= ٥ س − ٢ ص

، أ ب ⊥ ب جـ لأن : [٢ × ٥ + ٥ × (−٢) = صفر]

4

∵ ٢ م + ٢ أ ب = ٢ جـ ب − ب أ

∴ ٢ م = ٢ جـ ب − ب أ − ٢ أ ب

= ٢ جـ ب + ٢ ب أ = ٢ (جـ ب + ب أ)

= ٢ جـ أ ∴ م = جـ أ

٥

(سص + صع) + ع س

= سع + ع س = ٠

٦

∵ هـ ب + ب حـ + حـ و = هـ و

، هـ أ + أ د + د و = هـ و

∴ هـ ب + ب حـ + حـ و

= هـ أ + أ د + د و

٧

(١) أ حـ + ب د

= (أ ب + ب حـ) + ب د

= (أ ب + ب د) + ب حـ

= أ د + ب حـ

(٢) أ ب + حـ د − حـ ب − أ د

= (أ ب − حـ ب) + (حـ د − أ د)

= أ حـ + حـ أ = أ حـ + (− أ حـ) = و

٨

∵ هـ أ + أ د + د و = هـ و

، هـ ب + ب حـ + حـ و = هـ و

، ∵ هـ أ = − هـ ب ، د و = − حـ و وبالجمع

∴ أ د + ب حـ = ٢ هـ و

٩

∵ ب حـ = ٢ أ د

∴ ب حـ // أ د

، ∵ ب حـ ≠ أ د

∴ الشكل أ ب حـ د شبه منحرف

في Δ أ د حـ : أ حـ = أ د + د حـ (١)

في Δ د ب حـ : ب د = ب حـ + حـ د (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ أ حـ + ب د = أ د + د حـ + ب حـ + حـ د

= أ د + ب حـ = أ د + ٢ أ د = ٤ أ د

١٠

في Δ أ د حـ :

∵ أ حـ = أ د + د حـ (١)

، في Δ د ب حـ :

ب د = ب حـ + حـ د (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ أ حـ + ب د = أ د + د حـ + ب حـ + حـ د

∴ أ حـ + ب د = أ د + ب حـ

، ∵ $\frac{\text{أ د}}{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب حـ = $\frac{٣}{٢}$ أ د

∴ أ حـ + ب د = أ د + $\frac{٣}{٢}$ أ د = $\frac{٥}{٢}$ أ د

١١

(١) ∵ أ حـ = أ د + د حـ

∴ ٢ أ حـ

= ٢ أ د + ٢ د حـ (١)

، ب د = ب حـ + حـ د

∴ ٢ ب د = ٢ ب حـ + ٢ حـ د (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ أ حـ + ٢ ب د = ٢ أ د + ٢ ب حـ

، ∵ ٢ ب حـ = ٥ أ د

∴ ٢ أ حـ + ٢ ب د = ٢ أ د + ٥ أ د = ٧ أ د

(٢) ∵ أ ب + ب حـ + حـ د = أ د

∴ ٢ أ ب + ٢ ب حـ − ٢ د حـ = ٢ أ د

∴ ٢ أ ب + ٥ أ د − ٢ د حـ = ٢ أ د

∴ ٢ أ ب − ٢ د حـ = ٢ أ د − ٥ أ د = −٣ أ د

= ٣ د أ

١٢

(١) ∵ أ حـ = أ ب + أ د (١)

، ب د = ب أ + أ د (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ أ حـ + ب د = أ ب + أ د + ب أ + أ د = ٢ أ د

(٢) ∵ أ حـ = أ ب + أ د (١)

، ب د = ب أ + ب حـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ أ حـ + ب د = أ ب + أ د + ب أ + ب حـ

∴ أ حـ + ب د = ٢ ب حـ

∴ أ حـ − د ب = ٢ ب حـ

(٣) ∵ أ ب + أ د = أ حـ (١)

، ∵ ٢ حـ م = حـ أ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

أ ب + أ د + ٢ حـ م = أ حـ + حـ أ

∴ أ ب + أ د + ٢ حـ م = ٠

(٤) في Δ ن أ حـ : ∵ م منتصف أ حـ

∴ ن أ + ن حـ = ٢ ن م (١)

في Δ ن ب د : ∵ م منتصف ب د

∴ ن ب + ن د = ٢ ن م (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ن أ + ن حـ = ن ب + ن د

(٥) في Δ ن أ حـ : ∵ م منتصف أ حـ

∴ ن أ + ن حـ = ٢ ن م (١)

، في Δ ن ب د : ∵ م منتصف ب د

∴ ن ب + ن د = ٢ ن م (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ن أ + ن حـ + ن ب + ن د = ٤ ن م

(٦) في Δ أ ن د : أ ن + ن د = أ د (١)

في Δ ب ن حـ : ب ن + ن حـ = ب حـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

أ ن + ن د + ب ن + ن حـ = أ د + ب حـ

∴ أ ن + ب ن + ن د + ن حـ = ٢ أ د

١٣

أ ب + أ د = أ حـ

، ∵ أ ب = د حـ

∴ أ ب + أ د + د حـ = أ حـ + أ ب

، ∵ هـ منتصف ب حـ

∴ في Δ أ ب حـ : أ ب + أ حـ = ٢ أ هـ

∴ أ ب + أ د + د حـ = ٢ أ هـ

١٤

في Δ أ ب د :

∵ ص منتصف ب د

أ ب + أ د = ٢ أ ص (١)

، في Δ ب حـ د : ∵ ص منتصف ب د

حـ ب + حـ د = ٢ حـ ص (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ أ ب + أ د + حـ ب + حـ د = ٢ أ ص + ٢ حـ ص (٣)

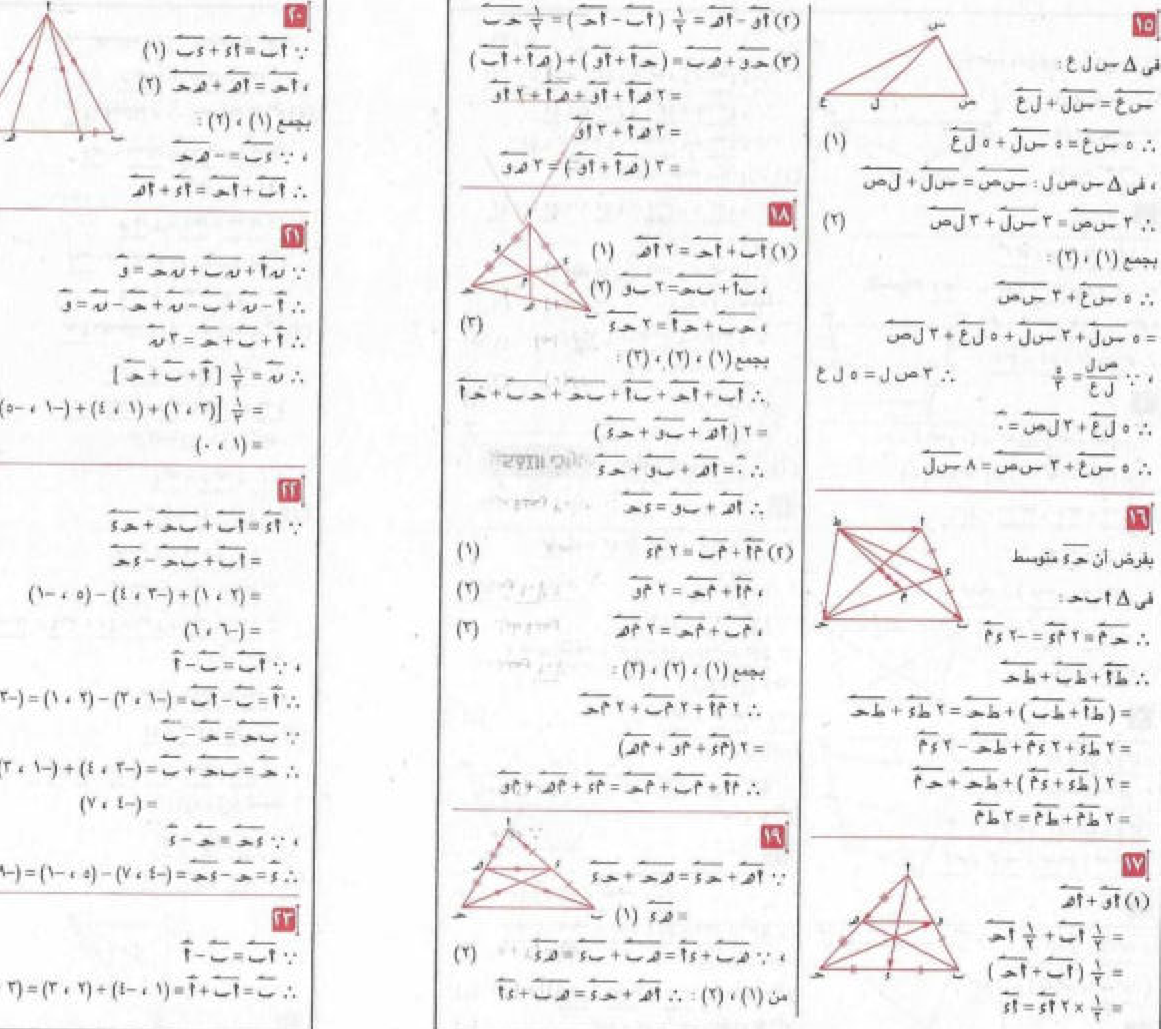
، في Δ أ ص حـ : ∵ س منتصف أ حـ

∴ ص أ + ص حـ = ٢ ص س

∴ أ ص + حـ ص = ٢ س ص (٤)

من (٣) ، (٤) نجد أن :

أ ب + أ د + حـ ب + حـ د = ٤ س ص



١٥

في Δ س ل ع :

س ع = س ل + ل ع

∴ ٥ س ع = ٥ س ل + ٥ ل ع (١)

، في Δ س ص ل : س ص = س ل + ل ص

∴ ٢ س ص = ٢ س ل + ٢ ل ص (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ س ع + ٢ س ص

= ٥ س ل + ٢ س ل + ٥ ل ع + ٢ ل ص

، ∵ $\frac{ص ل}{ل ع} = \frac{٥}{٢}$ ∴ ٢ ص ل = ٥ ل ع

∴ ٥ ل ع + ٢ ل ص = ٠

∴ ٥ س ع + ٢ س ص = ٨ س ل

١٦

بفرض أن حـ ء متوسط

في Δ أ ب حـ :

∴ حـ م = ٢ م ء = -٢ ء م

∴ ط أ + ط ب + ط حـ

= (ط أ + ط ب) + ط حـ = ٢ ط ء + ط حـ

= ٢ ط ء + ٢ ء م + ط حـ - ٢ ء م

= ٢ (ط ء + ء م) + ط حـ + حـ م

= ٢ ط م + ط م = ٣ ط م

١٧

(١) أ و + أ هـ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب + $\frac{١}{٢}$ أ حـ

= $\frac{١}{٢}$ (أ ب + أ حـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ أ ء = أ ء

(٢) أ و - أ هـ = $\frac{١}{٢}$ (أ ب - أ حـ) = $\frac{١}{٢}$ حـ ب

(٣) حـ و + هـ ب = (حـ أ + أ و) + (هـ أ + أ ب)

= ٢ هـ أ + أ و + هـ أ + ٢ أ و

= ٣ هـ أ + ٣ أ و

= ٣ (هـ أ + أ و) = ٣ هـ و

١٨

(١) أ ب + أ حـ = ٢ أ هـ (١)

، ب أ + ب حـ = ٢ ب و (٢)

، حـ ب + حـ أ = ٢ حـ ء (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ أ ب + أ حـ + ب أ + ب حـ + حـ ب + حـ أ

= ٢ (أ هـ + ب و + حـ ء)

∴ ٠ = أ هـ + ب و + حـ ء

∴ أ هـ + ب و = ء حـ

(٢) م أ + م ب = ٢ م ء (١)

، م أ + م حـ = ٢ م و (٢)

، م ب + م حـ = ٢ م هـ (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ٢ م أ + ٢ م ب + ٢ م حـ

= ٢ (م ء + م و + م هـ)

∴ م أ + م ب + م حـ = م ء + م هـ + م و

١٩

∵ أ هـ + حـ ء = هـ حـ + حـ ء

= هـ ء (١)

، ∵ هـ ب + ء أ = هـ ب + ب ء = هـ ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ هـ + حـ ء = هـ ب + ء أ

٢٠

∵ أ ب = أ ء + ء ب (١)

، أ حـ = أ هـ + هـ حـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

، ∵ ء ب = - هـ حـ

∴ أ ب + أ حـ = أ ء + أ هـ

٢١

∵ ن أ + ن ب + ن حـ = و

∴ أ - ن + ب - ن + حـ - ن = و

∴ أ + ب + حـ = ٣ ن

∴ ن = $\frac{١}{٣}$ [أ + ب + حـ]

= $\frac{١}{٣}$ [(١ ، ٢) + (٤ ، ١) + (-٥ ، -١)]

= (٠ ، ١)

٢٢

∵ أ ء = أ ب + ب حـ + حـ ء

= أ ب + ب حـ - ء حـ

= (١ ، ٢) + (٤ ، -٣) - (-١ ، ٥)

= (٦ ، -٦)

، ∵ أ ب = ب - أ

∴ أ = ب - أ ب = (٢ ، -١) - (١ ، ٢) = (٢ ، -٣)

∵ ب حـ = حـ - ب

∴ حـ = ب حـ + ب = (٤ ، -٣) + (٣ ، -١)

= (٧ ، -٤)

، ∵ ء حـ = حـ - ء

∴ ء = حـ - ء حـ = (٧ ، -٤) - (-١ ، ٥) = (٨ ، -٩)

٢٣

∵ أ ب = ب - أ

∴ ب = أ ب + أ = (-٤ ، ١) + (٢ ، ٢) = (-١ ، ٣)

∴ ل (٢ ، ٢) - م (-١ ، ٣) = (١٥ ، -١)

∴ ٢ ل - ٣ م = -١ (١)

، ٣ ل + م = ١٥ (بضرب المعادلة × ٣)

∴ ٩ ل + ٣ م = ٤٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١١ ل = ٤٤ ∴ ل = ٤

وبالتعويض في (١) : ∴ م = ٣

٢٤

∵ أ ب = (٣ - ٢ ، ٢ - ٠) = (١ ، ٢)

، ب حـ = (-٥ - ٣ ، ٥ - س - ٢) = (-٨ ، ٣ - س)

، ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ ١ × -٨ + ٢ (٣ - س) = ٠

∴ -٨ + ٦ - ٢ س = ٠ ∴ س = -١

٢٥

∵ أ ب حـ ء مستطيل

∴ أ ب = ب - أ = (٢ ، -٢) - (٥ ، ١)

= (-٣ ، -٢)

، ب حـ = حـ - ب = (-٣ ، ك) - (٢ ، -٢)

= (-٥ ، ك + ٢)

، ∵ أ ب ⊥ ب حـ

∴ (-٣) × (-٥) + (-٢) (ك + ٢) = ٠

∴ ١٥ - ٢ ك - ٦ = ٠ ∴ ك = ٢

، ∵ أ ء = ب حـ ∴ ء - أ = حـ - ب

∴ ء = حـ - ب + أ

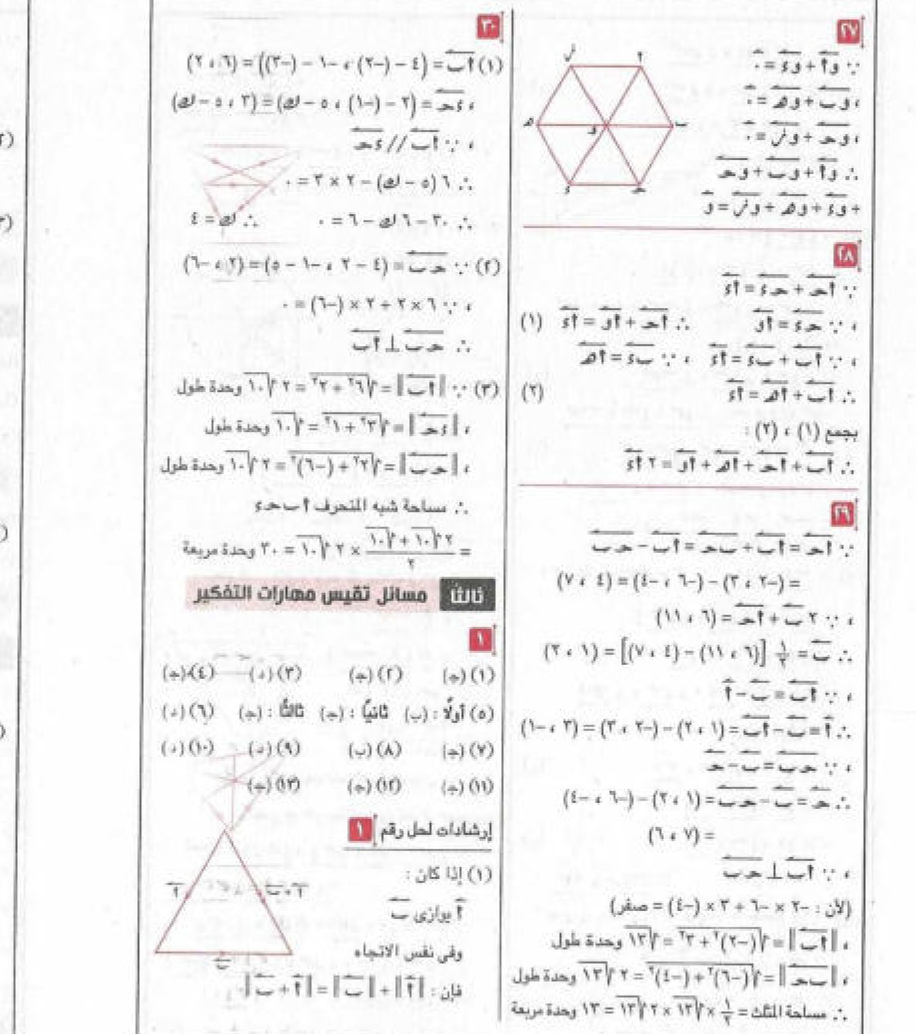
= (-٣ ، ٢) - (٢ ، -٢) + (٥ ، ١)

= (٠ ، ٦)

٢٦

(١) ك = $\frac{٣}{٢}$ (٢) ل = $\frac{٣}{٥}$

(٣) م = -$\frac{٥}{٢}$ (٤) ن = $\frac{٢}{٥}$



٢٧

$\because \overrightarrow{وأ}+\overrightarrow{وء}=\vec{0}$

، $\overrightarrow{وب}+\overrightarrow{وهـ}=\vec{0}$

، $\overrightarrow{وحـ}+\overrightarrow{ول}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{وأ}+\overrightarrow{وب}+\overrightarrow{وحـ}+\overrightarrow{وء}+\overrightarrow{وهـ}+\overrightarrow{ول}=\vec{0}$

٢٨

$\because \overrightarrow{أحـ}+\overrightarrow{حـء}=\overrightarrow{أء}$

، $\because \overrightarrow{حـء}=\overrightarrow{أو}$ $\therefore \overrightarrow{أحـ}+\overrightarrow{أو}=\overrightarrow{أء}$ (١)

، $\because \overrightarrow{أب}+\overrightarrow{بء}=\overrightarrow{أء}$ ، $\because \overrightarrow{بء}=\overrightarrow{أهـ}$

$\therefore \overrightarrow{أب}+\overrightarrow{أهـ}=\overrightarrow{أء}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\therefore \overrightarrow{أب}+\overrightarrow{أحـ}+\overrightarrow{أهـ}+\overrightarrow{أو}=2\,\overrightarrow{أء}$

٢٩

$\because \overrightarrow{أحـ}=\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{بحـ}=\overrightarrow{أب}-\overrightarrow{حـب}$

$=(-2, 3)-(-6, -4)=(4, 7)$

، $\because 2\,\overrightarrow{ب}+\overrightarrow{أحـ}=(6, 11)$

$\therefore \overrightarrow{ب}=\frac{1}{2}\left[(6, 11)-(4, 7)\right]=(1, 2)$

، $\because \overrightarrow{أب}=\overrightarrow{ب}-\overrightarrow{أ}$

$\therefore \overrightarrow{أ}=\overrightarrow{ب}-\overrightarrow{أب}=(1, 2)-(-2, 3)=(3, -1)$

، $\because \overrightarrow{حـب}=\overrightarrow{ب}-\overrightarrow{حـ}$

$\therefore \overrightarrow{حـ}=\overrightarrow{ب}-\overrightarrow{حـب}=(1, 2)-(-6, -4)$

$=(7, 6)$

، $\because \overrightarrow{أب}\perp\overrightarrow{حـب}$

(لأن : $-2\times -6+3\times(-4)=$ صفر)

، $\|\overrightarrow{أب}\|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ وحدة طول

، $\|\overrightarrow{بحـ}\|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$ وحدة طول

$\therefore$ مساحة المثلث $=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times 2\sqrt{13}=13$ وحدة مربعة

٣٠

(١) $\overrightarrow{أب}=\left(4-(-2), -1-(-3)\right)=(6, 2)$

، $\overrightarrow{ءحـ}=\left(2-(-1), 5-ك\right)=(3, 5-ك)$

، $\because \overrightarrow{أب}\,//\,\overrightarrow{ءحـ}$

$\therefore 6(5-ك)-2\times 3=0$

$\therefore 30-6ك-6=0$ $\therefore ك=4$

(٢) $\because \overrightarrow{حـب}=(4-2, -1-5)=(2, -6)$

، $\because 6\times 2+2\times(-6)=0$

$\therefore \overrightarrow{حـب}\perp\overrightarrow{أب}$

(٣) $\because \|\overrightarrow{أب}\|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$ وحدة طول

، $\|\overrightarrow{ءحـ}\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ وحدة طول

، $\|\overrightarrow{حـب}\|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}$ وحدة طول

$\therefore$ مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء

$=\frac{2\sqrt{10}+\sqrt{10}}{2}\times 2\sqrt{10}=30$ وحدة مربعة

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ء) (٤) (جـ)

(٥) أولاً : (ب) ثانياً : (جـ) ثالثاً : (جـ) (٦) (ء)

(٧) (جـ) (٨) (ب) (٩) (ء) (١٠) (ء)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) إذا كان :

$\overrightarrow{أ}$ يوازي $\overrightarrow{ب}$

وفي نفس الاتجاه

فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|+\|\overrightarrow{ب}\|=\|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|$

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ لا يوازي $\overrightarrow{ب}$ فإنه من متباينة المثلث

$\|\overrightarrow{أ}\|+\|\overrightarrow{ب}\|>\|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|$

$\therefore \|\overrightarrow{أ}\|+\|\overrightarrow{ب}\|\geq\|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|$

(٢) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\|+\|\overrightarrow{ب}\|=\|\overrightarrow{حـ}\|=\|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|$

$\therefore \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ في نفس الاتجاه ، $\overrightarrow{أ}\,//\,\overrightarrow{ب}$

(٣) من قاعدة متوازي الأضلاع

نجد أن أحد القطرين

يمثل $\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}$

، والقطر الآخر

يمثل $\overrightarrow{أ}-\overrightarrow{ب}$

، $\because \|\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}\|=\|\overrightarrow{أ}-\overrightarrow{ب}\|$

$\therefore$ القطران متساويان $\therefore$ الشكل مستطيل

$\therefore$ المتجهان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

(٤) $\because \overrightarrow{أص}+\overrightarrow{سص}$

$=\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{بص}+\overrightarrow{سحـ}+\overrightarrow{حـص}$

$=\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{سحـ}=2\,\overrightarrow{سحـ}+\overrightarrow{سحـ}$

$=3\,\overrightarrow{سحـ}$

$\therefore ك=3$

(٥) أولاً : $\because$ م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

$\therefore \overrightarrow{أء}+\overrightarrow{بهـ}+\overrightarrow{حـو}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{أحـ}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{بأ}+\overrightarrow{بحـ}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{حـب}+\overrightarrow{حـأ}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{أحـ}+\overrightarrow{بأ}+\overrightarrow{بحـ}+\overrightarrow{حـب}+\overrightarrow{حـأ}\right)$

$=\overrightarrow{\text{صفر}}$

ثانياً : $\overrightarrow{مأ}+\overrightarrow{مب}+\overrightarrow{محـ}$

$=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{ءأ}+\frac{2}{3}\,\overrightarrow{هـب}+\frac{2}{3}\,\overrightarrow{وحـ}$

$=\frac{-2}{3}\left(\overrightarrow{أء}+\overrightarrow{بهـ}+\overrightarrow{حـو}\right)=$ صفر

، $\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{بحـ}+\overrightarrow{حـأ}=$ صفر

ثالثاً : $\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{أحـ}=2\,\overrightarrow{أء}=2\left(\frac{3}{2}\,\overrightarrow{أم}\right)=3\,\overrightarrow{أم}$

$\therefore ك=3$

(٦) $\because \overrightarrow{ءب}+\overrightarrow{بأ}=\overrightarrow{ءأ}=2\,\overrightarrow{ءم}$ (١)

، $\overrightarrow{ءو}+\overrightarrow{وم}=\overrightarrow{ءم}$ (٢)

، $\overrightarrow{ءأ}=2\,\overrightarrow{ءم}$ (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) :

$\overrightarrow{ءب}+\overrightarrow{بأ}+\overrightarrow{ءو}+\overrightarrow{وم}+\overrightarrow{ءأ}=5\,\overrightarrow{ءم}$

$\therefore \overrightarrow{ءب}+\overrightarrow{ءو}+\overrightarrow{ءأ}=5\,\overrightarrow{ءم}$ $\therefore ك=5$

(٧) $\because \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$

هي متجهات وحدة

، $\overrightarrow{أ}+\overrightarrow{ب}=\overrightarrow{حـ}$

$\therefore$ المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$

تمثل مثلث متساوي الأضلاع س ص ل

كما في الشكل المقابل

، ق (∠ س ل ع) = ١٢٠°

$\therefore \overrightarrow{سع}$ تمثل المتجه $\left(\overrightarrow{أ}-\overrightarrow{ب}\right)$

$\therefore \|\overrightarrow{أ}-\overrightarrow{ب}\|=\sqrt{3}$

(٨) $\because \overrightarrow{حـء}=\overrightarrow{حـأ}+\overrightarrow{أء}$ (١)

، $\overrightarrow{حـء}=\overrightarrow{حـب}+\overrightarrow{بء}$

$\therefore 3\,\overrightarrow{حـء}=3\,\overrightarrow{حـب}+3\,\overrightarrow{بء}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$4\,\overrightarrow{حـء}=\overrightarrow{حـأ}+\overrightarrow{أء}+3\,\overrightarrow{حـب}+3\,\overrightarrow{بء}$

$=-\overrightarrow{أحـ}+3\,\overrightarrow{حـب}$

∴ حء = ١/٤ أحـ + ٣/٤ حـب

∴ ك = ١/٤ ، م = ٣/٤

∴ ك + م = ١/٤ + ٣/٤ = ١

(٩) ∵ أء ينصف ∠ب أحـ ، ∵ أب = ٢ أحـ

∴ بء = ٢ ءحـ ∴ بء = ٢ ءحـ

، ∵ أء = أب + بء (١)

، ∵ أء = أحـ + حـء

∴ ٢ أء = ٢ أحـ + ٢ حـء (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

٣ أء = أب + بء + ٢ أحـ + ٢ حـء

∴ ٣ أء = أب + ٢ أحـ

∴ أء = ١/٣ (أب + ٢ أحـ)

(١٠) ∵ بو // أء ∴ Δ هـ و ب ~ Δ هـ أ ء

∴ هـء / بهـ = أهـ / هـو = أء / بو = ١/٢ = ٢

∴ هـء = ٢ ب هـ ∴ هـء = ٢ ب هـ

∵ في Δ أ هـ ء : أهـ = أء + ءهـ (١)

، في Δ أ هـ ب : ∵ أهـ = أب + ب هـ

∴ ٢ أهـ = ٢ أب + ٢ ب هـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٤ أهـ = ٢ أب + ٢ ب هـ + أء + ء هـ

∴ أهـ = ٢/٤ أب + ١/٤ أء

(١١) ∵ ‖أحـ‖ = ٢٤ سم

∴ ‖ن ب‖ = ١٢ سم

∴ ‖ن م‖ = ٤ سم

، ∵ م ب + م حـ = ٢ م س

∴ م ب + ٢ م ء = ٢ م س (١)

، ∵ م ب + م أ = ٢ م ص

∴ م ب + ٢ م هـ = ٢ م ص (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ م ب + ٢ م ء + ٢ م هـ = ٢ (م س + م ص)

∴ م ب + م ء + م هـ = ١/٢ م أ + ١/٢ حـ م

= ١/٢ (٢ ن م) = ن م

∴ ‖م ب + م ء + م هـ‖ = ‖ن م‖ = ٤ سم

(١٢) العمل نرسم أء متوسط في Δ أ ب حـ

، ∵ م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

∴ م ص / ء حـ = أ م / أ ء = ٢/٣

∴ م ص = ٢/٣ ء حـ

= ٢/٣ (١/٢ ب حـ)

= ١/٣ ب حـ

، وبالمثل م س = ١/٣ حـ أ ، م ع = ١/٣ أ ب

∴ م س + م ص + م ع

= ١/٣ حـ أ + ١/٣ ب حـ + ١/٣ أ ب

= ١/٣ (حـ أ + أ ب + ب حـ)

= ١/٣ × صفر = صفر

(١٣) نرسم المربع و حـ ء أ

∵ حا ٤٥° = أ و / ء و

∴ ١ / √٢ = أ و / ء و

∴ √٢ أ و = ء و

، ∵ أ و = و ب

∴ ء و = √٢ و ب ∴ و ء = √٢ و ب

∴ (و أ + و حـ) + و ب = و ء + و ب

= √٢ و ب + و ب

= (√٢ + ١) و ب

٢

∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ∴ ء حـ = أ ب

، ∵ أ ب س ص متوازي أضلاع

∴ ص س = أ ب ∴ ء حـ = ص س

∴ الشكل حـ س ص ء متوازي أضلاع

٣

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ل = ص ع

، ∵ س هـ = و ع

، س هـ // و ع

∴ س هـ = و ع

∴ س ل − س هـ = ص ع − و ع

∴ هـ ل = ص و

∴ الشكل هـ ص و ل متوازي أضلاع

∴ هـ و ، ص ل ينصف كلًا منهما الآخر.

٤

∵ هـ ، و منتصفا م ب ، م حـ على الترتيب

∴ هـ و // ب حـ ، هـ و = ١/٢ ب حـ

∴ هـ و = ١/٢ ب حـ (١)

، ∵ أ ء // ب حـ ، أ ء = ١/٢ ب حـ

∴ أ ء = ١/٢ ب حـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ ء = هـ و

∴ الشكل أ هـ و ء متوازي أضلاع

٥

∵ Δ أ ب حـ فيه :

أ حـ = أ ب + ب حـ (١)

، ∵ Δ ء ب حـ فيه :

ء ب = ء حـ + حـ ب (٢)

٢

أ ب + ء حـ + حـ ب + أ ء

= (ن ب − ن أ)

+ (ن حـ − ن ء)

+ (ع ب − ع حـ) + (ع أ − ع ء)

= (ن ب + ن حـ) + (ع ب + ع أ)

− (ن أ + ن ء) − (ع حـ + ع ء)

= ٢ ن ص + ٢ ع س − ٢ (ن ص + ع س)

ارشادات تمارين 4

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

مسائل على التطبيقات الهندسية

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (جـ) (٦) (د) (٧) (د)

مسائل على التطبيقات الفيزيائية

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (جـ)

(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (ب) (٩) (ب) (١٠) (جـ)

(١١) (أ) (١٢) (جـ) (١٣) (ب) (١٤) (جـ) (١٥) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على التطبيقات الهندسية

١

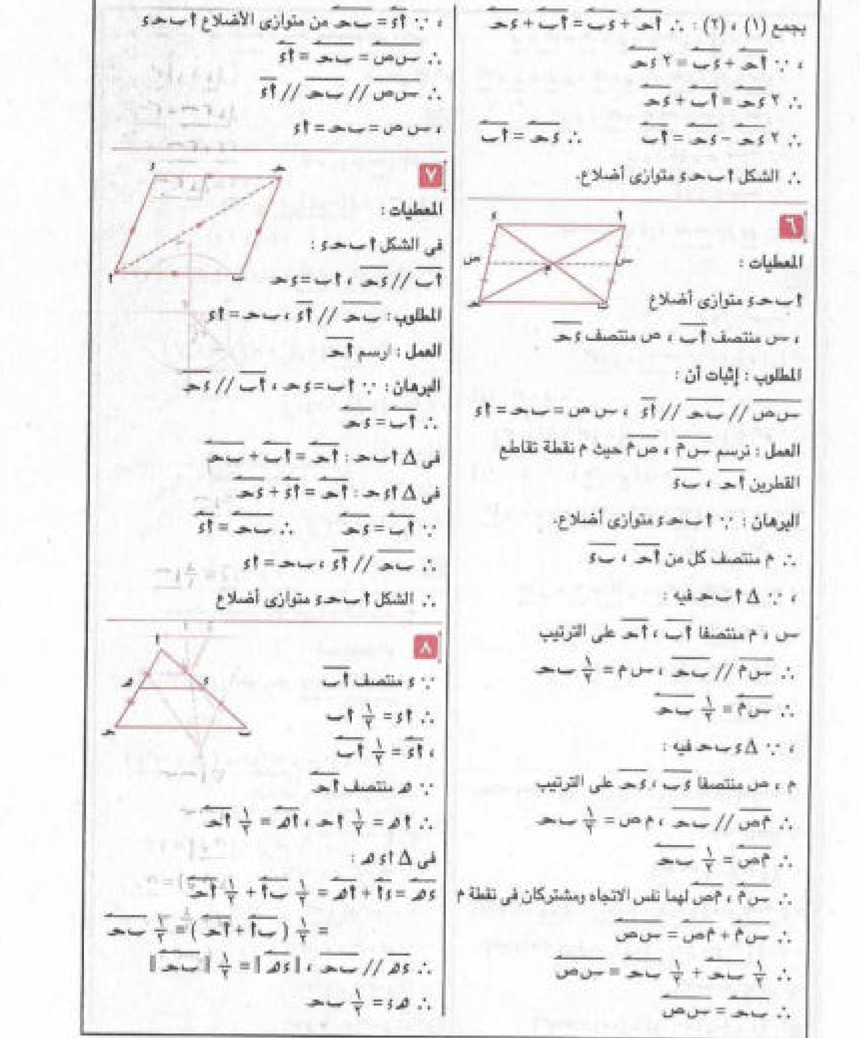
∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ∴ أ ب = ء حـ

، ∵ هـ منتصف أ ب ∴ هـ ب = ١/٢ أ ب

، ∵ و منتصف ء حـ ∴ ء و = ١/٢ ء حـ

∴ هـ ب = ء و

∴ ء هـ ب و متوازي أضلاع



بجمع (١) ، (٢) : ∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

∴ $٢\,\overrightarrow{\text{ءحـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

∴ $٢\,\overrightarrow{\text{ءحـ}} - \overrightarrow{\text{ءحـ}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ءحـ}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

∴ الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

٦

المعطيات :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع

، س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ءحـ}}$

المطلوب : إثبات أن :

$\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب حـ}} // \overline{\text{أء}}$ ، س ص = ب حـ = أ ء

العمل : نرسم $\overline{\text{س م}}$ ، $\overline{\text{ص م}}$ حيث م نقطة تقاطع القطرين $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

البرهان : ∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

∴ م منتصف كل من $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

، ∵ Δ أ ب حـ فيه :

س ، م منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ على الترتيب

∴ $\overline{\text{س م}} // \overline{\text{ب حـ}}$ ، س م = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ $\overrightarrow{\text{س م}} = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ب حـ}}$

، ∵ Δ ء ب حـ فيه :

م ، ص منتصفا $\overline{\text{ءب}}$ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ على الترتيب

∴ $\overline{\text{م ص}} // \overline{\text{ب حـ}}$ ، م ص = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ $\overrightarrow{\text{م ص}} = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{س م}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ص}}$ لهما نفس الاتجاه ومشتركان في نقطة م

∴ $\overrightarrow{\text{س م}} + \overrightarrow{\text{م ص}} = \overrightarrow{\text{س ص}}$

∴ $\frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ب حـ}} + \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{س ص}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{س ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ من متوازي الأضلاع أ ب حـ ء

∴ $\overrightarrow{\text{س ص}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أء}}$

∴ $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب حـ}} // \overline{\text{أء}}$

، س ص = ب حـ = أ ء

٧

المعطيات :

في الشكل أ ب حـ ء :

$\overline{\text{أب}} // \overline{\text{ءحـ}}$ ، أ ب = ء حـ

المطلوب : $\overline{\text{ب حـ}} // \overline{\text{أء}}$ ، ب حـ = أ ء

العمل : ارسم $\overline{\text{أحـ}}$

البرهان : ∵ أ ب = ء حـ ، $\overline{\text{أب}} // \overline{\text{ءحـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

في Δ أ ب حـ : $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

في Δ أ ء حـ : $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أء}}$

∴ $\overline{\text{ب حـ}} // \overline{\text{أء}}$ ، ب حـ = أ ء

∴ الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع

٨

∵ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ أ ء = $\frac{١}{٢}$ أ ب

، $\overrightarrow{\text{أء}} = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{أب}}$

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ ، $\overrightarrow{\text{أهـ}} = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{أحـ}}$

في Δ أ ء هـ :

$\overrightarrow{\text{ءهـ}} = \overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}} = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ب أ}} + \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{أحـ}}$

$= \frac{١}{٢}\left(\overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أحـ}}\right) = \frac{١}{٢}\,\overrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ $\overline{\text{ءهـ}} // \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{ءهـ}}\| = \frac{١}{٢}\,\|\overrightarrow{\text{ب حـ}}\|$

∴ هـ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

٩

∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ في جهة الرأس

∴ $\overrightarrow{\text{أم}} = \frac{٢}{٣}\,\overrightarrow{\text{أء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أء}} = \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أم}}$ (١)

، في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{\text{أء}}$ متوسط

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = ٢\left(\frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أم}}\right)$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أحـ}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أم}}$

∴ $\vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} + \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{أ}} = ٣\left(\vec{\text{م}} - \vec{\text{أ}}\right)$

∴ $\vec{\text{ب}} + \vec{\text{حـ}} - ٢\,\vec{\text{أ}} = ٣\,\vec{\text{م}} - ٣\,\vec{\text{أ}}$

∴ $\vec{\text{ب}} + \vec{\text{حـ}} - ٢\,\vec{\text{أ}} + ٣\,\vec{\text{أ}} = ٣\,\vec{\text{م}}$

∴ $٣\,\vec{\text{م}} = \vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}} + \vec{\text{حـ}}$

∴ $\vec{\text{م}} = \frac{١}{٣}\left(\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}} + \vec{\text{حـ}}\right)$

∴ $\vec{\text{م}} = \frac{١}{٣}$ (٦ + ٨ − ٢ ، ٥ − ٣ − ٥)

= $\frac{١}{٣}$ (١٢ ، −٣) = (٤ ، −١)

∴ نقطة تلاقي متوسطات المثلث هي : (٤ ، −١)

١٠

$\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = (−٤ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ = (−١٠ ، −٥)

، ∵ −٤ × −٥ − (−٢) × (−١٠) = صفر

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} // \overrightarrow{\text{أء}}$ (١)

، ∵ $\|\overrightarrow{\text{ب حـ}}\| = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٢)^٢} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

، $\|\overrightarrow{\text{أء}}\| = \sqrt{(-١٠)^٢ + (-٥)^٢} = ٥\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ ب حـ ≠ أ ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

١١

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−٢ ، −٥) ، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = (−٢ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ الشكل متوازي أضلاع (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (−٧ ، −٧) ، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = (−٣ ، ٣)

، ∵ −٧ × −٣ + (−٧) × ٣ = ٠

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}} \perp \overrightarrow{\text{ب ء}}$ ∴ الشكل أ ب حـ ء معين.

١٢

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}}$ = (٩ − ١ ، ٠ − (−٢)) = (٨ ، ٢)

، $\overrightarrow{\text{ءحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ء}}$ = (٨ − ٠ ، ٤ − ٢) = (٨ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ الشكل متوازي أضلاع.

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ب}}$ = (٨ − ٩ ، ٤ − ٠) = (−١ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \perp \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ لأن [٨ × (−١) + ٢ × ٤ = ٠]

∴ الشكل أ ب حـ ء مستطيل.

، ∵ $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{٨^٢ + ٢^٢} = ٢\sqrt{١٧}$ وحدة طول

، $\|\overrightarrow{\text{ب حـ}}\| = \sqrt{(-١)^٢ + ٤^٢} = \sqrt{١٧}$ وحدة طول

∴ محيط المستطيل = ٢ $\left(٢\sqrt{١٧} + \sqrt{١٧}\right)$

= $٦\sqrt{١٧}$ وحدة طول

، مساحة المستطيل = $٢\sqrt{١٧} \times \sqrt{١٧}$ = ٣٤ وحدة مربعة.

١٣

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}}$ = (٦ − ١ ، ١ − ٣) = (٥ ، −٢)

، $\overrightarrow{\text{ءحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ء}}$ = (٤ − (−١) ، −٤ − (−٢))

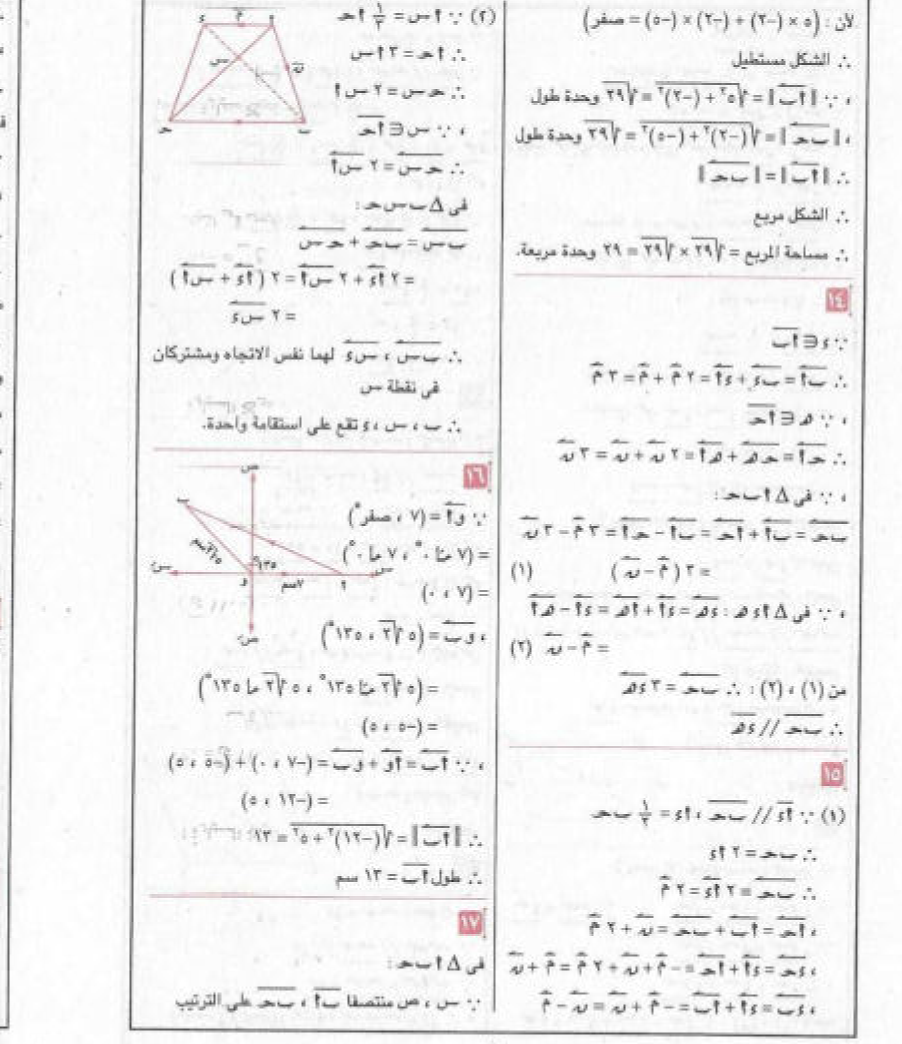
= (٥ ، −٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ الشكل متوازي أضلاع.

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ب}}$ = (٤ − ٦ ، −٤ − ١)

= (−٢ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \perp \overrightarrow{\text{ب حـ}}$



لأن: (٥ × (−٢) + (−٢) × (−٥) = صفر)

∴ الشكل مستطيل

، ∵ ‖أب‖ = √(٥² + (−٢)²) = √٢٩ وحدة طول

، ‖ب حـ‖ = √((−٢)² + (−٥)²) = √٢٩ وحدة طول

∴ ‖أب‖ = ‖ب حـ‖

∴ الشكل مربع

∴ مساحة المربع = √٢٩ × √٢٩ = ٢٩ وحدة مربعة.

١٤

∵ ء ∈ أب

∴ ب أ = ب ء + ء أ = ٢ م + م = ٣ م

، ∵ هـ ∈ أحـ

∴ حـ أ = حـ هـ + هـ أ = ٢ ن + ن = ٣ ن

، ∵ في △ أ ب حـ:

ب حـ = ب أ + أ حـ = ب أ − حـ أ = ٣ م − ٣ ن

= ٣ (م − ن) (١)

، ∵ في △ أ ء هـ: ء هـ = ء أ + أ هـ = ء أ − هـ أ

= م − ن (٢)

من (١) ، (٢): ∴ ب حـ = ٣ ء هـ

∴ ب حـ // ء هـ

١٥

(١) ∵ أ ء // ب حـ ، أ ء = ½ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ أ ء

∴ ب حـ = ٢ أ ء = ٢ م

، أ حـ = أ ب + ب حـ = ن + ٢ م

، ء حـ = ء أ + أ حـ = − م + ن + ٢ م = م + ن

، ء ب = ء أ + أ ب = − م + ن = ن − م

(٢) ∵ أ س = ½ أ حـ

∴ أ حـ = ٢ أ س

∴ حـ س = ٢ س أ

، ∵ س ∈ أحـ

∴ حـ س = ٢ س أ

في △ ب س حـ:

ب س = ب حـ + حـ س

= ٢ أ ء + ٢ س أ = ٢ (أ ء + س أ)

= ٢ س ء

∴ ب س ، س ء لهما نفس الاتجاه ومشتركان

في نقطة س

∴ ب ، س ، ء تقع على استقامة واحدة.

١٦

∵ و أ = (٧ ، صفر°)

= (٧ جتا ٠° ، ٧ جا ٠°)

= (٧ ، ٠)

، و ب = (٥√٢ ، ١٣٥°)

= (٥√٢ جتا ١٣٥° ، ٥√٢ جا ١٣٥°)

= (−٥ ، ٥)

، ∵ أ ب = أ و + و ب = (−٧ ، ٠) + (−٥ ، ٥)

= (−١٢ ، ٥)

∴ ‖أ ب‖ = √((−١٢)² + ٥²) = ١٣

∴ طول أ ب = ١٣ سم

١٧

في △ أ ب حـ:

∵ س ، ص منتصفا ب أ ، ب حـ على الترتيب

∴ س ص // أ حـ

، س ص = ½ أ حـ

∴ س ص = ½ أ حـ (١)

في △ ء أ حـ:

∵ ل ، ع منتصفا أ ء

، ء حـ على الترتيب

∴ ل ع // أ حـ ، ل ع = ½ أ حـ

∴ ل ع = ½ أ حـ (٢)

من (١) ، (٢): ∴ س ص = ل ع = ½ أ حـ (٣)

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع (المطلوب أولًا)

وبالمثل يكون: س ل = ص ع = ½ ب ء (٤)

من (٣) ، (٤):

محيط متوازي الأضلاع س ص ع ل

= ٢ (س ص + ص ع) = ٢ (½ أ حـ + ½ ب ء)

= أ حـ + ب ء (المطلوب ثانيًا)

مسائل على التطبيقات الفيزيائية

١

ق = ق₁ + ق₂ + ق₃

= ٢ س − ٣ ص + ٤ س + ٧ ص

+ ٣ س + ٨ ص = ٩ س + ١٢ ص

‖ق‖ = √(٩² + ١٢²) = ١٥ نيوتن

ظا θ = ص / س = ١٢/٩ = ٤/٣

∴ θ = ظا⁻¹ ٤/٣ = ٤٨َ ٧ً ٥٣°

٢

ق = ق₁ + ق₂ + ق₃

= −٦ س + ٦ ص + ٩ س + ١٣ ص

+ ٢ س − ٧ ص = ٥ س + ١٢ ص

∴ ح = √(٥² + ١٢²) = ١٣ داين

، ظا θ = ص / س = ١٢/٥

∴ θ = ظا⁻¹ ١٢/٥ = ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°

٣

(١) ق = ٤٠ ى − ٣٠ ى = ١٠ ى

حيث ى متجه وحدة في اتجاه القوة ٤٠ ث.كجم

(٢) ق = ٧٠ ى − ٧٠ ى = ٠

حيث ى متجه وحدة في اتجاه إحدى القوتين

(٣) ق = ١٠٠ ى − ٥٠ ى = ٥٠ ى

حيث ى متجه وحدة في اتجاه القوة ١٠٠ ث.كجم

(٤) ق = ١٥ ى + ١٥ ى − ٣٠ ى = ٠

حيث ى متجه وحدة في إتجاه القوة ١٥ ث.كجم

٤

(١) نعتبر ى متجه وحدة

في اتجاه الشرق

∴ ق = ١٥ ى − ٤٠ ى

= −٢٥ ى

∴ ‖ق‖ = ٢٥ نيوتن

∴ مقدار المحصلة = ٢٥ نيوتن وتعمل في اتجاه الغرب

(٢) نعتبر ى متجه

وحدة في

اتجاه ٦٠°

غرب الشمال

∴ ق = ٥٠ ى − ٥٠ ى = ٠

∴ مقدار المحصلة = صفر أي أن الجسم متزن

(٣) نعتبر ى متجه وحدة فى اتجاه ٧٠° شمال الشرق

∴ ق = ٣٠ ى + ٣٠ ى

= ٦٠ ى

∴ ||ق|| = ٦٠ نيوتن

∴ مقدار المحصلة = ٦٠ نيوتن

وتعمل فى اتجاه ٧٠° شمال الشرق

٥

∵ ق = ق١ + ق٢ + ق٣

٢ س + ٣ ص + أ س + ص + ٥ س + ب ص

= (٧ + أ) س + (٤ + ب) ص

(١) (٧ + أ) س + (٤ + ب) ص = ٥ س − ٢ ص

∴ ٧ + أ = ٥   ∴ أ = −٢

، ٤ + ب = −٢   ∴ ب = −٦

(٢) (٧ + أ) س + (٤ + ب) ص = ٠

∴ ٧ + أ = ٠   ∴ أ = −٧

، ٤ + ب = ٠   ∴ ب = −٤

٦

ق = ٧ س − ٥ ص + أ س + ٣ ص

− ٤ س + (ب − ٣) ص

= (٣ + أ) س + (−١ + ب − ٣) ص

= (٣ + أ) س + (ب − ٥) ص

(١) (٣ + أ) س + (ب − ٥) ص = ٤ س − ٧ ص

∴ ٣ + أ = ٤   ∴ أ = ١

، ب − ٥ = −٧   ∴ ب = −٢

(٢) ∵ المجموعة متزنة

∴ (٣ + أ) س + (ب − ٥) ص = ٠

∴ ٣ + أ = ٠   ∴ أ = −٣

، ب − ٥ = ٠   ∴ ب = ٥

٧

بفرض أن ى متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة أ

(١) ع_أ = ١٤٠ ى ، ع_ب = ١١٠ ى

∴ ع_أب = ع_أ − ع_ب = ١٤٠ ى − ١١٠ ى = ٣٠ ى

∴ سرعة السيارة أ بالنسبة للسيارة ب

= ٣٠ كم/س فى نفس اتجاه أ

(٢) ع_أ = ١٤٠ ى ، ع_ب = −١١٠ ى

∴ ع_أب = ع_أ − ع_ب = ١٤٠ ى − (−١١٠ ى)

= ٢٥٠ ى

∴ سرعة السيارة أ بالنسبة للسيارة ب

= ٢٥٠ كم/س فى نفس إتجاه أ

٨

نفرض أن : ى متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة (أ) وأن الشاحنة هى (ب)

∴ ع_أ = ٣٠ ى ، ع_ب أ = −١١٠ ى

∵ ع_ب أ = ع_ب − ع_أ

∴ −١١٠ ى = ع_ب − ٣٠ ى   ∴ ع_ب = −٨٠ ى

∴ السرعة الفعلية للشاحنة = ٨٠ كم/س فى اتجاه مضاد لاتجاه سيارة المراقبة

٩

نفرض أن : ى متجه وحدة فى اتجاه حركة سيارة المراقبة (أ) وأن السيارة الأخرى هى (ب)

∴ ع_أ = ٤٠ ى ، ع_ب أ = −١٣٥ ى

، ∵ ع_ب أ = ع_ب − ع_أ

∴ −١٣٥ ى = ع_ب − ٤٠ ى   ∴ ع_ب = −٩٥ ى

∴ السرعة الفعلية للسيارة ب = ٩٥ كم/س

∴ السرعة المسموح بها على الطريق = ١٠٠ كم/س

∴ السيارة القادمة غير مخالفة للسرعة المقررة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (جـ)   (٢) (د)   (٣) (ب)   (٤) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ق١ = (٦ جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، ٦ جا $\frac{٢\pi}{٣}$)

= −٣ س + ٣ $\sqrt{٣}$ ص

، ق٢ = (٦ جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ ، ٦ جا $\frac{٤\pi}{٣}$)

= −٣ س − ٣ $\sqrt{٣}$ ص

∴ ق١ + ق٢ + ق٣

= (−٣ س + ٣ $\sqrt{٣}$ ص)

+ (−٣ س − ٣ $\sqrt{٣}$ ص)

+ (٩ س + ٤ ص) = ٣ س + ٤ ص

∴ مقدار المحصلة = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ داين

(٢) ق١ = (٨ $\sqrt{٢}$ جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ ، ٨ $\sqrt{٢}$ جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

= −٨ س + ٨ ص

∴ المحصلة = (−٨ س + ٨ ص)

+ (أ س + ٢ ص)

+ (−٥ س + (ب + ٢) ص)

= (أ − ١٣) س + (ب + ١٢) ص

∵ القوى فى حالة اتزان   ∴ المحصلة = صفر

∴ أ − ١٣ = صفر   ∴ أ = ١٣

، ب + ١٢ = صفر   ∴ ب = −١٢

∴ $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{١٢}{-١٢}$ = −١

(٣) نفرض أن ق٣ = ك س + ل ص

∴ المحصلة = (س − ٣ ص)

+ (٣ س + ٦ ص)

+ (ك س + ل ص)

= (٤ + ك) س + (٣ + ل) ص

، ∵ محصلة القوى الثلاث هى متجه الوحدة وتعمل فى اتجاه الشمال

∴ ٤ + ك = ٠ ، ومنها ك = −٤ ، ٣ + ل = ١

ومنها ل = −٢

∴ ق٣ = −٤ س − ٢ ص

(٤) ∵ قياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين

= $\frac{\pi}{٥٠}$ = $\frac{٢\pi}{١٠٠}$

، ∵ عدد القوى زوجى ويساوى ١٠٠

فإننا نستطيع تقسيم القوى إلى أزواج من القوى كل منها يضاد الأخرى فى الاتجاه ويساويها فى المقدار

∴ معيار محصلة هذه القوى = صفر

٢

ق = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

= (١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° ، ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°)

= (−١٠ ، ١٠)

= −١٠ س + ١٠ ص   (١)

∵ $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣}$

$= ٥\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + (٧ + أ)\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص}$

$- ١٤\overrightarrow{س} + (٢ - ب)\overrightarrow{ص}$

$= (٥ + ٧ + أ - ١٤)\overrightarrow{س} + (٣ + ٦ + ٣ - ب)\overrightarrow{ص}$

$= (أ - ٢)\overrightarrow{س} + (١٢ - ب)\overrightarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أ − ٢ = −١٠ ∴ أ = −٨

، ١٢ − ب = ١٠ ∴ ب = ٢

٣

نفرض أن : $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة في اتجاه حركة السيارة (أ)

∴ $\overrightarrow{ع_أ} = ٢٠\,\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ} = ٢٠\,\overrightarrow{ى}$ (١)

عندما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف

$\overrightarrow{ع_ب} = ٥٠\,\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع_ب} - \frac{١}{٢}\overrightarrow{ع_أ} = ٥٠\,\overrightarrow{ى}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\overrightarrow{ع_أ} = ٦٠\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_ب} = ٨٠\,\overrightarrow{ى}$

∴ $ع_أ = ٦٠$ كم/س ، $ع_ب = ٨٠$ كم/س

إرشادات الوحدة الخامسة

إرشادات تمارين 5

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)	(٥) (ب)
(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (ب)	(٩) (د)	(١٠) (ب)
(١١) (أ)	(١٢) (جـ)	(١٣) (ب)	(١٤) (أ)	(١٥) (أ)
(١٦) (أ)	(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (أ)
(٢١) (ب)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (د)
(٢٦) (ب)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (أ)
(٣١) (جـ)	(٣٢) (جـ)	(٣٣) (جـ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (ب)
(٣٦) (ب)	(٣٧) (جـ)	(٣٨) (جـ)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (د)
(٤١) (د)	(٤٢) (د)	(٤٣) (أ)	(٤٤) (ب)	(٤٥) (أ)
(٤٦) (جـ)	(٤٧) (جـ)	(٤٨) (جـ)	(٤٩) (جـ)	(٥٠) (أ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ حـ تقسم $\overline{بأ}$ من الداخل ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٢(٣ ، ٦) + ١(٠ ، -٣)}{٢ + ١} = (٢ ، ٣)$

∴ حـ = (٢ ، ٣)

٢

(١) ∵ حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٣(٣ ، -٢) + ٢(-١ ، ٥)}{٣ + ٢} = \left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

∴ حـ = $\left(\frac{٧}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

(٢) ∵ ء تقسم $\overline{أب}$ من الخارج ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{-٤}{٣}$

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٣(٣ ، -٢) + (-٤)(-١ ، ٥)}{٣ - ٤}$

$= (-١٣ ، ٢٦)$

∴ ء = (−١٣ ، ٢٦)

٣

حـ = $\left(\frac{-١ \times ١ + ٤ \times ٩}{١ + ٤} ، \frac{١ \times ٤ + (-١) \times ٤}{١ + ٤}\right)$

= (١ ، ٠)

٤

∵ $\frac{أحـ}{حـب} = ٢$ ∴ $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٢}{١}$ ∴ $\left|\frac{ل_١}{ل_٢}\right| = \frac{٢}{٣}$

، ∵ حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{-٢}{٣}$

∴ حـ = $\frac{٣(٢ ، ١) + (-٢)(٤ ، ٢)}{٣ + (-٢)} = (-١ ، -١)$

٥

∵ ٣ أحـ = ٢ حـب ∴ $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\left|\frac{ل_١}{ل_٢}\right| = \frac{٢}{٣}$

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٣(١ ، ٣) + ٢(-٤ ، -٢)}{٣ + ٢} = (-١ ، ١)$

∴ حـ = (−١ ، ١)

٦

∵ ٣ أحـ = ٥ حـب ∴ $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\left|\frac{ل_١}{ل_٢}\right| = \frac{٥}{٣}$

نفرض أن حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٥}{٣}$

∴ حـ = $\frac{٣(٤ ، ٣) + ٥(-٣ ، ٥)}{٣ + ٥} = \left(\frac{-٣}{٨} ، \frac{١٧}{٤}\right)$

بفرض أن حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٥}{-٣}$

∴ حـ = $\frac{-٣(٤ ، ٣) + ٥(-٣ ، ٥)}{-٣ + ٥} = \left(\frac{-٢٧}{٢} ، ٨\right)$

٧

∵ $\frac{أحـ}{حـ ب} = \frac{٤}{١}$

∴ $\left|\frac{ل_١}{ل_٢}\right| = \frac{٤}{١}$

، ∵ حـ تقسم أب من الخارج ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٤}{-١}$

∴ حـ = $\frac{-١ (٢ ، ١) + ٤ (-١ ، -٢)}{-١ + ٤}$ = (-٢ ، -٣)

٨

∵ حـ ∈ أب ، $\frac{أحـ}{حـ ب} = \frac{٢}{٣}$

∴ ر = $\frac{٣ (-٢ ، ٤) + ٢ (ك ، ١)}{٣ + ٢}$

= $\left(\frac{٩ + ٢ ك}{٥} ، -٢\right)$

∴ (-١ ، ل) = $\left(\frac{٩ + ٢ ك}{٥} ، -٢\right)$

∴ -١ = $\frac{٩ + ٢ ك}{٥}$ ∴ ك = -٧ ، ل = -٢

٩

بفرض أن النقطتين هما : حـ ، ء

∵ حـ تقسم أب من الداخل بنسبة $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ر = $\frac{٢ (٨ ، -٤) + ١ (-١ ، ٢)}{١ + ٢}$ = (٥ ، -٢)

∴ حـ = (٥ ، -٢) ، ∵ ء منتصف حـ ب

∴ ر = $\frac{(٥ ، -٢) + (-١ ، ٢)}{٢}$ = (٢ ، ٠)

∴ ء = (٢ ، ٠)

١٠

∵ ء منتصف أب

∴ ء = $\frac{(١ ، -٤) + (٥ ، ٤)}{٢}$ = (٣ ، ٠)

، ∵ حـ منتصف أء

∴ حـ = $\frac{(١ ، -٤) + (٣ ، ٠)}{٢}$ = (٢ ، -٢)

، ∵ هـ منتصف ءب

∴ هـ = $\frac{(٣ ، ٠) + (٥ ، ٤)}{٢}$ = (٤ ، ٢)

١١

نفرض أن أ = (س ، ٠) ، ب = (٠ ، ص)

، ∵ حـ منتصف أب

∴ (-٤ ، ٣) = $\left(\frac{س + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص}{٢}\right)$

∴ $\frac{س}{٢}$ = -٤ ∴ س = -٨

∴ أ = (-٨ ، ٠) ، $\frac{ص}{٢}$ = ٣

∴ ص = ٦ ∴ ب = (٠ ، ٦)

١٢

نفرض أن نسبة التقسيم هي ل١ : ل٢

، ∵ نقطة التقسيم هي حـ

∴ (٨ ، ص) = $\left(\frac{٣ ل_٢ - ٢ ل_١}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{-٢ ل_٢ + ٣ ل_١}{ل_١ + ل_٢}\right)$

∴ ٨ ل١ + ٨ ل٢ = ٣ ل٢ - ٢ ل١

∴ ١٠ ل١ = -٥ ل٢

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{-٥}{١٠} = -\frac{١}{٢}$

∴ نسبة التقسيم هي ١ : ٢ (من الخارج)

∴ ص = $\frac{-٢ (٢) + ٣ (-١)}{٢ + (-١)}$ = -٧

١٣

بفرض أن حـ = (٠ ، ص) نقطة تقاطع أب مع محور الصادات

∴ ٠ = $\frac{٢ ل_٢ - ٣ ل_١}{ل_١ + ل_٢}$

∴ ٠ = ٢ ل٢ - ٣ ل١

∴ ٣ ل١ = ٢ ل٢

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ ص = $\frac{٢ × ٧ + ٢ × ٣}{٢ + ٣} = \frac{٢٢}{٥}$

∴ النقطة حـ = $\left(٠ ، \frac{٢٢}{٥}\right)$ تقسم أب من الداخل بنسبة ٢ : ٣

١٤

بفرض أن حـ = (س ، ٠) نقطة تقاطع أب مع محور السينات

∴ ٠ = $\frac{٣ ل_٢ - ٢ ل_١}{ل_١ + ل_٢}$

∴ ٠ = ٣ ل٢ - ٢ ل١ ∴ ٢ ل١ = ٣ ل٢

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ س = $\frac{٣ × ٤ + ٢ × -٢}{٢ + ٣} = \frac{٨}{٥}$

∴ النقطة حـ = $\left(\frac{٨}{٥} ، ٠\right)$ تقسم أب من الداخل بنسبة ٣ : ٢

١٥

بفرض أن حـ = (س ، ٠) نقطة تقاطع أب مع محور السينات

∴ ٠ = $\frac{٢ ل_٢ - ل_١}{ل_١ + ل_٢}$ ∴ ٢ ل٢ - ل١ = ٠

∴ ٢ ل٢ = ل١ ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٢}{١}$

∴ س = $\frac{٢ × ٢ + ٥ × ١}{٢ + ١}$ = ٣

∴ النقطة حـ (٣ ، ٠) تقسم أب من الداخل بنسبة ٢ : ١

، بفرض أن ء = (٠ ، ص) نقطة تقاطع أب مع محور الصادات

∴ ٠ = $\frac{٥ ل_٢ + ٢ ل_١}{ل_١ + ل_٢}$ ∴ ٥ ل٢ + ٢ ل١ = ٠

∴ ٥ ل٢ = -٢ ل١ ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = -\frac{٥}{٢}$

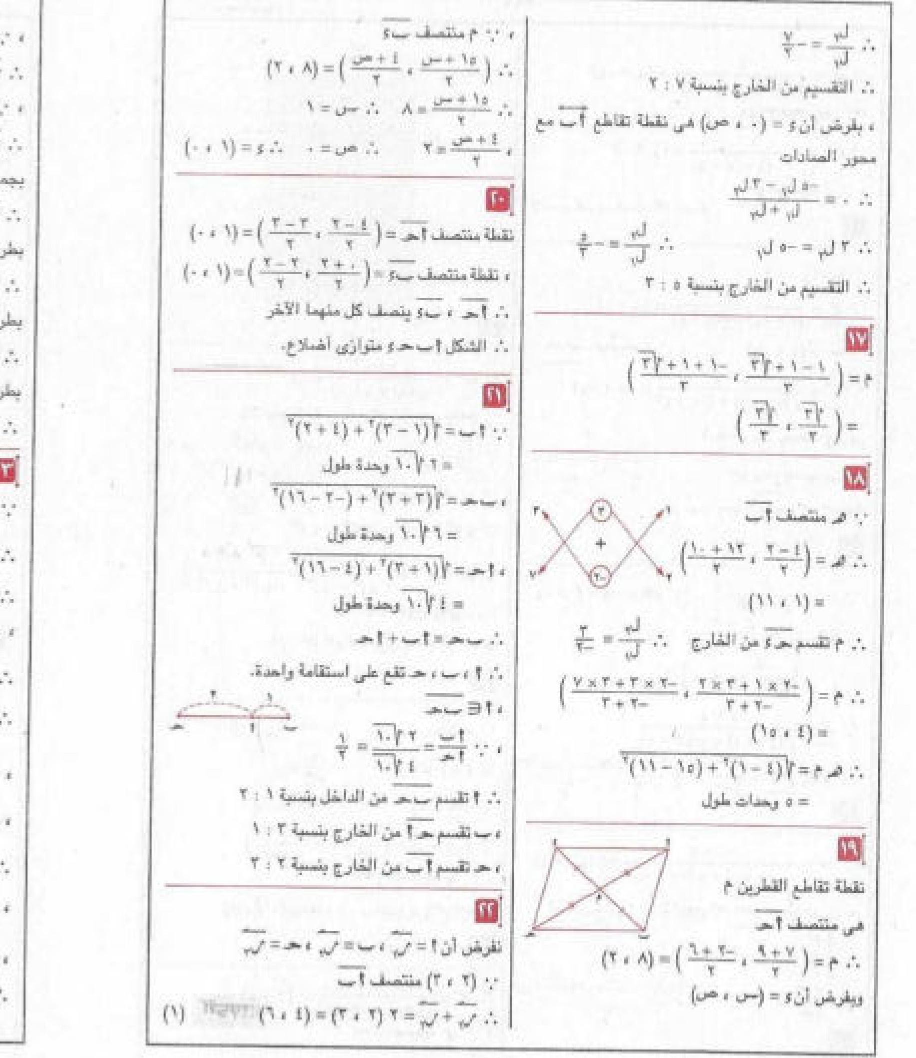
∴ ص = $\frac{-٥ × -١ + ٢ × ٢}{٢ - ٥}$ = -٣

∴ النقطة ء (٠ ، -٣) تقسم أب من الخارج بنسبة ٥ : ٢

١٦

نفرض أن حـ = (س ، ٠) نقطة تقاطع أب مع محور السينات

∴ ٠ = $\frac{٧ ل_٢ + ٢ ل_١}{ل_١ + ل_٢}$ ∴ ٢ ل١ = -٧ ل٢



∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = -\frac{٧}{٢}$

∴ التقسيم من الخارج بنسبة ٧ : ٢

، بفرض أن ء = (٠ ، ص) هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع محور الصادات

∴ $٠ = \frac{-٥ ل_١ - ٣ ل_٢}{ل_١ + ل_٢}$

∴ ٣ $ل_٢$ = −٥ $ل_١$ ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = -\frac{٣}{٥}$

∴ التقسيم من الخارج بنسبة ٥ : ٣

١٧

م = $\left(\frac{١ - ١ + \sqrt{٣}}{٢} ، \frac{-١ + ١ + \sqrt{٣}}{٢}\right)$

= $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

١٨

∵ هـ منتصف $\overline{أب}$

∴ هـ = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{١٢ + ١٠}{٢}\right)$

= (١ ، ١١)

∴ م تقسم $\overline{حـ ء}$ من الخارج ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٣}{-٢}$

∴ م = $\left(\frac{-٢ \times ١ + ٣ \times ٢}{-٢ + ٣} ، \frac{-٢ \times ٣ + ٣ \times ٧}{-٢ + ٣}\right)$

= (٤ ، ١٥)

∴ هـ م = $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (١٥ - ١١)^٢}$

= ٥ وحدات طول

١٩

نقطة تقاطع القطرين م

هي منتصف $\overline{أحـ}$

∴ م = $\left(\frac{٧ + ٩}{٢} ، \frac{-٢ + ٦}{٢}\right)$ = (٨ ، ٢)

وبفرض أن ء = (س ، ص)

، ∵ م منتصف $\overline{بء}$

∴ $\left(\frac{١٥ + س}{٢} ، \frac{٤ + ص}{٢}\right)$ = (٨ ، ٢)

∴ $\frac{١٥ + س}{٢} = ٨$ ∴ س = ١

، $\frac{٤ + ص}{٢} = ٢$ ∴ ص = ٠ ∴ ء = (١ ، ٠)

٢٠

نقطة منتصف $\overline{أحـ}$ = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{٣ - ٣}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

، نقطة منتصف $\overline{بء}$ = $\left(\frac{٠ + ٢}{٢} ، \frac{٢ - ٢}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

∴ $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

٢١

∵ أ ب = $\sqrt{(١ - ٣)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$

= ٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(٣ + ٣)^٢ + (-٢ - ١٦)^٢}$

= ٦ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

، أ حـ = $\sqrt{(١ + ٣)^٢ + (٤ - ١٦)^٢}$

= ٤ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ ب حـ = أ ب + أ حـ

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

، أ ∈ $\overline{بحـ}$

، ∵ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٤\sqrt{١٠}} = \frac{١}{٢}$

∴ أ تقسم $\overline{بحـ}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

، ب تقسم $\overline{حـ أ}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١

، حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٣

٢٢

نفرض أن أ = $\overrightarrow{م_١}$ ، ب = $\overrightarrow{م_٢}$ ، حـ = $\overrightarrow{م_٣}$

∵ (٢ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overrightarrow{م_١} + \overrightarrow{م_٢}$ = ٢ (٢ ، ٣) = (٤ ، ٦) (١)

، ∵ (−١ ، ٤) منتصف $\overline{بحـ}$

∴ $\overrightarrow{م_٢} + \overrightarrow{م_٣}$ = ٢ (−١ ، ٤) = (−٢ ، ٨) (٢)

، ∵ (٤ ، ٥) منتصف $\overline{أحـ}$

∴ $\overrightarrow{م_١} + \overrightarrow{م_٣}$ = ٢ (٤ ، ٥) = (٨ ، ١٠) (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣)

∴ $\overrightarrow{م_١} + \overrightarrow{م_٢} + \overrightarrow{م_٣}$ = (٥ ، ١٢) (٤)

بطرح (١) من (٤) :

∴ $\overrightarrow{م_٣}$ = (١ ، ٦) ∴ حـ = (١ ، ٦)

بطرح (٢) من (٤)

∴ $\overrightarrow{م_١}$ = (٧ ، ٤) ∴ أ = (٧ ، ٤)

بطرح (٣) من (٤)

∴ $\overrightarrow{م_٢}$ = (−٣ ، ٢) ∴ ب = (−٣ ، ٢)

٢٣

∵ ء تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ١ : ٢

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٢ (٣ ، ٥) + (٦ ، -٤)}{٢ + ١}$ = (٤ ، ٢)

∴ ء = (٤ ، ٢)

، ∵ هـ تقسم $\overline{أحـ}$ بنسبة ١ : ٢

∴ $\overrightarrow{ر} = \frac{٢ (٣ ، ٥) + (١ ، ١)}{٢ + ١} = \left(\frac{٧}{٣} ، \frac{١١}{٣}\right)$

∴ هـ = $\left(\frac{٧}{٣} ، \frac{١١}{٣}\right)$

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{ءهـ} = \frac{\frac{١١}{٣} - ٢}{\frac{٧}{٣} - ٤}$ = −١

، ميل $\overleftrightarrow{بحـ} = \frac{١ + ٤}{١ - ٦}$ = −١

∴ ميل $\overleftrightarrow{ءهـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ ∴ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$

، ∵ ء هـ = $\sqrt{\left(٤ - \frac{٧}{٣}\right)^٢ + \left(٢ - \frac{١١}{٣}\right)^٢} = \frac{٥}{٣}\sqrt{٢}$

، ب حـ = $\sqrt{(٦ - ١)^٢ + (-٤ - ١)^٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$

∴ ء هـ = $\frac{١}{٣}$ ب حـ

٢٤

(١) نفرض أن نقطة توقف السيارة هي حـ

، ∵ السيارة توقفت في منتصف الطريق

∴ حـ = $\left(\frac{٥ + ١}{٢} ، \frac{-٦ + ٠}{٢}\right)$ = (٣ ، −٣)

(٢) نفرض نقطة توقف

السيارة للمرة الثانية هي ء

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{١}$ ∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{٢}{١}$

∴ ء = $\frac{(٥ ، -٦) + ٢ (١ ، ٠)}{١ + ٢} = \left(\frac{٧}{٣} ، -٢\right)$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ)

(٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) أ ب = $\sqrt{(٢ - (-١))^٢ + (٠ - ٤)^٢}$

= ٥ وحدات طول

، حـ ب = ٢,٥

∴ حـ تقسم $\overline{أب}$ من

الخارج بنسبة ٧,٥ : ٢,٥ = ٣ : ١

∴ حـ = $\left(\frac{٣ \times ٢ - ١ \times -١}{٣ - ١} ، \frac{٣ \times ٠ - ٤ \times ١}{٣ - ١}\right)$

= (٣,٥ ، −٢)

(٢) ∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{بء}{ءحـ} = \frac{٤}{٣}$

∴ ب تقسم $\overline{حـ ء}$ بنسبة ٧ : ٤ من الخارج

∴ ب = $\left(\frac{٧ \times ١ - ٤ \times ٤}{٧ - ٤} ، \frac{٧ \times ٨ - ٤ \times -١}{٧ - ٤}\right)$

= (−٣ ، ٢٠)

(٣) العمل : نرسم $\overrightarrow{أء}$

بفرض أن حـ تقسم $\overline{بء}$ بنسبة $\frac{م_١}{م_٢}$

∴ $\frac{-٢م_١ - م_٢}{م_١ + م_٢} = ٣$

∴ $-٢م_١ - م_٢ = ٣م_١ + ٣م_٢$

∴ $-٤م_٢ = ٥م_١$

∴ $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{-٤}{٥}$

∴ $\frac{بحـ}{حـء} = \frac{٤}{٥}$

، ∵ $\overrightarrow{أحـ}$ تنصف ∠ ب أ هـ الخارجة عن Δ أ ب ء

∴ $\frac{أب}{أء} = \frac{بحـ}{حـء} = \frac{٤}{٥}$

(٤) أ = (٣ ، -١)

، ب = (-٣ ، ١)

بفرض أن حـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل

∴ حـ = $\left(\frac{٢ \times -٣ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times ١ + ٣ \times -١}{٢ + ٣}\right)$

= $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-١}{٥}\right)$

(٥) ∵ ب تقع على المنحنى ص = $س^٢$

∴ نفرض أن

ب = $(س ، س^٢)$

، ∵ محور الصادات يقسم $\overline{أب}$

بنسبة ٣ : ٢ من الداخل

∴ $\frac{٣س + ٢ \times ٣}{٣ + ٢}$ = صفر

∴ ٣س = -٦ ∴ س = -٢

∴ النقطة ب = (-٢ ، ٤)

(٦) $\overrightarrow{أأ'} + \overrightarrow{بب'} + \overrightarrow{حـحـ'}$

$= \left(\overrightarrow{وأ'} - \overrightarrow{وأ}\right) + \left(\overrightarrow{وب'} - \overrightarrow{وب}\right)$

$+ \left(\overrightarrow{وحـ'} - \overrightarrow{وحـ}\right)$

$= \left(\overrightarrow{وأ'} + \overrightarrow{وب'} + \overrightarrow{وحـ'}\right)$

$- \left(\overrightarrow{وأ} + \overrightarrow{وب} + \overrightarrow{وحـ}\right)$

$= ٣\overrightarrow{وم'} - ٣\overrightarrow{وم}$

$= ٣\left(\overrightarrow{وم'} - \overrightarrow{وم}\right) = ٣[(١ ، -٣) - (٣ ، ٢)]$

= (-٦ ، -١٥)

٢

∵ $\overline{أء} // \overline{بحـ}$

∴ Δ أ هـ ء ~ Δ حـ هـ و ∴ $\frac{أهـ}{حـهـ} = \frac{أء}{حـو}$

، ∵ و منتصف $\overline{بحـ}$ ∴ أء = ٢ حـو

∴ $\frac{أهـ}{حـهـ} = \frac{٢}{١}$

∴ أ تقسم $\overline{حـهـ}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

∴ $\overrightarrow{ن} = \left(\frac{٢ \times ٣ - ٢ \times ٣}{٣ - ٢} ، \frac{٢ \times ٥ - ٢ \times ٣}{٣ - ٢}\right)$

= (٤ ، -١)

∴ أ = (٥ ، -١)

٣

∵ أب = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٢ - ٦)^٢}$ = ٥ وحدات طول

، أحـ = $\sqrt{(٢ - ١٠)^٢ + (٢ + ٤)^٢}$ = ١٠ وحدات طول

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{١}{٢}$

∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ من الداخل

∴ $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{أب}{أحـ}$ ∴ $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{١}{٢}$

∴ ء تقسم $\overline{بحـ}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

∴ $\frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ء = $\frac{٢(٥ ، ٦) + (١٠ ، -٤)}{١ + ٢} = \left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٨}{٣}\right)$

إرشادات تمارين 6

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١)(جـ) (٢)(ب) (٣)(د) (٤)(أ) (٥)(د)
(٦)(ب) (٧)(أ) (٨)(ب) (٩)(جـ) (١٠)(د)
(١١)(ب) (١٢)(د) (١٣)(جـ) (١٤)(جـ) (١٥)(جـ)
(١٦)(د) (١٧)(د) (١٨)(أ) (١٩)(د) (٢٠)(أ)
(٢١)(ب) (٢٢)(د) (٢٣)(د) (٢٤)(أ) (٢٥)(أ)
(٢٦)(ب) (٢٧)(أ) (٢٨)(ب) (٢٩)(جـ) (٣٠)(جـ)
(٣١)(جـ) (٣٢)(د) (٣٣)(أ) (٣٤)(ب) (٣٥)(جـ)
(٣٦)(جـ) (٣٧)(ب) (٣٨)(جـ) (٣٩)(ب) (٤٠)(ب)
(٤١)(د) (٤٢)(أ) (٤٣)(ب) (٤٤)(جـ) (٤٥)(ب)
(٤٦)(جـ) (٤٧)(د) (٤٨)(د) (٤٩)(جـ) (٥٠)(ب)
(٥١)(أ) (٥٢)(د) (٥٣)(جـ) (٥٤)(جـ) (٥٥)(ب)
(٥٦)(أ) (٥٧)(جـ) (٥٨)(أ) (٥٩)(د) (٦٠)(جـ)
(٦١)(د) (٦٢)(ب) (٦٣)(ب) (٦٤)(جـ) (٦٥)(أ)
(٦٦)(د) (٦٧)(ب) (٦٨)(جـ) (٦٩)(جـ) (٧٠)(جـ)
(٧١)(أ) (٧٢)(ب) (٧٣)(جـ) (٧٤)(أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

(١) ميل $ل_١ = \frac{٤ - ١}{-٢ - ٣} = -\frac{٣}{٥}$

(٢) ميل $ل_٢ = \frac{-١ - ٠}{٢ - ٤} = \frac{١}{٢}$

(٣) ميل $ل_٣ = \frac{-٣ + ١}{٣ - ٧} = \frac{١}{٢}$

(٤) ميل $ل_٤ = \frac{٣ + ٢}{-١ + ٥} = \frac{٥}{٤}$

∴ $ل_١ \perp ل_٤$ ، $ل_٢ // ل_٣$

٢

(١) $م_١ = \frac{٢}{٣}$ ، $م_٢ = \frac{-٣}{ب}$

(٢) ∵ $ل_١ // ل_٢$ ∴ $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{-٣}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب = $-\frac{٩}{٢}$

(٣) ∵ $ل_١ \perp ل_٢$ ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $\frac{-٣}{ب} \times \frac{٢}{٣} = -١$ ∴ ب = ٢

(٤) ∵ المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطة (١ ، ٣) :

∴ ٢ × ١ - ٣ × ٣ + أ = ٠ ∴ أ = ٧

٣

(١) م = $\frac{-٣}{٠}$ = غير معرف

∴ المستقيم يوازى محور الصادات ويقطع محور السينات فى النقطة $\left(-\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$

(٢) ∵ حـ = ٠ ∴ يمر بنقطة الأصل

(٣) المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (٦ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٤)

(٤) م = $\frac{٠}{٦}$ = ٠

∴ المستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٥)

٤

(١) المعادلة المتجهه : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، -١) + ك (-٣ ، ٥)

أى أن : (س ، ص) = (٣ ، -١) + ك (-٣ ، ٥)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٣ - ٣ ك

، ص = -١ + ٥ ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص + ١}{س - ٣} = \frac{٥}{-٣}$

∴ ٥ س - ١٥ = -٣ ص - ٣

∴ الصورة العامة : ٥ س + ٣ ص - ١٢ = ٠

(٢) ∵ م = ظا ١٣٥ = -١ ∴ $\overrightarrow{ى}$ = (١ ، -١)

∴ المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (٥ ، -١) + ك (١ ، -١)

أى أن : (س ، ص) = (٥ ، −١) + ك (١ ، −١)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٥ + ك

، ص = −١ − ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص + ١}{س - ٥} = -١$

∴ − س + ٥ = ص + ١

∴ الصورة العامة : س + ص − ٤ = ٠

(٣) ∵ م = $\frac{١ + ٣}{٥ - ٢} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، ٤)

∴ المعادلة المتجهه :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −٣) + ك (٣ ، ٤)

أى أن : (س ، ص) = (٢ ، −٣) + ك (٣ ، ٤)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٢ + ٣ ك

، ص = −٣ + ٤ ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص + ٣}{س - ٢} = \frac{٤}{٣}$

∴ ٤ س − ٨ = ٣ ص + ٩

∴ الصورة العامة : ٤ س − ٣ ص − ١٧ = ٠

(٤) ∵ م = $\frac{١}{٣}$ ∴ $\overrightarrow{ى}$ = (٣ ، ١)

∴ المعادلة المتجهه :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١) + ك (٣ ، ١)

أى أن : (س ، ص) = (٢ ، −١) + ك (٣ ، ١)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٢ + ٣ ك

، ص = −١ + ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص + ١}{س - ٢} = \frac{١}{٣}$

∴ س − ٢ = ٣ ص + ٣

∴ الصورة العامة : س − ٣ ص − ٥ = ٠

(٥) ∵ $\overrightarrow{ن}$ متجه اتجاه العمودى ∴ $\overrightarrow{ى}$ = (٢ ، ١)

∴ المعادلة المتجهه : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −٣) + ك (٢ ، ١)

أى أن : (س ، ص) = (٢ ، −٣) + ك (٢ ، ١)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٢ + ٢ ك

، ص = −٣ + ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص + ٣}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$

∴ س − ٢ = ٢ ص + ٦

∴ الصورة العامة : س − ٢ ص − ٨ = ٠

(٦) ∵ متجه اتجاه المستقيم المعلوم هو (−٢ ، ١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب هو (١ ، ٢)

∴ المعادلة المتجهه : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٣) + ك (١ ، ٢)

أى أن : (س ، ص) = (١ ، ٣) + ك (١ ، ٢)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ١ + ك

، ص = ٣ + ٢ ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص - ٣}{س - ١} = \frac{٢}{١}$

∴ ٢ س − ٢ = ص − ٣

∴ الصورة العامة : ٢ س − ص + ١ = ٠

(٧) ∵ $\overrightarrow{أب}$ = (٥ ، ٤) − (٢ ، −٣) = (٣ ، ٧)

، ∵ المستقيم عمودى على المتجه $\overrightarrow{أب}$

∴ متجه اتجاه المستقيم هو (٧ ، −٣)

∴ المعادلة المتجهه : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٧ ، −٣)

أى أن : (س ، ص) = (٣ ، ٥) + ك (٧ ، −٣)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٣ + ٧ ك

، ص = ٥ − ٣ ك

المعادلة الكارتيزية : ∵ $\frac{ص - ٥}{س - ٣} = \frac{-٣}{٧}$

∴ −٣ س + ٩ = ٧ ص − ٣٥

∴ الصورة العامة : ٣ س + ٧ ص − ٤٤ = ٠

(٨) ∵ المستقيم يحمل متجه الوضع $\overrightarrow{أ}$ (٢ ، −٣)

∴ يمر بنقطة الأصل

∴ المعادلة المتجهه : $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، −٣)

أى أن : (س ، ص) = ك (٢ ، −٣)

المعادلتان الوسيطيتان : س = ٢ ك ، ص = −٣ ك

المعادلة الكارتيزية : ص = $\frac{-٣}{٢}$ س

∴ الصورة العامة : ٣ س + ٢ ص = ٠

٥

(١) ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١}{٢}$

∴ $\frac{ص + ٤}{س - ٣} = \frac{-١}{٢}$

∴ ٢ ص + ٨ = − س + ٣

∴ س + ٢ ص + ٥ = ٠

(٢) ∵ $\overrightarrow{أب}$ = (−٥ ، −٢) − (−٤ ، ٣) = (−١ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{ى}$ = (−١ ، −٥)

∴ ميل المستقيم = $\frac{-٥}{-١}$ = ٥

∴ $\frac{ص + ٣}{س + ١}$ = ٥ ∴ ٥ س + ٥ = ص + ٣

∴ ٥ س − ص + ٢ = ٠

(٣) ∵ $\overrightarrow{ى}$ = (٧ ، −٣) ∴ م = $\frac{-٣}{٧}$

∴ ص = $\frac{-٣}{٧}$ س − ٤

(٤) ∵ المستقيم يقطع ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات.

∴ يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ∴ $\frac{ص - ٠}{س - ٣} = \frac{-١}{٢}$

∴ ٢ ص = − س + ٣ ∴ س + ٢ ص − ٣ = ٠

(٥) ∵ $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{٤}$ = ١

∴ ٢ س − ص + ٤ = ٠

(٦) ∵ $\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)^{ء}$ = ١٢٠°

∴ م = ظا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ $\frac{ص - ٢\sqrt{٣}}{س + ٧} = -\sqrt{٣}$

∴ $-\sqrt{٣}$ س − ٧$\sqrt{٣}$ = ص − ٢$\sqrt{٣}$

∴ $\sqrt{٣}$ س + ص + ٥$\sqrt{٣}$ = ٠

(٧) ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٣}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = ٣

∴ $\frac{ص + ٥}{س - ٣}$ = ٣ ∴ ٣ س − ٩ = ص + ٥

∴ ٣ س − ص − ١٤ = ٠

(٨) ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٤ + ٣}{٥ - ٢} = \frac{٧}{٣}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٣}{٧}$

∴ $\frac{ص - ٥}{س - ٣} = \frac{-٣}{٧}$

∴ −٣ س + ٩ = ٧ ص − ٣٥

∴ ٣ س + ٧ ص − ٤٤ = ٠

(٩) ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١ - ٦}{٢ + ٣}$ = −١

∴ ميل المستقيم المطلوب = ١

∴ $\frac{ص - ٦}{س + ٣}$ = ١ ∴ س + ٣ = ص − ٦

∴ س − ص + ٩ = ٠

(١٠) ∵ منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{-٤ - ٢}{٢} ، \frac{١ + ٣}{٢}\right)$

= (−٣ ، ٢)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣ - ١}{-٢ + ٤}$ = ١

∴ ميل المستقيم المطلوب = −١

∴ $\frac{ص - ٢}{س + ٣}$ = −١ ∴ − س − ٣ = ص − ٢

∴ س + ص + ١ = ٠

٦

∵ $\frac{ص + ٣}{س - ٢}$ = ٢ ∴ ص + ٣ = ٢ س − ٤

∴ ٢ س − ص − ٧ = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٧)

∴ ٢ أ − ٧ − ٧ = ٠ ∴ أ = ٧

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٥ ، ب)

∴ ١٠ − ب − ٧ = ٠ ∴ ب = ٣

٧

ص = م س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٠)

∴ ٠ = أ م + حـ   ∴ حـ = − أ م

∴ ص = م س − أ م

وهذا المستقيم يقطع محور الصادات عندما س = ٠

∴ ص = − أ م

∴ المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، − أ م)

٨

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-١ - ٣}{٤ - ٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$

، ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{١ + ١}{٢ - ٣} = \frac{٢}{-١} = -٢$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$

معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي : $\frac{ص + ١}{س - ٤} = -٢$

∴ ص + ١ = −٢ س + ٨   ∴ ص + ٢ س − ٧ = ٠

معادلة $\overleftrightarrow{حـ ء}$ هي : $\frac{ص - ١}{س - ٢} = -٢$

∴ ص − ١ = −٢ س + ٤   ∴ ص + ٢ س − ٥ = ٠

٩

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١ - ٢}{٢ - ٠} = \frac{-١}{٢}$

∴ $\vec{ى}$ = (٢ ، −١) متجه اتجاه للمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

∴ $\vec{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٢ ، −١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{٣ - ١}{-٢ - ٢} = -\frac{١}{٢}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$

∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة

١٠

∵ ٢ س − ٣ ص = −١٢

∴ $\frac{س}{-٦} + \frac{ص}{٤} = ١$

∴ طول الجزء المقطوع من الجزء السالب لمحور السينات = ٦ وحدات طول

، طول الجزء المقطوع من الجزء الموجب لمحور الصادات = ٤ وحدات طول

١١ س = −٣ ، ص = ٢

١٢

بفرض أن الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي θ

∵ جتا θ = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

∴ ميل المستقيم المطلوب = ظا ١٣٥° = −١

∴ $\frac{ص + ٢}{س - ٢} = -١$

∴ ص + ٢ = − س + ٢   ∴ ص + س = ٠

١٣

∵ حـ = $\frac{٢(-٤ ، ٤) + (-١ ، -٢)}{٢ + ١}$ = (−٣ ، ٢)

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص - ٢}{س + ٣} = \frac{٣ - ٢}{٢ + ٣}$

∴ ٥ ص − ١٠ = س + ٣

∴ س − ٥ ص + ١٣ = ٠

١٤

نفرض أن نقطة تقسيم $\overline{أب}$ هي حـ

∴ حـ = $\frac{٣(١ ، ٤) + ٢(-٤ ، ٦)}{٣ + ٢}$ = $\left(-١ ، \frac{٢٤}{٥}\right)$

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٥}{٤}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٤}{٥}$

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص - \frac{٢٤}{٥}}{س + ١} = \frac{-٤}{٥}$

∴ ٥ ص − ٢٤ = −٤ س − ٤

∴ ٤ س + ٥ ص − ٢٠ = ٠

١٥

بفرض أن أ = (س ، ص)

∴ (−٢ ، ٣) = $\left(\frac{-٧ + س}{٢} ، \frac{١١ + ص}{٢}\right)$

∴ −٧ + س = −٤   ∴ س = ٣

، ١١ + ص = ٦   ∴ ص = −٥

∴ أ = (٣ ، −٥)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١١ + ٥}{-٧ - ٣} = \frac{٨}{-٥}$

∴ ميل المماس = $\frac{٥}{٨}$

∴ معادلة المماس هي : $\frac{ص + ٥}{س - ٣} = \frac{٥}{٨}$

∴ ٨ ص + ٤٠ = ٥ س − ١٥

∴ ٥ س − ٨ ص − ٥٥ = ٠

١٦

∵ ٣ س + ٤ ص = ١٢ (وبقسمة الطرفين على ١٢)

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٣} = ١$

∴ أ = (٤ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٣)

∴ مساحة Δ و أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٣ = ٦ وحدات مربعة

∵ منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٤ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٣}{٢}\right) = \left(٢ ، \frac{٣}{٢}\right)$

، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣}{-٤}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص - \frac{٣}{٢}}{س - ٢} = \frac{٤}{٣}$

∴ ٣ ص − $\frac{٩}{٢}$ = ٤ س − ٨

∴ ٤ س − ٣ ص − $\frac{٧}{٢}$ = ٠

∴ ٨ س − ٦ ص − ٧ = ٠

١٧

∵ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص - ١}{س + ٣} = \frac{٠ - ١}{٤ + ٣}$

∴ $\frac{ص - ١}{س + ٣} = \frac{-١}{٧}$

∴ ٧ ص − ٧ = − س − ٣

∴ ٧ ص + س = ٤ (بقسمة الطرفين على ٤)

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{٧ ص}{٤} = ١$ ∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{\frac{٤}{٧}} = ١$

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات = ٤ وحدات طولية

، طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٤}{٧}$ وحدات طولية.

١٨

∵ $\vec{ر}$ = (٣ ، −١) + ك (٢ ، ٥)

∴ $\frac{ص + ١}{س - ٣} = \frac{٥}{٢}$ ∴ ٥ س − ١٥ = ٢ ص + ٢

∴ ٥ س − ٢ ص = ١٧

∴ $\frac{٥ س}{١٧} - \frac{٢ ص}{١٧} = ١$

∴ $\frac{س}{\frac{١٧}{٥}} - \frac{ص}{\frac{١٧}{٢}} = ١$

∴ طول الجزء المقطوع من الجزء الموجب من محور السينات = $\frac{١٧}{٥}$ وحدة طول

، طول الجزء المقطوع من الجزء السالب من محور الصادات = $\frac{١٧}{٢}$ وحدة طول

١٩

∵ معادلة المستقيم المعطى هي : $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$

∴ ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

∴ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٣}{٤}$

∴ ميل المستقيم العمودي = $\frac{-٤}{٣}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي : $\frac{ص + ٢}{س - ٥} = \frac{-٤}{٣}$

∴ ٣ ص + ٦ = − ٤ س + ٢٠

∴ ٤ س + ٣ ص − ١٤ = ٠

٢٠

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣ + ٢}{٧ - ٢} = ١$

، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{١ - ٣}{١ - ٧} = \frac{١}{٣}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$

∴ أ ، ب ، حـ ليسوا على استقامة واحدة

∴ أ ، ب ، حـ هي رؤوس مثلث

، ∵ ء تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $\frac{٣}{٢}$

∴ ء = $\frac{٣(٢ ، -٣) + ٢(٧ ، ٢)}{٣ + ٢}$

= (٤ ، -١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ = $\frac{-١ - ١}{٤ - ١}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ى = (٣ ، -٢)

∴ المعادلة المتجهة : ر = (٤ ، -١) + ك (٣ ، -٢)

أي أن : (س ، ص) = (٤ ، -١) + ك (٣ ، -٢)

، المعادلتين الوسيطيتان : س = ٤ + ٣ك

، ص = -١ - ٢ك

، المعادلة الكارتيزية : $\frac{ص + ١}{س - ٤}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ٣ص + ٣ = -٢س + ٨

∴ الصورة العامة هي : ٢س + ٣ص - ٥ = ٠

٢١

(١) ∵ ظاهـ = $\frac{-١}{٣}$ ∴ هـ زاوية منفرجة

∴ هـ = ١٨٠° - ١٨° ٢٦َ ٦ً = ١٦١° ٣٣َ ٥٤ً

(٢) ∵ ظاهـ = $\frac{-٢ - ٠}{٠ - -٢}$ = -١ (سالبة)

∴ هـ قياس زاوية منفرجة

∴ هـ = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

(٣) ل : $\frac{س}{٤}$ + $\frac{ص}{٦}$ = ١ ∴ ٦س + ٤ص = ٢٤

∴ ظاهـ = $\frac{-٦}{٤}$ = $\frac{-٣}{٢}$ (سالبة)

∴ هـ قياس زاوية منفرجة

∴ هـ = ١٨٠° - ٥٦° ١٨َ ٣٦ً = ١٢٣° ٤١َ ٢٤ً

(٤) ∵ ل : س = ٢ + ٣ك ، ص = -١ + ٢ك

∴ ظاهـ = $\frac{٢}{٣}$ (موجبة) ∴ هـ قياس زاوية حادة

∴ هـ = ٣٣° ٤١َ ٢٤ً

(٥) ∵ ى = ($\sqrt{٣}$ ، ١) ∴ ظاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (موجبة)

∴ هـ قياس زاوية حادة ∴ هـ = ٣٠°

(٦) ∵ ن = ($\sqrt{٣}$ ، ١)

∴ ى متجه اتجاه المستقيم ل = (١ ، -$\sqrt{٣}$)

∴ ظاهـ = -$\sqrt{٣}$ (سالبة)

∴ هـ قياس زاوية منفرجة

∴ هـ = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

٢٢

∵ م = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ى = (٢ ، ٣)

بوضع س = ٠ ∴ ص = -٢

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، -٢)

∴ ر = (٠ ، -٢) + ك (٢ ، ٣)

٢٣

∵ س = ٣ - ٢ك ، ص = -١ + ٣ك

∴ الصورة المتجهة هي ر = (٣ ، -١) + ك (-٢ ، ٣)

، الصورة الكارتيزية هي $\frac{ص + ١}{س - ٣}$ = $\frac{٣}{-٢}$

أي أن : ٣س - ٩ = -٢ص - ٢

∴ الصورة العامة هي : ٣س + ٢ص - ٧ = ٠

٢٤

∵ $\frac{س}{أ}$ + $\frac{ص}{ب}$ = ١ ∴ م = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ى = (أ ، -ب)

∴ ر = (أ ، ٠) + ك (أ ، -ب)

٢٥

∵ محور تماثل $\overline{أب}$ ينصفها

∴ يمر بالنقطة ($\frac{٢ - ٤}{٢}$ ، $\frac{٥ + ٣}{٢}$) = (-١ ، ٤)

، ∵ محور تماثل $\overline{أب}$ يكون عموديًا عليها

، ∵ ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٥ - ٣}{-٤ - ٢}$ = $\frac{٢}{-٦}$ = $-\frac{١}{٣}$

∴ ميل محور التماثل = ٣

∴ معادلة محور التماثل هي : $\frac{ص - ٤}{س + ١}$ = ٣

∴ ص - ٤ = ٣س + ٣ ∴ ٣س - ص + ٧ = ٠

٢٦

∵ منتصف $\overline{بحـ}$ = ($\frac{٣ + ١}{٢}$ ، $\frac{٧ - ٣}{٢}$) = (٢ ، ٢)

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص + ٦}{س - ٥}$ = $\frac{٢ + ٦}{٢ - ٥}$

∴ $\frac{ص + ٦}{س - ٥}$ = $\frac{٨}{-٣}$

∴ ٣ص + ١٨ = -٨س + ٤٠

∴ ٨س + ٣ص - ٢٢ = ٠

٢٧

ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{-٢ - ٠}{٤ + ٣}$ = $\frac{-٢}{٧}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٧}{٢}$

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص - ٥}{س + ١}$ = $\frac{٧}{٢}$

∴ ٢ص - ١٠ = ٧س + ٧

∴ ٧س - ٢ص + ١٧ = ٠

٢٨

∵ ر = (-١ ، ٣) + ك (٦ ، -٤)

∴ المعادلة الكارتيزية هي : $\frac{ص - ٣}{س + ١}$ = $\frac{-٤}{٦}$

∴ ٦ص - ١٨ = -٤س - ٤

∴ ٤س + ٦ص - ١٤ = ٠

∴ ٢س + ٣ص - ٧ = ٠ (١)

، ∵ ر = (٥ ، -١) + ك (-٣ ، ٢)

∴ المعادلة الكارتيزية هي : $\frac{ص + ١}{س - ٥}$ = $\frac{٢}{-٣}$

∴ -٣ص - ٣ = ٢س - ١٠

∴ ٢س + ٣ص - ٧ = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المعادلتين تدلان على نفس المستقيم.

٢٩

معادلة القطر الذي يمر بالنقطتين أ = (٣ ، ٢)

، حـ = (-١ ، ٤) هي :

$\frac{ص - ٤}{س + ١}$ = $\frac{٢ - ٤}{٣ + ١}$ ∴ $\frac{ص - ٤}{س + ١}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ٢ص - ٨ = -س - ١

∴ ٢ص + س - ٧ = ٠ ، ميل هذا القطر = $\frac{-١}{٢}$

∴ ميل القطر الثاني العمودي عليه = ٢

والقطر الثاني يمر بنقطة منتصف $\overline{أحـ}$

= ($\frac{٣ - ١}{٢}$ ، $\frac{٢ + ٤}{٢}$) أي يمر بالنقطة (١ ، ٣)

∴ معادلة القطر الثاني هي : $\frac{ص - ٣}{س - ١}$ = ٢

∴ ص - ٣ = ٢س - ٢

∴ ص - ٢س - ١ = ٠

٣٠

∵ م أ = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-١ + ٤)^٢}$ = ٥ وحدات طول

، م ب = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٧ + ٤)^٢}$ = ٥ وحدات طول

، م حـ = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٠ + ٤)^٢}$ = ٥ وحدات طول

∴ م هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

، ∵ م هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أأ}$ = $\frac{-٤ + ١}{٥ - ١} = \frac{-٣}{٤}$

∴ ميل المماس = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص + ١}{س - ١} = \frac{٤}{٣}$

∴ ٣ ص + ٣ = ٤ س − ٤

∴ ٤ س − ٣ ص − ٧ = ٠

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1

(١)(ب) (٢)(ب) (٣)(أ) (٤)(د) (٥)(ب)

(٦)(جـ) (٧)(أ) (٨)(ب) (٩)(ب) (١٠)(ب)

(١١)(ب) (١٢)(جـ) (١٣)(جـ) (١٤)(أ) (١٥)(جـ)

(١٦)(جـ) (١٧)(جـ) (١٨)(ب) (١٩)(د) (٢٠)(جـ)

(٢١)(ب) (٢٢)(جـ)

إرشادات لحل رقم 1

(١) معادلة المستقيم هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

، ∵ النقطة $(\frac{١}{٢}أ ، \frac{١}{٢}ب)$ تحقق معادلة المستقيم

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(\frac{١}{٢}أ ، \frac{١}{٢}ب)$

(٢) ∵ $ل_١$: $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ ميله $م_١ = \frac{-ب}{أ}$ ، $ل_٢$: $\frac{س}{٢أ} + \frac{ص}{٢ب} = ١$

∴ ميله $م_٢ = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$

∴ $م_١ = م_٢$ ∴ $ل_١ // ل_٢$

(٣) بعد الدوران تصبح زاوية الميل = ٦٠° − ١٥° = ٤٥°

∴ ميل المستقيم = ظا ٤٥° = ١

∴ معادلة المستقيم فى الوضع الجديد هى :

$\frac{ص - ٣}{س - ٢} = ١$

أى أن : ص − س = ١

(٤) ∵ المستقيم يقطع جزءين متساويين فى الطول من محورى الإحداثيات ويمر بالنقطة (٣ ، ٤)

∴ معادلة المستقيم هى

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ ، أ، $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{-أ} = ١$

، ∵ النقطة (٣ ، ٤) تنتمى للمستقيم

∴ $\frac{٣}{أ} + \frac{٤}{أ} = ١$ ومنها أ = ٧

أ، $\frac{٣}{أ} - \frac{٤}{أ} = ١$ ومنها أ = −١

∴ معادلة المستقيم هى

س + ص = ٧ أ، س − ص = −١

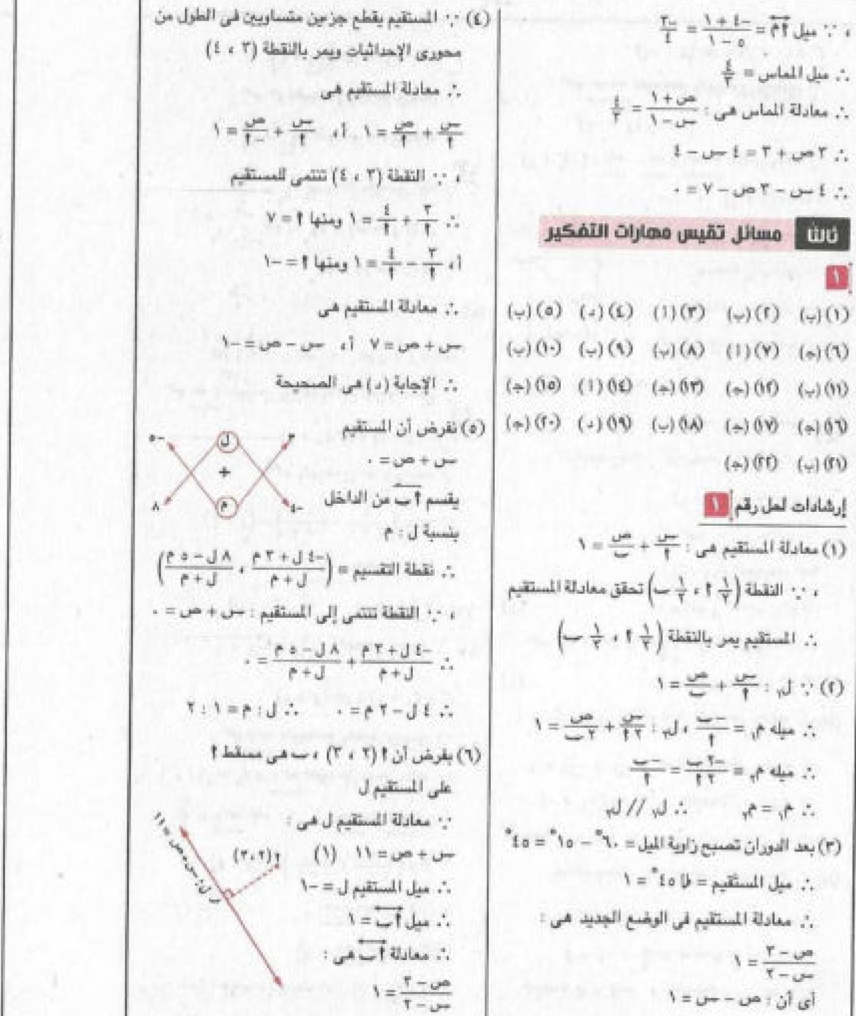
∴ الإجابة (د) هى الصحيحة

(٥) نفرض أن المستقيم

س + ص = ٠

يقسم $\overline{أب}$ من الداخل

بنسبة ل : م



∴ نقطة التقسيم = $\left(\frac{-٤ل + ٣م}{ل + م} ، \frac{٨ل - ٥م}{ل + م}\right)$

، ∵ النقطة تنتمى إلى المستقيم : س + ص = ٠

∴ $\frac{-٤ل + ٣م}{ل + م} + \frac{٨ل - ٥م}{ل + م} = ٠$

∴ ٤ ل − ٢ م = ٠ ∴ ل : م = ١ : ٢

(٦) بفرض أن أ (٢ ، ٣) ، ب هى مسقط أ على المستقيم ل

∵ معادلة المستقيم ل هى :

س + ص = ١١ (١)

∴ ميل المستقيم ل = −١

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ١

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى :

$\frac{ص - ٣}{س - ٢} = ١$

أى أن : س − ص + ١ = ٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ٥ ، ص = ٦

∴ نقطة التقاطع هى (٥ ، ٦)

∴ مسقط النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ل : س + ص = ١١ هى (٥ ، ٦)

(٧) نفرض أن النقطة أ = (٣ ، ٨)

، أَ هى صورة أ ، $\overline{أأَ}$ ∩ ل = {ب}

∵ معادلة المستقيم ل هى

س + ٣ ص − ٧ = ٠ (١)

∴ ميل المستقيم ل = $\frac{-١}{٣}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٣

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى

$\frac{ص - ٨}{س - ٣} = ٣$

أى أن : ٣ س − ص − ١ = ٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ١ ، ص = ٢

∴ نقطة التقاطع ب هى (١ ، ٢)

ولإيجاد أَ (جـ ، ء) صورة أ (٣ ، ٨) بالانعكاس فى المستقيم ل ∴ ب منتصف $\overline{أأَ}$

∴ $\left(\frac{٣ + جـ}{٢} ، \frac{٨ + ء}{٢}\right) = (١ ، ٢)$

∴ جـ = −١ ، ء = −٤

∴ أَ = (−١ ، −٤)

(٨) المستقيم ل عمودى على القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ من منتصفها

، ∵ منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٠ + ٤}{٢} ، \frac{٠ + ٢}{٢}\right)$

= (٢ ، ١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢ - ٠}{٤ - ٠} = \frac{١}{٢}$

∴ ميل المستقيم ل = −٢

∴ معادلة المستقيم ل هى : $\frac{ص - ١}{س - ٢} = -٢$

أى أن : ٢ س + ص = ٥

(٩) ∵ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أء}$ هى : $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٤} = ١$

∴ ء = (٠ ، ٤)

، ∵ $\overline{بء}$ // محور السينات

∴ معادلة $\overleftrightarrow{بء}$ هى : ص = ٤

(١٠) ∵ المستقيم : $\frac{ص}{٦} - \frac{س}{٨} = ١$

∴ أ = (−٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٦)

∴ Δ و أ ب فيه :

ب و = ٦ وحدات ، و أ = ٨ وحدات

∴ أ ب = ١٠ وحدات

، ∵ $\overleftrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠ب ∴ $\frac{و جـ}{جـ أ} = \frac{٦}{١٠}$

∴ $\frac{و جـ}{٨ - و جـ} = \frac{٣}{٥}$

∴ ٥ و جـ = ٢٤ − ٣ و جـ ∴ ٨ و جـ = ٢٤

∴ و جـ = ٣ وحدات ∴ جـ = (−٣ ، ٠)

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ هى : $\frac{س}{-٣} + \frac{ص}{٦} = ١$

(١١) ∵ معادلة المستقيم : س − ٢ ص − ٤ = ٠

أى أن : س − ٢ ص = ٤

أى أن : $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٢} = ١$

أى أن : ميل المستقيم = $\frac{١}{٢}$ ، ب = (٤ ، ٠)

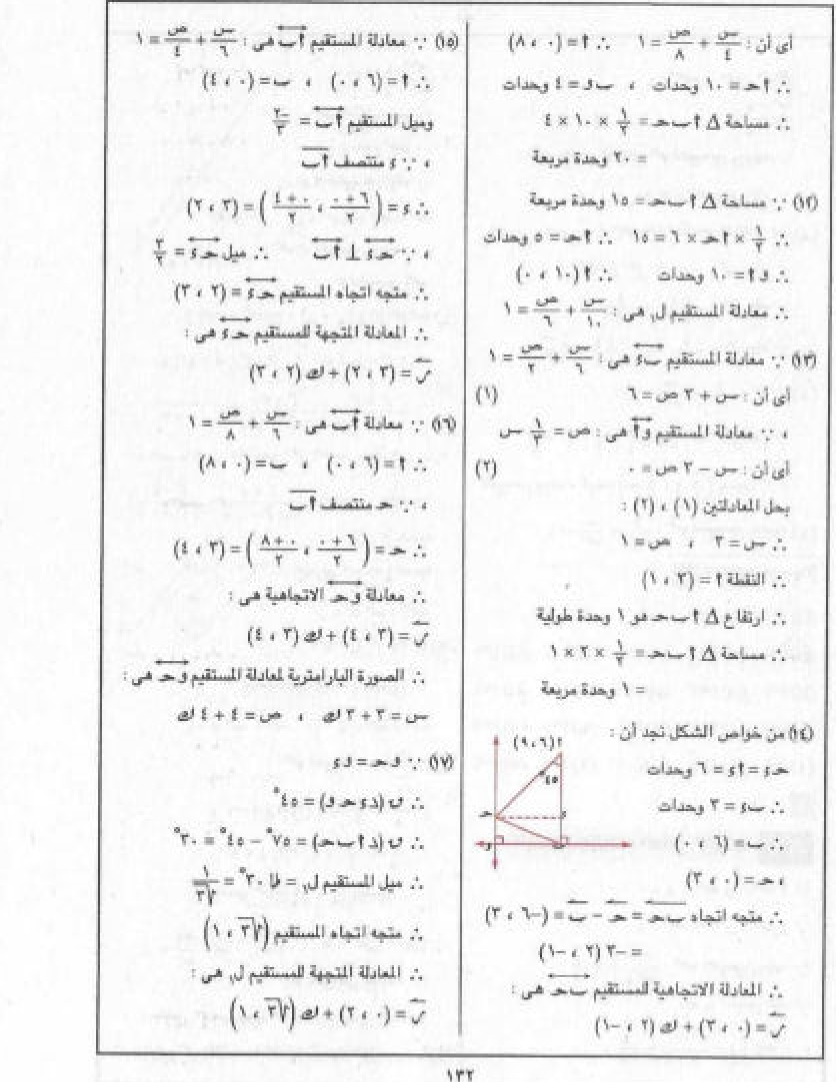
، جـ (٠ ، −٢)

، ∵ المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = −٢ ويمر بالنقطة (٤ ، ٠)

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى : $\frac{ص - ٠}{س - ٤} = -٢$

أى أن : ٢ س + ص = ٨



أي أن : $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٨} = ١$ ∴ ا = (٠ ، ٨)

∴ ا جـ = ١٠ وحدات ، ب ء = ٤ وحدات

∴ مساحة Δ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٤

= ٢٠ وحدة مربعة

(١٢) ∵ مساحة Δ ا ب جـ = ١٥ وحدة مربعة

∴ $\frac{١}{٢}$ × ا جـ × ٦ = ١٥ ∴ ا جـ = ٥ وحدات

∴ و ا = ١٠ وحدات ∴ ا (١٠ ، ٠)

∴ معادلة المستقيم ل هي : $\frac{س}{١٠} + \frac{ص}{٦} = ١$

(١٣) ∵ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب ء}$ هي : $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٣} = ١$

أي أن : س + ٢ ص = ٦ (١)

، ∵ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{و ا}$ هي : ص = $\frac{١}{٢}$ س

أي أن : س − ٢ ص = ٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ٢ ، ص = ١

∴ النقطة ا = (٢ ، ١)

∴ ارتفاع Δ ا ب جـ هو ١ وحدة طولية

∴ مساحة Δ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١

= ١ وحدة مربعة

(١٤) من خواص الشكل نجد أن :

جـ ء = ا ء = ٦ وحدات

∴ ب ء = ٣ وحدات

∴ ب = (٦ ، ٠)

، جـ = (٠ ، ٣)

∴ متجه اتجاه $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$ = (−٦ ، ٣)

= −٣ (٢ ، −١)

∴ المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣) + ك (٢ ، −١)

(١٥) ∵ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ هي : $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٤} = ١$

∴ ا = (٦ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤)

وميل المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ = $\frac{-٢}{٣}$

، ∵ ء منتصف $\overline{ا ب}$

∴ ء = $\left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٤}{٢}\right)$ = (٣ ، ٢)

، ∵ $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overleftrightarrow{ا ب}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = (٢ ، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، ٣)

(١٦) ∵ معادلة $\overleftrightarrow{ا ب}$ هي : $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٨} = ١$

∴ ا = (٦ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٨)

، ∵ جـ منتصف $\overline{ا ب}$

∴ جـ = $\left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٨}{٢}\right)$ = (٣ ، ٤)

∴ معادلة $\overleftrightarrow{و جـ}$ الاتجاهية هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٤) + ك (٣ ، ٤)

∴ الصورة البارامترية لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{و جـ}$ هي :

س = ٣ + ٣ ك ، ص = ٤ + ٤ ك

(١٧) ∵ و جـ = ء و

∴ ق(∠ ء جـ و) = ٤٥°

∴ ق(∠ ا ب جـ) = ٧٥° − ٤٥° = ٣٠°

∴ ميل المستقيم ل = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه اتجاه المستقيم ($\sqrt{٣}$ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم ل هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ١)

(١٨) ∵ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ هي : $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ١$

∴ ا = (٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٠)

، ∵ و جـ = ٢ و ب

∴ جـ = (−٦ ، ٠)

∴ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ا جـ}$ = $\frac{٢ - ٠}{٠ + ٦} = \frac{١}{٣}$

∴ متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{ا جـ}$ = (٣ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{ا جـ}$ هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (−٦ ، ٠) + ك (٣ ، ١)

(١٩) ∵ مساحة المربع = ٣٦ وحدة مربعة

∴ ا ء = ٦ وحدات

، ∵ ء = (−١٢ ، ٠)

∴ ا = (−٦ ، ٠) ومنها ب = (−٦ ، −٦)

∴ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{هـ ب}$ = $\frac{-٦ - ٣}{-٦ - ٠} = \frac{٣}{٢}$

∴ متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{هـ ب}$ = (٢ ، ٣)

∴ المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{هـ ب}$ هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (−٦ ، −٦) + ك (٢ ، ٣)

(٢٠) ∵ ء (٠ ، ص) منتصف $\overline{ا جـ}$ حيث

ا (٤ ، ٦) ، جـ (س ، ٠)

∴ $\left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{٦ + ٠}{٢}\right)$ = (٠ ، ص)

∴ س = −٤ ، ص = ٣

∴ ء = (٠ ، ٣) ، جـ = (−٤ ، ٠)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{ا جـ}$ = $\frac{٣ - ٠}{٠ + ٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{ا ب}$ = $\frac{-٤}{٣}$

∴ متجه الاتجاه للمستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ = (٣ ، −٤)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٤ ، ٦) + ك (٣ ، −٤)

∴ المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ هما :

س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٦ − ٤ ك

(٢١) ∵ (ا ب)^٢ = ب جـ . ب و

= مساحة المستطيل ب ء هـ و

= ٢٠ وحدة مربعة

، ∵ (ب جـ)^٢ = (ا ب)^٢ − (ا جـ)^٢

= ٢٠ − ١٦ = ٤

∴ ب جـ = ٢ وحدة طول

ب و = ١٠ وحدة طول

∴ ا = (٨ ، ٤) ، ب = (١٠ ، ٠)

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ا ب}$ هي : $\frac{ص - ٤}{س - ٨} = \frac{٠ - ٤}{١٠ - ٨}$

أي أن : ٢ س + ص − ٢٠ = ٠

(٢٢) نفرض أن : ا = (س ، ٠)

، ∵ ا ء = و ب

∴ $\sqrt{(س)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢}$

∴ س = ٥ ∴ ا (٥ ، ٠)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{ا ب}$ = $\frac{-٣ - ٠}{٤ - ٥} = ٣$

∴ ميل $\overleftrightarrow{و م}$ = $\frac{-١}{٣}$

∴ متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{و م}$ = (٣ ، −١)

∴ المعادلة الاتجاهية للمستقيم $\overleftrightarrow{و م}$ هي :

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٠) + ك (٣ ، −١)

٢

∵ ب = (٢ ، ٢) ، ء = (−١ ، ٠)

∴ ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ = $\frac{٢ - ٠}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$

∴ ظا هـ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ق(∠ هـ) = $٣٣^\circ\ ٤١'\ ٢٤''$

، ∵ أ = (١ ، ٠) ، ب = (٢ ، ٢)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٠ - ٢}{١ - ٢} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص - ٠}{س - ١} = ٢$ ∴ ص = ٢ س − ٢

∴ ٢ س − ص − ٢ = ٠

∵ جـ = (−٢ ، ٢) ، ء = (−١ ، ٠)

∴ ميل $\overleftrightarrow{جـء} = \frac{٢ - ٠}{-٢ + ١} = -٢$

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{جـء}$ هي :

$\frac{ص - ٠}{س + ١} = -٢$ ∴ ص = −٢ س − ٢

∴ ٢ س + ص + ٢ = ٠

٣

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات في (أ ، ٠) ومحور الصادات في (٠ ، ب)

∴ معادلة المستقيم هي $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ (١)

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٤ ، ٣)

∴ $\frac{٤}{أ} + \frac{٣}{ب} = ١$ ∴ $\frac{٤}{أ} = \frac{-٣ + ب}{ب}$

∴ $أ = \frac{٤ ب}{-٣ + ب}$ (٢)

، ∵ أ + ب = ١٤ ∴ أ = ١٤ − ب

∴ $١٤ - ب = \frac{٤ ب}{-٣ + ب}$

∴ (١٤ − ب) (−٣ + ب) = ٤ ب

∴ −٤٢ + ١٧ ب − $ب^2$ = ٤ ب

∴ $ب^2$ − ١٣ ب + ٤٢ = ٠

∴ (ب − ٦) (ب − ٧) = ٠

∴ ب = ٦ ومنها أ = ٨

أو ب = ٧ ومنها أ = ٧ (مرفوض)

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦} = ١$

∴ ٣ س + ٤ ص − ٢٤ = ٠

٤

بفرض أن المستقيم المطلوب يقطع محور السينات في (أ ، ٠) ، الصادات في (٠ ، ب)

∴ معادلته تكون على الصورة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ (١)

، ∵ (٣ ، ٢) نقطة على المستقيم

∴ $\frac{٣}{أ} + \frac{٢}{ب} = ١$

∴ $\frac{٣}{أ} = \frac{-٢ + ب}{ب}$ ∴ $أ = \frac{٣ ب}{ب - ٢}$ (٢)

، ∵ مساحة المثلث = ١٢ وحدة مربعة

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب = ١٢ ∴ أ ب = ٢٤

∴ $\frac{٣ ب}{ب - ٢} \times ب = ٢٤$ ∴ $\frac{ب^2}{ب - ٢} = ٨$

∴ $ب^2$ = ٨ ب − ١٦ ∴ $ب^2$ − ٨ ب + ١٦ = صفر

∴ $(ب - ٤)^2$ = صفر

∴ ب = ٤ وبالتعويض في (٢)

∴ $أ = \frac{١٢}{٤ - ٢} = ٦$ وبالتعويض في (١)

∴ معادلة المستقيم المطلوب تكون على الصورة :

$\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٤} = ١$

أي : ٢ س + ٣ ص − ١٢ = صفر

٥

∵ معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ هي : $\frac{ص - ٤}{س - ١} = -١$

∴ ص + س − ٥ = ٠ ، عند س = ٠

∴ ص = ٥ ∴ ب = (٥ ، ٥)

∴ معادلة $\overleftrightarrow{بـء}$ هي : $\frac{ص - ٥}{س - ٥} = \frac{١}{٤}$

∴ ٤ ص − س − ١٥ = ٠

، بفرض هـ = (−ن ، ن) ∴ ٤ ن + ن − ١٥ = ٠

∴ ن = ٣ ∴ هـ = (−٣ ، ٣)

∴ مساحة المربع = ٣ × ٣ = ٩ وحدة مربعة

إرشادات تمارين 7

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (د)

(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (د)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (أ) (١٤) (ب) (١٥) (جـ)

(١٦) (ب) (١٧) (أ) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)

(٢١) (ب) (٢٢) (جـ)

(٢٣) أولاً : (جـ) ثانياً : (د) ثالثاً : (جـ)

رابعاً : (ب) خامساً : (أ) سادساً : (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ $م_١$ = ٠ ، $م_٢$ = −٢

∴ ظا هـ = $\left|\frac{٠ + ٢}{١ + (٠ \times -٢)}\right| = ٢$

∴ هـ = $٦٣^\circ\ ٢٦'\ ٦''$

(٢) ∵ $م_١$ = ١ ، $م_٢$ = ٢

∴ ظا هـ = $\left|\frac{١ - ٢}{١ + (١ \times ٢)}\right| = \frac{١}{٣}$

∴ هـ = $١٨^\circ\ ٢٦'\ ٦''$

(٣) ∵ $م_١ = -\frac{١}{٢}$ ، $م_٢$ = ٤

∴ ظا هـ = $\left|\frac{-\frac{١}{٢} - ٤}{١ + (-\frac{١}{٢} \times ٤)}\right| = \frac{٩}{٢}$

∴ هـ = $٧٧^\circ\ ٢٨'\ ١٦''$

(٤) ∵ $م_١ = -\frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{١}{٣}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{-\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}}{١ + (-\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣})}\right| = ١$

∴ هـ = ٤٥°

(٥) ∵ $م_١ = -\frac{٢}{٣}$ ، $م_٢ = \frac{١}{٥}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{-\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{١٥}}\right| = ١$ ∴ هـ = ٤٥°

(٦) ∵ $م_١ = -\frac{٢}{٣}$ ، $م_٢$ = ٤

∴ ظا هـ = $\left|\frac{-\frac{٢}{٣} - ٤}{١ - \frac{٨}{٣}}\right| = \frac{١٤}{٥}$

∴ هـ = $٧٠^\circ\ ٢٠'\ ٤٦''$

(٧) ∵ $م_١$ = صفر ، $م_٢ = \frac{-٢}{٥}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{صفر + \frac{٢}{٥}}{١ + صفر}\right| = \frac{٢}{٥}$

∴ هـ = $٢١^\circ\ ٤٨'\ ٥''$

(٨) ∵ $م_١$ = −٢ ، $م_٢ = \frac{٣}{٢}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{-٢ - \frac{٣}{٢}}{١ + (-٢ \times \frac{٣}{٢})}\right| = \frac{٧}{٤}$

∴ هـ = $٦٠^\circ\ ٢٥'\ ١٨''$

٢

∵ $م_١ = \frac{أ}{٣}$ ، $م_٢ = -\frac{٢}{٣}$ ، $م_٣ = \frac{٢}{٣}$

(١) ∵ قياس الزاوية بين $ل_١$ ، $ل_٣$ = صفر

∴ $م_١ = م_٣$ ∴ $\frac{أ}{٣} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٢

(٢) ∵ قياس الزاوية بين $ل_١$ ، $ل_٢$ = ٩٠°

∴ $م_١ م_٢$ = −١ ∴ $\frac{أ}{٣} \times \frac{-٢}{٣} = -١$

∴ $أ = \frac{٩}{٢}$

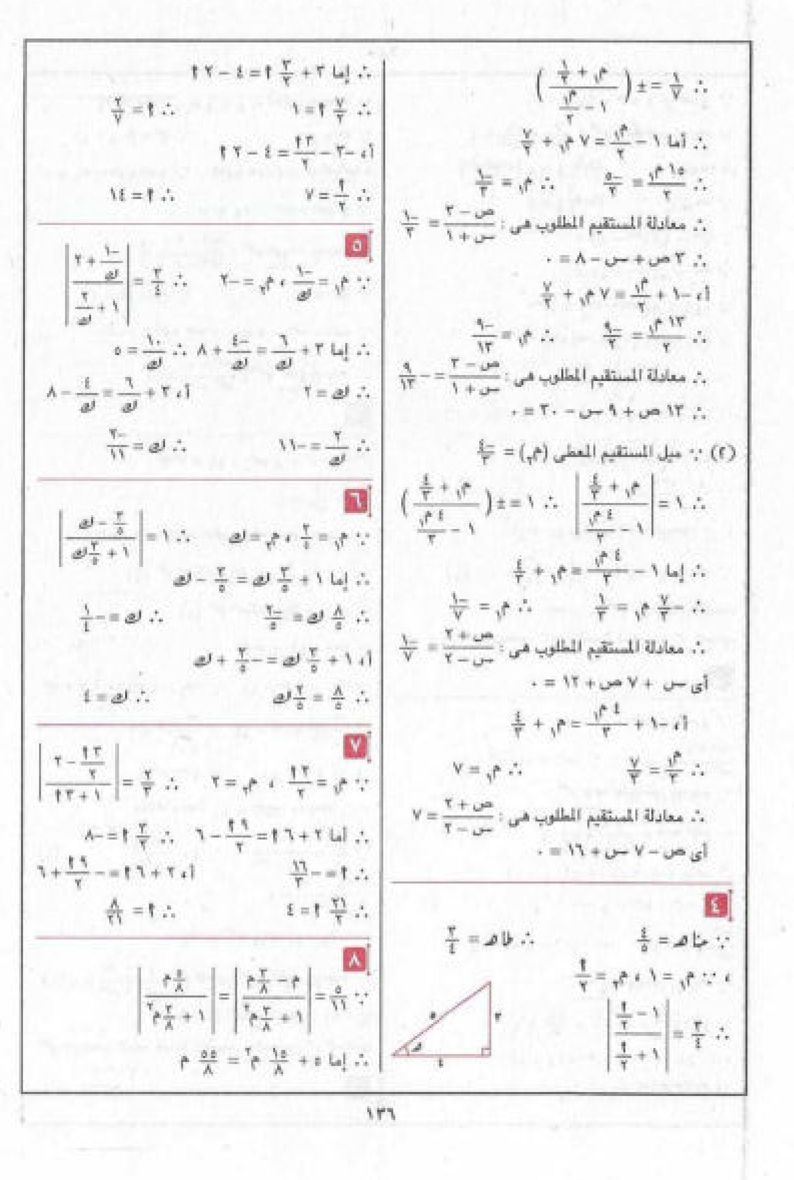
٣

نفرض أن ميل المستقيم المطلوب $م_١$

، ميل المستقيم المعطى $م_٢$

(١) ∵ ميل المستقيم المعطى ($م_٢$) = $-\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٧} = \left|\frac{م_١ + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{م_١}{٢}}\right|$



$\therefore \frac{١}{٧} = \pm \left(\frac{م_١ + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{م_١}{٢}} \right)$

$\therefore$ أما $١ - \frac{م_١}{٢} = ٧ م_١ + \frac{٧}{٢}$

$\therefore \frac{١٥ م_١}{٢} = \frac{-٥}{٢}$ $\quad \therefore م_١ = \frac{-١}{٣}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى : $\frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{-١}{٣}$

$\therefore ٣ ص + س - ٨ = ٠$

أو $-١ + \frac{م_١}{٢} = ٧ م_١ + \frac{٧}{٢}$

$\therefore \frac{١٣ م_١}{٢} = \frac{-٩}{٢}$ $\quad \therefore م_١ = \frac{-٩}{١٣}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى : $\frac{ص - ٣}{س + ١} = -\frac{٩}{١٣}$

$\therefore ١٣ ص + ٩ س - ٣٠ = ٠$

(٢) $\because$ ميل المستقيم المعطى $(م_٢) = \frac{٤}{٣}$

$\therefore ١ = \left| \frac{م_١ + \frac{٤}{٣}}{١ - \frac{٤ م_١}{٣}} \right|$ $\quad \therefore ١ = \pm \left(\frac{م_١ + \frac{٤}{٣}}{١ - \frac{٤ م_١}{٣}} \right)$

$\therefore$ إما $١ - \frac{٤ م_١}{٣} = م_١ + \frac{٤}{٣}$

$\therefore -\frac{٧}{٣} م_١ = \frac{١}{٣}$ $\quad \therefore م_١ = \frac{-١}{٧}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٢} = \frac{-١}{٧}$

أى $س + ٧ ص + ١٢ = ٠$

أو $-١ + \frac{٤ م_١}{٣} = م_١ + \frac{٤}{٣}$

$\therefore \frac{م_١}{٣} = \frac{٧}{٣}$ $\quad \therefore م_١ = ٧$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى : $\frac{ص + ٢}{س - ٢} = ٧$

أى $ص - ٧ س + ١٦ = ٠$

٤

$\because$ جتا هـ $= \frac{٤}{٥}$ $\quad \therefore$ ظا هـ $= \frac{٣}{٤}$

، $\because م_١ = ١$ ، $م_٢ = \frac{أ}{٢}$

$\therefore \frac{٣}{٤} = \left| \frac{\frac{أ}{٢} - ١}{\frac{أ}{٢} + ١} \right|$

$\therefore$ إما $٣ + \frac{٣}{٢} أ = ٢ أ - ٤$

$\therefore \frac{٧}{٢} أ = ١$ $\quad \therefore أ = \frac{٢}{٧}$

أو $-٣ - \frac{٣ أ}{٢} = ٢ أ - ٤$

$\therefore \frac{أ}{٢} = ٧$ $\quad \therefore أ = ١٤$

٥

$\because م_١ = \frac{-١}{ك}$ ، $م_٢ = -٢$ $\quad \therefore \frac{٣}{٤} = \left| \frac{\frac{-١}{ك} + ٢}{١ + \frac{٢}{ك}} \right|$

$\therefore$ إما $٣ + \frac{٦}{ك} = \frac{-٤}{ك} + ٨$ $\quad \therefore \frac{١٠}{ك} = ٥$

$\therefore ك = ٢$ $\quad$ أو $٣ + \frac{٦}{ك} = \frac{٤}{ك} - ٨$

$\therefore \frac{٢}{ك} = -١١$ $\quad \therefore ك = \frac{-٢}{١١}$

٦

$\because م_١ = \frac{٣}{٥}$ ، $م_٢ = ك$ $\quad \therefore ١ = \left| \frac{\frac{٣}{٥} - ك}{١ + \frac{٣}{٥} ك} \right|$

$\therefore$ إما $١ + \frac{٣}{٥} ك = \frac{٣}{٥} - ك$

$\therefore \frac{٨}{٥} ك = \frac{-٢}{٥}$ $\quad \therefore ك = -\frac{١}{٤}$

أو $١ + \frac{٣}{٥} ك = -\frac{٣}{٥} + ك$

$\therefore \frac{٨}{٥} = \frac{٢}{٥} ك$ $\quad \therefore ك = ٤$

٧

$\because م_١ = \frac{٣ أ}{٢}$ ، $م_٢ = ٢$ $\quad \therefore \frac{٣}{٢} = \left| \frac{\frac{٣ أ}{٢} - ٢}{١ + ٣ أ} \right|$

$\therefore$ أما $٣ + ٩ أ = \frac{٩ أ}{٢} - ٦$ $\quad \therefore \frac{٩}{٢} أ = -٩$ ... $\therefore أ = -\frac{١٦}{٣}$

أو $٣ + ٩ أ = -\frac{٩ أ}{٢} + ٦$

$\therefore \frac{٢١}{٢} أ = ٤$ $\quad \therefore أ = \frac{٨}{٢١}$

٨

$\because \frac{٥}{١١} = \left| \frac{م - \frac{٣}{٨} م}{١ + \frac{٣}{٨} م^٢} \right| = \left| \frac{\frac{٥}{٨} م}{١ + \frac{٣}{٨} م^٢} \right|$

$\therefore$ إما $٥ + \frac{١٥}{٨} م^٢ = \frac{٥٥}{٨} م$

$\therefore ٤٠ + ١٥ م^٢ = ٥٥ م$

$\therefore ٣ م^٢ - ١١ م + ٨ = ٠$

$\therefore (٣ م - ٨)(م - ١) = ٠$

$\therefore$ إما $م = \frac{٨}{٣}$ ومنها ميلا المستقيمين يكونان $\frac{٨}{٣}$ ، ١

أو $م = ١$ ومنها ميلا المستقيمين يكونان ١ ، $\frac{٣}{٨}$

أو $٥ + \frac{١٥}{٨} م^٢ = -\frac{٥٥}{٨} م$

$\therefore ٤٠ + ١٥ م^٢ = -٥٥ م$

$\therefore ٣ م^٢ + ١١ م + ٨ = ٠$

$\therefore (٣ م + ٨)(م + ١) = ٠$

$\therefore م = \frac{-٨}{٣}$ أو -١ (مرفوضان لأن م > ٠)

$\therefore$ عند $م = \frac{٨}{٣}$ معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{٨}{٣}$

ويمر بالنقطة (٣ ، −١) هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = \frac{٨}{٣}$

أى $٣ ص - ٨ س + ٢٧ = ٠$

، معادلة المستقيم الذى ميله = ١

ويمر بالنقطة (٣ ، −١) هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = ١$

أى $ص - س + ٤ = ٠$

، عند م = ١ معادلة المستقيم الذى ميله = ١

، يمر بالنقطة (٣ ، −١) هى : $ص - س + ٤ = ٠$ ،

، معادلة المستقيم الذى ميله $= \frac{٣}{٨}$

، يمر بالنقطة (٣ ، −١) هى : $\frac{ص + ١}{س - ٣} = \frac{٣}{٨}$

أى $٨ ص - ٣ س + ١٧ = ٠$

٩

$\because$ أب $= \sqrt{(٠ - ٣)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

، ب حـ $= \sqrt{(٣ + ٢)^٢ + (١ + ١)^٢} = \sqrt{٢٩}$ وحدة طول

، أ حـ $= \sqrt{(٠ + ٢)^٢ + (٢ + ١)^٢} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

$\therefore$ (ب حـ)^٢ > (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢

$\therefore$ د أ منفرجة ، د ب ، د حـ حادتان

، $\because$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ١}{٠ - ٣} = -\frac{١}{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{١ + ١}{٣ + ٢} = \frac{٢}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٢ + ١}{٠ + ٢} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ ظا ب $= \left| \frac{-\frac{١}{٣} - \frac{٢}{٥}}{١ - \frac{٢}{١٥}} \right| = \frac{١١}{١٣}$

$\therefore$ ق(د ب) $\simeq$ ٤٠ ٦٤ ٩١° ، ظا حـ $= \left| \frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٣}{٢}}{١ + \frac{٣}{٥}} \right| = \frac{١١}{١٦}$

$\therefore$ ق(د حـ) $\simeq$ ٣٤ ٣٠ ٤١°

$\therefore$ ق(د أ) = ١٨٠° − (٤٠ ٦٤ ٩١° + ٣٤ ٣٠ ٤١°)

= ١٠٥ ٦٥ ٦٨°

١٠

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٧ + ١}{٤ + ٢} = \frac{٤}{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{-١ + ٤}{-٢ - ٢} = \frac{٣}{-٤}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = -١$ $\quad \therefore$ ق(د ب) = ٩٠°

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٧ + ٤}{٤ - ٢} = \frac{١١}{٢}$

$\therefore$ ظا حـ $= \left| \frac{-\frac{٣}{٤} - \frac{١١}{٢}}{١ - \frac{٣٣}{٨}} \right| = ٢$

$\therefore$ ق(د حـ) = ٦٣ ٢٦°

$\therefore$ ق(د أ) = ٩٠° − ٦٣ ٢٦° = ٣٦ ٣٤°

١١

$\because$ أب $= \sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

، ب حـ $= \sqrt{(٥ + ٢)^٢ + (١ - ١)^٢} = ٧$ وحدة طول

، أ حـ $= \sqrt{(٢ + ٢)^٢ + (٣ - ١)^٢} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

، $\because$ (ب حـ)^٢ > (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢

$\therefore \Delta$ أ ب حـ منفرج الزاوية فى أ

$\therefore$ د ب ، د حـ حادتان $\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٣ - ١}{٢ - ٥} = \frac{-٢}{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{١ - ١}{٥ + ٢} =$ صفر ، ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ظا ب = $\left|\frac{-\frac{٢}{٣} - ٠}{١ + ٠}\right| = \frac{٢}{٣}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٣٣ ٤١ ٢٤° ، ظا حـ = $\left|\frac{\frac{١}{٢} - ٠}{١ + ٠}\right| = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٢٦ ٣٣ ٥٤°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٣٣ ٤١ ٢٤° + ٢٦ ٣٣ ٥٤°)

= ١١٩ ٤٤ ٤٢°

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٣} \times ٧ \times$ جا ٣٣ ٤١ ٢٤°

≃ ٧ وحدات مربعة

١٢

∵ أ ب = $\sqrt{(٠ - ٢)^٢ + (٥ + ١)^٢} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (-١ - ٣)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، أ حـ = $\sqrt{(٠ - ٦)^٢ + (٥ - ٣)^٢} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ أ ب = أ حـ ∴ المثلث متساوى الساقين

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{٥ + ١}{٠ - ٢} = -٣$

، ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٥ - ٣}{٠ - ٦} = -\frac{١}{٣}$

∴ ظا أ = $\left|\frac{-\frac{١}{٣} + ٣}{١ + ١}\right| = \frac{٤}{٣}$ ∴ ق(∠ أ) = ٥٣ ٨ ٥٣°

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ حـ × جا أ

= $\frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{١٠} \times ٢\sqrt{١٠}$

× جا ٥٣ ٨ ٥٣°

≃ ١٦ وحدة مربعة

١٣

∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = ٢ ∴ ميل $\overleftrightarrow{أ حـ}$ «العمودى» = $-\frac{١}{٢}$

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{حـ ب}$ = −٣

∴ ظا (∠ أ حـ ب) = $\left|\frac{-\frac{١}{٢} + ٣}{١ + \frac{٣}{٢}}\right| = ١$

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٤٥°

١٤

∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{٧ - ٣}{٥ - ٢} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = -\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{ص - ٧}{١ - ٥} = -\frac{٣}{٤}$ ∴ ص − ٧ = ٣

∴ ص = ١٠

∴ ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٣ - ١٠}{٢ - ١} = -٧$

∴ ظا (∠ حـ أ ب) = $\left|\frac{\frac{٤}{٣} + ٧}{١ - \frac{٢٨}{٣}}\right| = ١$

∴ ق(∠ حـ أ ب) = ٤٥° ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٤٥°

١٥

∵ ء = $\left(\frac{-٣ + ٥}{٢} ، \frac{-١٣ + ٣}{٢}\right)$ = (١ ، −٥)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أ ء} = \frac{٢ + ٥}{-٣ - ١} = \frac{٧}{-٤}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{٣ + ١٣}{٥ + ٣} = ٢$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{-\frac{٧}{٤} - ٢}{١ - \frac{٧}{٢}}\right| = ١٫٥$ ∴ هـ ≃ ٥٦ ١٩°

١٦

(١) ء = $\frac{٢(١ ، ٥) + (٤ ، ٢)}{٢ + ١}$ = (٢ ، ٤)

(٢) ∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ء} = \frac{٧ - ٤}{٥ - ٢} = ١$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب حـ} = \frac{٥ - ٢}{١ - ٤} = -١$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ء}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = ١ × −١ = −١

∴ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

(٣) ∵ أ ء = $\sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (٧ - ٤)^٢} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٥ - ٢)^٢} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ أ ء = ب حـ

(٤) ∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{٧ - ٥}{٥ - ١} = \frac{١}{٢}$

∴ ظا (∠ ب) = $\left|\frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}}\right| = ٣$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٧١ ٣٤°

(٥) مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × أ ء

= $\frac{١}{٢} \times ٣\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}$

= ٩ وحدة مربعة

١٧

∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{٧ + ١}{٥ - ٦} = -٨$

، ميل $\overleftrightarrow{أ حـ} = \frac{٧ - ٥}{٥ - \frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٧}$ ، ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ن} = \frac{١}{٢}$

∴ ظل الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين

$\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ن}$ = $\left|\frac{-٨ + \frac{١}{٢}}{١ + ٤}\right| = \frac{٣}{٢}$

∴ قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ن}$ = ٥٦ ١٩°

، ظل الزاوية الحادة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ن}$

= $\left|\frac{\frac{٤}{٧} + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{٢}{٧}}\right| = \frac{٣}{٢}$

∴ قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ن}$ = ٥٦ ١٩°

∴ المستقيم $\overleftrightarrow{ن}$ يصنع مع المستقيمين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$

مثلثًا متساوى الساقين رأسه أ

١٨

نفرض أن ل١ : ٣ س + ٤ ص = ٣٦

، ل٢ : س − ٧ ص + ١٣ = ٠

، ل٣ : ٧ س + ص = ٩

∴ م١ = $\frac{-٣}{٤}$ ، م٢ = $\frac{١}{٧}$ ، م٣ = −٧

∵ م٢ × م٣ = −١ ∴ ل٢ ⊥ ل٣

∴ قياس الزاوية بين المستقيمين ل٢ ، ل٣ = ٩٠°

، ∵ ظل الزاوية بين المستقيمين ل١ ، ل٢ = $\left|\frac{-\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٧}}{١ - \frac{٣}{٢٨}}\right| = ١$

∴ قياس الزاوية بين المستقيمين ل١ ، ل٢ = ٤٥°

وبالتالى قياس الزاوية بين المستقيمين ل١ ، ل٣ = ٤٥°

∴ المثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (د) (٢) (د) (٣) (حـ) (٤) (أ) (٥) (أ)

(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (أ) (٩) (ب)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ م١ = ٢ − $\sqrt{٣}$ ، م٢ = ٢ + $\sqrt{٣}$

∴ ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{-٢\sqrt{٣}}{١ + ١}\right| = \sqrt{٣}$

∴ ق(∠ هـ) = ٦٠°

∴ قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين

= ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

(٢) نفرض أن ميل ل١ = م ∴ ميل ل٢ = ٢ م

∴ $\left|\frac{٢م - م}{١ + ٢م \times م}\right| = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{م}{١ + ٢م^٢} = \pm\frac{١}{٣}$

∴ ١ + ٢ م^٢ = ٣ م

ومنها ٢ م^٢ − ٣ م + ١ = ٠

∴ (٢ م − ١) (م − ١) = ٠

∴ م = $\frac{١}{٢}$ أو م = ١

أو ١ + ٢ م^٢ = −٣ م

ومنها ٢ م^٢ + ٣ م + ١ = ٠

∴ (٢ م + ١) (م + ١) = ٠

∴ م = $\frac{-١}{٢}$ أو م = −١

∴ الإجابة الصحيحة (د)

(٣) ∵ م١ = $\frac{٨ - ٠}{-٥ - ٣}$ = −١ ، م٢ = $\frac{٨ - ٠}{-٥ + ٣} = \frac{-٨}{٣}$

∴ ظا θ = $\left|\frac{-١ + \frac{٨}{٣}}{١ + (-١)(\frac{-٨}{٣})}\right| = \frac{٥}{١١}$

(٤) نفرض أن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = م

، ميل $\overleftrightarrow{أحـ} = \frac{٠ - ٦}{٠ - ٣-}$

$= -٢$

، ظا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ $\left|\frac{-٢ - م}{١ - ٢م}\right| = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{-٢ - م}{١ - ٢م} = \pm\frac{١}{٢}$

∴ $-٤ - ٢م = ١ - ٢م$

∴ $-٤ = ١$ (مستحيل) أ، $-٤ - ٢م = -١ + ٢م$

∴ $٤م = -٣$ ∴ $م = \frac{-٣}{٤}$

، نفرض أن النقطة ب = (س ، ٠)

∴ $\frac{٠ - ٦}{س - ٠} = \frac{-٣}{٤}$ ∴ س = ٨

∴ ب = (٨ ، ٠)

(٥) $\left|\frac{ك - ٢}{١ + ٢ك}\right| = ٣$ ∴ $\frac{ك - ٢}{١ + ٢ك} = \pm ٣$

∴ ك − ٢ = ٣ + ٩ ك

∴ ك = $\frac{-٣}{٤}$ أ، ك − ٢ = −٣ − ٩ ك

∴ ك = صفر (مرفوض)

(٦) ∵ ميل $\overleftrightarrow{بحـ} = \frac{ك + ٢}{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{بأ} = \frac{٣}{٦ + ٣} = \frac{١}{٣}$

∴ ظا ٤٥° = $\left|\frac{\frac{ك + ٢}{٣} - \frac{١}{٣}}{١ + \frac{ك + ٢}{٩}}\right|$

∴ ١ = $\left|\frac{\frac{ك + ٢ - ١}{٣}}{\frac{٩ + ك + ٢}{٩}}\right|$

∴ $\left|\frac{ك + ٢}{٣} \times \frac{٩}{ك + ١٢}\right| = ١$

∴ $\left|\frac{٣ك + ٦}{ك + ١٢}\right| = ١$

∴ $\frac{٣ك + ٦}{ك + ١٢} = ١$ ومنها ك = ٣

أ، $\frac{٣ك + ٦}{ك + ١٢} = -١$ ومنها ك = $\frac{-٩}{٢}$

(مرفوضة لأن هندسة الشكل ك > ٠)

(٧) ∵ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي س + ٢ ص = −٦

أي أن : $\frac{س}{-٦} + \frac{ص}{-٣} = ١$

∴ أ = (−٦ ، ٠)

، حـ = (٠ ، −٣)

∴ ب حـ = ٢ أ حـ

∴ ب تقسم $\overline{حـ أ}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٣

∴ س = $\frac{٢ \times -٦ - ٣ \times ٠}{٢ - ٣} = ١٢$

، ص = $\frac{٢ \times ٠ - ٣ \times -٣}{٢ - ٣} = -٩$

∴ ب (١٢ ، −٩)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٠ + ٩}{-٦ - ١٢} = \frac{-١}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{وب} = \frac{٠ + ٩}{٠ - ١٢} = \frac{-٣}{٤}$

∴ ظا θ = $\left|\frac{-\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}}{١ + \frac{٣}{٨}}\right| = \left|\frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١١}{٨}}\right| = \frac{٢}{١١}$

(٨)

بفرض أن المستقيم لَ هو صورة المستقيم ل بالدوران ٤٥° ضد اتجاه عقارب الساعة

، ∵ ميل المستقيم ل = $\frac{٢ - ٠}{٣ - ٢} = ٢$

∴ ظا θ = ٢ ∴ θ = ظا$^{-١}$ (٢)

∴ ميل المستقيم لَ = ظا (٤٥° + ظا$^{-١}$ (٢)) = −٣

∴ معادلة المستقيم لَ هي : $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = -٣$

∴ ص = −٣ س + ٦

∴ ٣ س + ص = ٦

(٩)

∴ م$_١$ = ميل المستقيم ل$_١$ = $\frac{١}{٤}$

م$_٢$ = ميل المستقيم ل$_٢$ = ١

∴ ظا θ = $\left|\frac{\frac{١}{٤} - ١}{١ + \frac{١}{٤} \times ١}\right| = \frac{٣}{٥}$

٢

نفرض أن ميل أحد الضلعين المتساويين = م

∴ ظا ٤٥° = $\left|\frac{م + \frac{٣}{٤}}{١ + \frac{٣}{٤} م}\right|$

∴ $\frac{م + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٣}{٤} م} = \pm ١$

∴ م + $\frac{٣}{٤}$ = ١ − $\frac{٣}{٤}$ م ومنها م = $\frac{١}{٧}$

أ، م + $\frac{٣}{٤}$ = −١ + $\frac{٣}{٤}$ م ومنها م = −٧

∴ معادلة أحد الضلعين المتساويين هي : $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{١}{٧}$

أي أن : س − ٧ ص + ١٢ = ٠

، معادلة الضلع الآخر هي : $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = -٧$

أي أن : ٧ س + ص − ١٦ = ٠

٣

نفرض أن ميل المستقيم ل هو م$_١$

، ميل المستقيم لَ يساوي ٣

، هـ هي الزاوية بين المستقيمين حيث : جتا هـ = $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$

∴ ظا هـ = $\frac{\sqrt{١٠}}{٣\sqrt{١٠}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \left|\frac{م_١ - ٣}{١ + ٣م_١}\right|$

∴ $\frac{م_١ - ٣}{١ + ٣م_١} = \pm\frac{١}{٣}$

∴ ١ + ٣ م$_١$ = ٣ م$_١$ − ٩ ∴ م$_١$ (٣ − ٣) = ١٠

∴ م$_١$ = $\frac{١٠}{صفر}$ (غير معرفة)

أي ل مستقيم رأسي ∴ معادلة ل : س = ١

أ، ١ + ٣ م$_١$ = −٣ م$_١$ + ٩

∴ ٦ م$_١$ = ٨ ∴ م$_١$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ المعادلة هي $\frac{ص + ٢}{س - ١} = \frac{٤}{٣}$

أي ٤ س − ٣ ص − ١٠ = ٠

٤

∵ م$_١$ = $\frac{ب + ١}{ب - ١}$ ، م$_٢$ = ب

∴ ظا هـ = $\left|\frac{\frac{ب + ١}{ب - ١} - ب}{١ + \frac{ب + ب^٢}{ب - ١}}\right| = \left|\frac{\frac{١ + ب - ب + ب^٢}{ب - ١}}{\frac{ب - ١ + ب + ب^٢}{ب - ١}}\right|$

= ١ (حيث ب ≠ ١)

∴ ق (∠ هـ) = ٤٥° لجميع قيم ب ≠ ١

وهو قياس ثابت لا يتوقف على قيمة ب

8 إرشادات تمارين

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (أ) (٥) (جـ)

(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (د) (١٠) (جـ)

(١١) (جـ) (١٢) (ب) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (د)

(١٦) (جـ) (١٧) (أ) (١٨) (أ) (١٩) (د) (٢٠) (ب)

(٢١) (جـ) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (أ) (٢٥) (د)

(٢٦) (جـ) (٢٧) (د) (٢٨) (د) (٢٩) (جـ) (٣٠) (أ)

(٣١) (أ) (٣٢) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٥) وميله = $\frac{٤}{٣}$

∴ الصورة الكارتيزية هي $\frac{ص - ٥}{س - ٠} = \frac{٤}{٣}$

∴ ٤ س = ٣ ص − ١٥

∴ ٤ س − ٣ ص + ١٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|١٥ + ٠ - ٠|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

= $\frac{١٥}{٥}$ = ٣ وحدة طول

(٢) طول العمود = $\frac{|١٢ \times ٢ + ٥ \times -٤ - ٤٣|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

= $\frac{٣٩}{١٣}$ = ٣ وحدة طول

(٣) طول العمود = $\frac{|٨ \times ٥ + ١٥ \times ٢ - ١٩|}{\sqrt{٦٤ + ٢٢٥}}$

= $\frac{٥١}{١٧}$ = ٣ وحدة طول

(٤) طول العمود = $\frac{|١ \times -٢ + ١ \times -٧ + ٩|}{\sqrt{٢}}$

= $\frac{صفر}{\sqrt{٢}}$ = صفر

(٥) طول العمود = $\frac{|٢ \times ٢ + ٣ \times -٦ - ١٢|}{\sqrt{٤ + ٩}}$

= $\frac{٢٦}{\sqrt{١٣}} = ٢\sqrt{١٣}$ وحدة طول

(٦) طول العمود

= $\frac{|(١ - ب) \times ٢\sqrt{ب} + ٢\sqrt{١ ب} \times -\sqrt{١} - ٢ ١ \sqrt{ب}|}{\sqrt{(١ - ب)^{٢} + ٤ ب}}$

= $\frac{|٢ ١ \sqrt{ب} - ٢ ب \sqrt{ب} - ٢ ١ \sqrt{ب} - ٢ ١ \sqrt{ب}|}{\sqrt{(١ + ب)^{٢}}}$

= $\frac{|-٢\sqrt{ب}(١ + ب)|}{\sqrt{(١ + ب)^{٢}}} = ٢\sqrt{ب}$ وحدة طول

٢

طول نصف قطر الدائرة = طول العمود من المركز إلى المماس ل = $\frac{|٤ \times ٣ + ٣ \times -١ + ٦|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٥}{٥}$

= ٣ وحدة طول

٣

∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية القياس مع كل من الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات

∴ ميل المستقيم = ١

∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{ص + ٣}{س - ٢} = ١$

∴ ص + ٣ = س − ٢ ∴ س − ص − ٥ = ٠

∴ بعد النقطة (١ ، −٢) عن الخط المستقيم

= $\frac{|١ + ٢ - ٥|}{\sqrt{١ + ١}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

٤

∵ $\sqrt{١٣} = \frac{|٢ \times ١ + ٣ \times ح + ٥|}{\sqrt{٤ + ٩}}$

∴ ١٣ = |٧ + ٣ ح|

∴ إما ٧ + ٣ ح = ١٣ ومنها ح = ٢

أ، ٧ + ٣ ح = −١٣ ومنها ح = $\frac{-٢٠}{٣}$

٥

∵ ٢ = $\frac{|٣ \times ٢ - ٤ \times ١ + ح|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

∴ ١٠ = |٥ + ح|

∴ ٥ + ح = ١٠ ومنها ح = ٥

أ، ٥ + ح = −١٠ ومنها ح = −١٥

٦

∵ $٢\sqrt{١٠} = \frac{|٢ \times ٧ + ١ \times -١|}{\sqrt{٢^{٢} + ١}}$

∴ $٢\sqrt{١٠}\sqrt{٢^{٢} + ١} = |٧ ٢ - ١|$ وبتربيع الطرفين :

∴ ٤٠ (٢^٢ + ١) = (٧ ٢ − ١)^٢

∴ ٤٠ ٢^٢ + ٤٠ = ٤٩ ٢^٢ − ١٤ ٢ + ١

∴ ٩ ٢^٢ − ١٤ ٢ − ٣٩ = ٠

∴ (٢ − ٣) (٩ ٢ + ١٣) = ٠

∴ ٢ = ٣ أ، ٢ = $\frac{-١٣}{٩}$

٧

∵ ميل المستقيم ل١ = −٢

، ميل المستقيم ل٢ = −٢

∴ ل١ // ل٢

، البُعد بين المستقيمين = طول العمود الساقط من (٥ ، ٨) التي تنتمي إلى المستقيم ل١ إلى المستقيم ل٢

= $\frac{|٢ \times ٥ + ١ \times ٨ - ٣|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{١٥}{\sqrt{٥}} = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طول

٨

∵ ميل المستقيم ل١ = $\frac{٣}{٤}$

، ميل المستقيم ل٢ = $\frac{-٦}{-٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ ل١ // ل٢

، البعد بين المستقيمين = طول العمود الساقط من (٠ ، −٣) التي تنتمي للمستقيم ل١ إلى المستقيم ل٢

= $\frac{|٦ \times ٠ - ٨ \times -٣ + ٢١|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = \frac{٤٥}{١٠} = ٤,٥$ وحدة طول

٩

∵ ميل المستقيم ل١ = $\frac{٢}{٥}$

، ميل المستقيم ل٢ = $\frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

∴ ل١ // ل٢

، ∵ الصورة الكارتيزية للمستقيم ل١ هي :

$\frac{ص - ٢}{س - ٠} = \frac{٢}{٥}$

∴ ٥ ص − ١٠ = ٢ س

∴ ٢ س − ٥ ص + ١٠ = ٠

∴ البعد بين المستقيمين = طول العمود الساقط من (٢ ، −٣) التي تنتمي إلى المستقيم ل١ إلى المستقيم ل٢

= $\frac{|٢ \times ٢ - ٥ \times -٣ + ١٠|}{\sqrt{٤ + ٢٥}} = \frac{٢٩}{\sqrt{٢٩}} = \sqrt{٢٩}$ وحدة طول

١٠

∵ ميل الطريق الأول = $\frac{٣}{٤}$ ، ميل الطريق الثاني = $\frac{٣}{٤}$

∴ الطريق الأول // الطريق الثاني

، البعد بين الطريقين = طول العمود الساقط من $(٠ ، \frac{١١}{٤})$ التي تنتمي للطريق الثاني إلى الطريق الأول

= $\frac{|٣ \times ٠ - ٤ \times \frac{١١}{٤} - ٧|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١٨}{٥}$

= ٣,٦ وحدة طول

١١

∵ ٤ س − ٣ ص = ١٢

وبالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٤} = ١$

∴ ١ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، −٤)

∴ مساحة Δ و ١ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ وحدة مربعة

، أقصر مسافة = طول العمود الساقط من (٠ ، ٠) إلى المستقيم

= $\frac{|٤ \times ٠ - ٣ \times ٠ - ١٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤$ وحدة طول

١٢

(١) ب ح = $\sqrt{(٢ + ٢)^{٢} + (٣ - ٦)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ وحدة طول.

(٢) معادلة $\overleftrightarrow{ب ح}$ هي : $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{٦ - ٣}{-٢ - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

∴ ٤ ص − ١٢ = −٣ س + ٦

أي : ٣ س + ٤ ص − ١٨ = ٠

(٣) طول العمود من النقطة أ إلى $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

$= \frac{|٣ \times -٤ + ٤ \times ١ - ١٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٣٦}{٥} = ٧,٢$ وحدة طول

(٤) مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times \frac{٣٦}{٥}$

= ١٣ وحدة مربعة.

١٣

∵ ب ح $= \sqrt{(-٢ - ١)^٢ + (٥ + ٣)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ٦٤} = \sqrt{٧٣}$ وحدة طول

، معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هي : $\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} + ٢} = \frac{-٣ - ٥}{١ + ٢}$

أي : ٨ س + ٣ ص + ١ = ٠

، طول العمود من النقطة أ إلى $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

$= \frac{|٨ \times ٣ + ٣ \times ٢ + ١|}{\sqrt{٦٤ + ٩}} = \frac{٣١}{\sqrt{٧٣}}$ وحدة طول

∴ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٧٣} \times \frac{٣١}{\sqrt{٧٣}}$

= ١٥,٥ وحدة مربعة.

١٤

(١) بفرض أن : ء = (س ، ص)

، ∵ نقطة منتصف $\overline{\text{أ ح}}$ هي نفسها نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\left(\frac{-١ - ١}{٢} ، \frac{٤ - ٥}{٢}\right) = \left(\frac{٣ + \text{س}}{٢} ، \frac{-٢ + \text{ص}}{٢}\right)$

∴ س = −٥ ، ص = ١ ∴ ء = (−٥ ، ١)

(٢) ب ح $= \sqrt{(٣ + ١)^٢ + (-٢ + ٥)^٢} = ٥$ وحدة طول

(٣) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هي :

$\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ٣} = \frac{-٥ + ٢}{-١ - ٣}$ ∴ $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{س} - ٣} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ ص + ٨ = ٣ س − ٩

∴ ٣ س − ٤ ص − ١٧ = ٠

(٤) طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

$= \frac{|٣ \times -١ - ٤ \times ٤ - ١٧|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٣٦}{٥}$

= ٧,٢ وحدة طول

(٥) مساحة متوازي الأضلاع أ ب ح ء

= ٥ × ٧,٢ = ٣٦ وحدة مربعة

١٥

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $= \frac{-١ - ٢}{٣ + ٥} = \frac{-٣}{٨}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{ح ء}}$ $= \frac{٤ - ١}{-٢ - ٦} = \frac{-٣}{٨}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} // \overleftrightarrow{\text{ح ء}}$ (١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ $= \frac{-١ - ١}{٣ - ٦} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ $= \frac{٢ - ٤}{-٥ + ٢} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} // \overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ أ ب ح ء متوازي أضلاع

∴ ب ح $= \sqrt{(-٥ + ٢)^٢ + (٢ - ٤)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هي : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} + ٥} = \frac{٤ - ٢}{-٢ + ٥}$

أي : ٢ س − ٣ ص + ١٦ = ٠

∴ طول العمود الساقط من أ إلى $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

$= \frac{|٢ \times ٣ - ٣ \times -١ + ١٦|}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{٢٥}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= \sqrt{١٣} \times \frac{٢٥}{\sqrt{١٣}}$

= ٢٥ وحدة مربعة.

١٦

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ $= \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ $= \frac{٢ + ٢}{٦ + ٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} // \overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ (١)

، أ ء $= \sqrt{(٢ + ٢)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{١٦ + ٤}$

$= \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

، ب ح $= \sqrt{(٦ + ٢)^٢ + (٢ + ٢)^٢} = \sqrt{٦٤ + ١٦}$

$= \sqrt{٨٠} = ٤\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ أ ء ≠ ب ح (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : أ ب ح ء شبه منحرف

∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هي : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٦} = \frac{-٢ - ٢}{-٢ - ٦}$

أي : س − ٢ ص − ٢ = ٠

∴ طول العمود من أ على $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

$= \frac{|١ \times ٢ - ٢ \times ٣ - ٢|}{\sqrt{١ + ٤}} = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

∴ مساحة شبه المنحرف $= \left(\frac{٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥}}{٢}\right) \times \frac{٦}{\sqrt{٥}}$

$= \frac{٦\sqrt{٥}}{٢} \times \frac{٦}{\sqrt{٥}}$

= ١٨ وحدة مربعة.

١٧

∵ $\overline{\text{أ ء}} // \overline{\text{ب ح}}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

∴ $\frac{\text{ص} - ١}{٤ - ٢} = \frac{١ - ٣}{٦ - ٥}$ ∴ ص − ١ = −٤

∴ ص = −٣

، ∵ المعادلة الكارتيزية للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هي :

$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٥} = -٢$

∴ ص − ٣ = −٢ س + ١٠

∴ ٢ س + ص − ١٣ = ٠

∴ طول العمود المرسوم من أ (٢ ، ١) إلى $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

$= \frac{|٢ \times ٢ + ١ \times ١ - ١٣|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{٨}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

، ∵ أ ء $= \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (١ + ٣)^٢}$

$= \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

، ب ح $= \sqrt{(٥ - ٦)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{٥}$

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب ح ء

$= \frac{١}{٢}\left(٢\sqrt{٥} + \sqrt{٥}\right) \times \frac{٨}{\sqrt{٥}} = ١٢$ وحدة مربعة

١٨

∵ متجه اتجاه المستقيم هو (−١ ، ٧)

∴ معادلة المستقيم هي : ٧ س + ص + ح = ٠

∴ $٣\sqrt{٢} = \frac{|٧ \times ٣ + ١ \times ١ + \text{ح}|}{\sqrt{٤٩ + ١}}$

∴ ٣٠ = |٢٢ + ح| ∴ ٢٢ + ح = ٣٠

∴ ح = ٨

أو ٢٢ + ح = −٣٠ ∴ ح = −٥٢

∴ معادلة المستقيم هي : ٧ س + ص + ٨ = ٠

أو ٧ س + ص − ٥٢ = ٠

١٩

بعد النقطة (١ ، ١) عن الخط المستقيم

(٢ س − ص + ٣ = ٠) يساوي

$\frac{|٢ \times ١ - ١ + ٣|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{٤}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

، ∵ بعد النقطة (−٢ ، ٣) عن الخط المستقيم

(٢ س − ص + ٣ = ٠) يساوي

$\frac{|٢ \times -٢ - ٣ + ٣|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{|-٤|}{\sqrt{٥}} = \frac{٤}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

∴ النقطتان تقعان على بعدين متساويين من الخط المستقيم.

، ∵ المقدار ٢ س − ص + ٣ له إشارتان مختلفتان

٤ ، −٤ عند التعويض بإحداثيي النقطتين فإنهما يقعان

على جانبين مختلفين من الخط المستقيم.

٢٠

∵ طول العمود من م١ (٥ ، ٢) إلى المستقيم

$= \frac{|٣ \times ٥ - ٤ \times ٢ + ٣|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ وحدة طول

∴ طول العمود من م١ إلى المستقيم = نق١

∴ المستقيم يمس الدائرة م١

، ∵ طول العمود من م٢ (-٢ ، ٣) إلى المستقيم

$= \frac{|٣ \times -٢ - ٤ \times ٣ + ٣|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ وحدات طول

∴ طول العمود من م٢ إلى المستقيم = نق٢

∴ المستقيم يمس الدائرة م٢

، بالتعويض بالنقطة (٥ ، ٢) في معادلة المستقيم

∴ ٣ × ٥ - ٤ × ٢ + ٣ = ١٠ (موجبة)

، بالتعويض بالنقطة (-٢ ، ٣) في معادلة المستقيم

∴ ٣ × -٢ - ٤ × ٣ + ٣ = -١٥ (سالبة)

∴ الدائرتان تقعان في جهتين مختلفتين من المستقيم

٢١

∵ طول العمود من (٠ ، ٠) إلى الوتر الأول

$= \frac{|٤ \times ٠ - ٣ \times ٠ + ١٠|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ وحدة طول

، طول العمود من (٠ ، ٠) إلى الوتر الثاني

$= \frac{|٥ \times ٠ - ١٢ \times ٠ + ٢٦|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$ وحدة طول

∴ البعدان العموديان متساويان

∴ الوتران متساويان في الطول

٢٢

∵ المستقيم $\vec{ر} = (-٣ ، ٢٠) + ك (١ ، ٠)$ يمر بالنقطة (-٣ ، ٢٠) وميله = صفر

∴ الصورة الكارتيزية هي : ص - ٢٠ = ٠

∴ طول العمود من النقطة (١١ ، ٨) إلى الضلع الأول

$= \frac{|٠ \times ١١ + ١ \times ٨ - ٢٠|}{\sqrt{١}} = ١٢$ وحدة طول

، طول العمود من (١١ ، ٨) إلى الضلع الثاني

$= \frac{|٣ \times ١١ + ٤ \times ٨ - ٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$ وحدة طول

، طول العمود من (١١ ، ٨) إلى الضلع الثالث

$= \frac{|٥ \times ١١ + ١٢ \times ٨ + ٥|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} = \frac{١٥٦}{١٣} = ١٢$ وحدة طول

∴ الأبعاد العمودية متساوية

∴ النقطة (١١ ، ٨) هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث

٢٣

طول العمود الساقط من النقطة (٤ ، ٦) إلى المستقيم ٩ س - ١٢ ص - ٨ = ٠

$= \frac{|٩ \times ٤ - ١٢ \times ٦ - ٨|}{\sqrt{(٩)^٢ + (-١٢)^٢}} = \frac{|-٥٠|}{\sqrt{٢٥٠}} = \frac{٥٠}{٥\sqrt{١٠}}$

$= \sqrt{١٠}$ وحدة طول

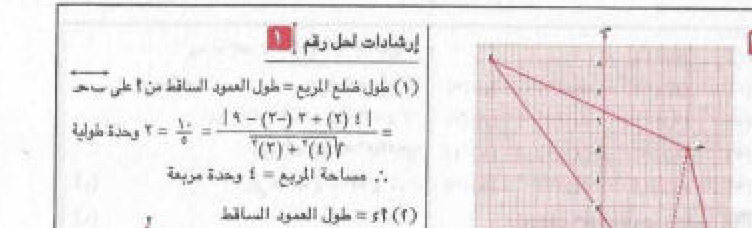
، طول العمود الساقط من النقطة (٤ ، ٦) إلى المستقيم س - ٣ ص + ٤ = ٠

$= \frac{|٤ - ٣ \times ٦ + ٤|}{\sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢}} = \frac{|-١٠|}{\sqrt{١٠}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

، ∵ البعدين متساويان

∴ النقطة (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفي الزاوية بين المستقيمين.

٢٤



∵ أ حـ $= \sqrt{(٢ - (-٣))^٢ + (٠ - ٥)^٢} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول

، ∵ معادلة $\overleftrightarrow{أحـ}$: $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{٥ - ٠}{-٣ - ٢}$

∴ ٥ س - ص - ١٠ = ٠

∴ طول العمود من ب (٤ ، ١) إلى المستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$

$= \frac{|٥ \times ٤ - ١ \times ١ - ١٠|}{\sqrt{٢٥ + ١}} = \frac{٩}{\sqrt{٢٦}}$ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٢٦} \times \frac{٩}{\sqrt{٢٦}}$

= ٤,٥ وحدة مربعة

، ∵ طول العمود من ء (-٤ ، ٨) إلى المستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$

$= \frac{|٥ \times -٤ - ١ \times ٨ - ١٠|}{\sqrt{٢٥ + ١}} = \frac{٣٨}{\sqrt{٢٦}}$ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ء حـ $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٢٦} \times \frac{٣٨}{\sqrt{٢٦}}$

= ١٩ وحدة مربعة

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٤,٥ + ١٩

= ٢٣,٥ وحدة مربعة

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (ب)

(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) طول ضلع المربع = طول العمود الساقط من أ على $\overleftrightarrow{ب حـ}$

$= \frac{|٤ (٢) + ٣ (-٣) - ٩|}{\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$ وحدة طولية

∴ مساحة المربع = ٤ وحدة مربعة

(٢) أ ء = طول العمود الساقط من أ على $\overleftrightarrow{ب حـ}$



$= \frac{|٢ + (-١) - ٢|}{\sqrt{١^٢ + ١^٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، ∵ جا ٦٠ = $\frac{أ ء}{أ ب}$

∴ أ ب = $\frac{أ ء}{جا ٦٠} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

$= \frac{\sqrt{٦}}{٣}$ وحدة طولية

(٣) ميل المستقيم = ظا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم هي : $\sqrt{٣}$ س + ص + حـ = ٠

، ∵ بعد النقطة (٠ ، ٠) عن المستقيم = ٤

∴ $\frac{|حـ|}{\sqrt{٣ + ١}} = ٤$ ∴ |حـ| = ٨

∴ حـ = ± ٨

∴ المعادلة هي : $\sqrt{٣}$ س + ص ± ٨ = ٠

(٤) نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث القائم هي نفسها نقطة رأس القائمة

∴ الإجابة هي (٠ ، ٠)

(٥) ∵ طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم = $\frac{|٠ + ٠ - ٢ حـ|}{\sqrt{١ + ب^٢}} = حـ$

∴ $\frac{٢ حـ}{\sqrt{١ + ب^٢}} = حـ$ ∴ $\sqrt{١ + ب^٢} = ٢$

∴ ب^٢ + ١ = ٤ ∴ ب^٢ = ٣

∴ ب = ± $\sqrt{٣}$ ∴ ب يمكن أن تساوي $\sqrt{٣}$

(٦) ∵ المثلثان متحدتا القاعدة أحـ

∴ النسبة بين مساحتيهما = النسبة بين ارتفاعيهما

∴ مساحة (△ أ ب حـ) / مساحة (△ أ ء حـ) = ١/٢

∴ بعد المستقيم ل١ عن ل / بعد المستقيم ل٢ عن ل = ١/٢

∴ بعد المستقيم ل٢ عن ل

= ٢ × (بعد المستقيم ل١ عن ل)

وبفرض نقطة ∈ المستقيم ل١ ولتكن (-١ ، ١)

∴ |٢(-١) + ٣(١) + ك| / √(٤ + ٩)

= ٢ × |٢(-١) + ٣(١) - ٤| / √(٤ + ٩)

∴ |١ + ك| = ٦

∴ ١ + ك = ٦ ومنها ك = ٥

أ، ١ + ك = -٦ ومنها ك = -٧

∴ الإجابة الصحيحة (جـ)

(٧) بالتعويض بالنقطتين أ (٣ ، -١) ، ب (٨ ، ٩)
في المقدار (س - ص - ٢) فإن قيمة المقدار
تساوي ٢ ، -٣ على الترتيب

، ∵ المقدار له إشارتان مختلفتان

∴ المستقيم يقسم أب من الداخل

، ∵ طول العمود المرسوم من أ
على المستقيم = |٢| / √٢ ، طول العمود المرسوم من ب
على المستقيم = |-٣| / √٢

∴ نسبة تقسيم أب = النسبة بين طولي
العموديين المرسومين من أ ، ب على المستقيم = ٢/٣

٢

نفرض أن النقطة هي (أ ، -أ - ٩)

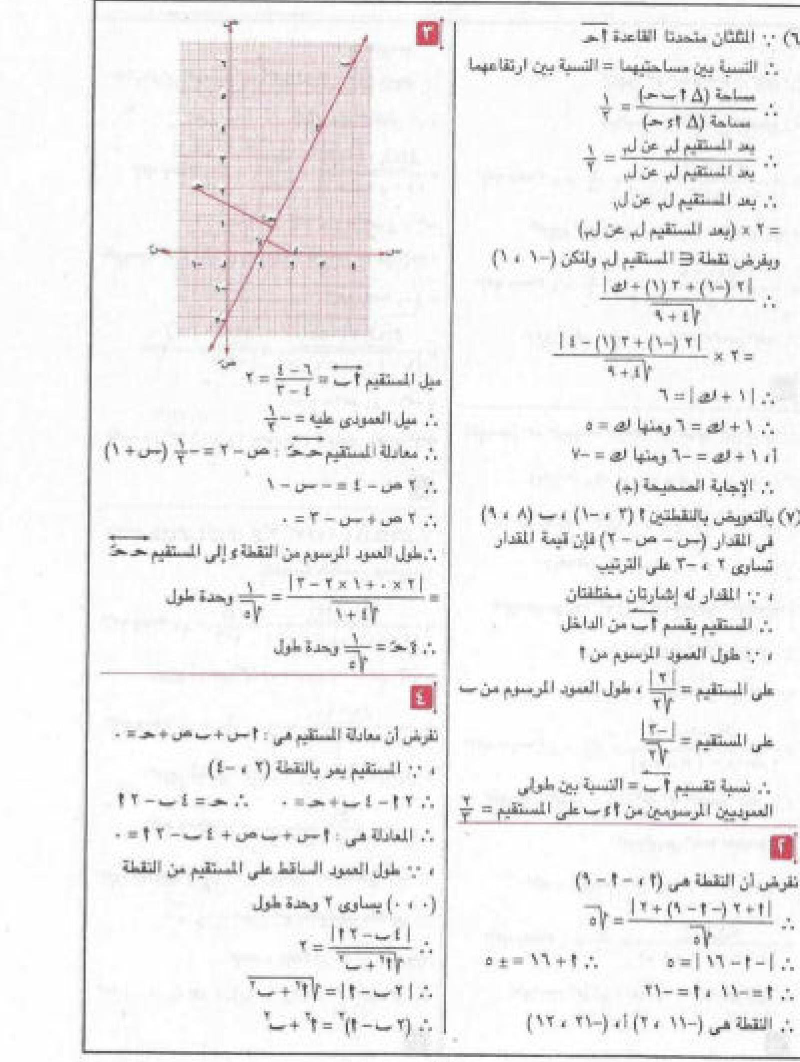
∴ |أ + ٢(-أ - ٩) + ٢| / √٥ = √٥

∴ |-أ - ١٦| = ٥   ∴ أ + ١٦ = ±٥

∴ أ = -١١ ، أ = -٢١

∴ النقطة هي (-١١ ، ٢) أ، (-٢١ ، ١٢)

٣



ميل المستقيم أب = (٦ - ٤)/(٤ - ٣) = ٢

∴ ميل العمودي عليه = -١/٢

∴ معادلة المستقيم حـء : ص - ٢ = -١/٢ (س + ١)

∴ ٢ ص - ٤ = -س - ١

∴ ٢ ص + س - ٣ = ٠

∴ طول العمود المرسوم من النقطة ء إلى المستقيم حـء

= |٢ × ٠ + ١ × ٢ - ٣| / √(٤ + ١) = ١/√٥ وحدة طول

∴ ء حـ = ١/√٥ وحدة طول

٤

نفرض أن معادلة المستقيم هي : أ س + ب ص + حـ = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، -٤)

∴ ٢ أ - ٤ ب + حـ = ٠   ∴ حـ = ٤ ب - ٢ أ

∴ المعادلة هي : أ س + ب ص + ٤ ب - ٢ أ = ٠

، ∵ طول العمود الساقط على المستقيم من النقطة
(٠ ، ٠) يساوي ٢ وحدة طول

∴ |٤ ب - ٢ أ| / √(أ² + ب²) = ٢

∴ |٢ ب - أ| = √(أ² + ب²)

∴ (٢ ب - أ)² = أ² + ب²

∴ ٤ ب² - ٤ أ ب + أ² = أ² + ب²

∴ ٣ ب² - ٤ أ ب = ٠   ∴ ب (٣ ب - ٤ أ) = ٠

∴ ب = ٠ ، أ، أ = ٣/٤ ب

∴ معادلة أحد المستقيمين هي :

أ س - ٢ أ = ٠   أي : س - ٢ = ٠

، معادلة المستقيم الآخر هي :

٣/٤ ب س + ب ص + ٤ ب - ٢ × ٣/٤ ب = صفر

بالضرب × ٤/ب

∴ ٣ س + ٤ ص + ١٦ - ٦ = ٠

أي : ٣ س + ٤ ص + ١٠ = ٠

٥

∵ ميل أب = ٣/٤ ، طول أب = ١٠ وحدة طول

، معادلة أب : ٣ س - ٤ ص + ١١ = ٠

∴ طول العمود من حـ (ك ، ٠)

إلى أب = |٣ ك + ١١| / ٥

∴ ٣٠ = ١/٢ × ١٠ × |٣ ك + ١١| / ٥

∴ ٣ ك + ١١ = ٣٠ ، أ، ٣ ك + ١١ = -٣٠

∴ ك = ١٩/٣ ، أ، ك = -٤١/٣

∴ حـ = (١٩/٣ ، ٠) أ، حـ = (-٤١/٣ ، ٠)

إرشادات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (ب)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)
(٩) (جـ)	(١٠) (د)	(١١) (ب)	(١٢) (د)
(١٣) (د)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)	(١٦) (جـ)
(١٧) (د)	(١٨) (أ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

٣ س + ٢ ص - ٤ + ك (٢ س + ٣ ص - ١) = ٠

، ∵ (١ ، -١) تحقق هذه المعادلة

∴ ٣ - ٢ - ٤ + ك (٢ - ٣ - ١) = ٠

∴ -٣ - ٢ ك = ٠   ∴ ك = -٣/٢

∴ المعادلة المطلوبة هي :

٣ س + ٢ ص - ٤ - ٣/٢ (٢ س + ٣ ص - ١) = ٠

أي : ٦ س + ٤ ص - ٨ - ٦ س - ٩ ص + ٣ = ٠

أي : -٥ ص - ٥ = ٠   أي : ص + ١ = ٠

٢

المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

٢ س + ص - ٢ + ك (٤ س + ٣ ص - ٣) = ٠

، ∵ نقطة الأصل تحققها

∴ -٢ - ٣ ك = ٠   ∴ ك = -٢/٣

∴ المعادلة المطلوبة هي :

٢ س + ص - ٢ - ٢/٣ (٤ س + ٣ ص - ٣) = ٠

أي : ٦ س + ٣ ص - ٦ - ٨ س - ٦ ص + ٦ = ٠

أي : ٢ س + ٣ ص = ٠

٣

∵ ي = ك (-٣ ، ٢)   ∴ ص/س = -٢/٣

∴ ص = -٢/٣ س   (١)

، ∵ ٣ س - ٢ ص = ١٣   (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ٣ س - ٢ × -٢/٣ س = ١٣

∴ ١٣/٣ س = ١٣   ∴ س = ٣

، بالتعويض في (١) : ∴ ص = -٢

، نقطة التقاطع هي : (٣ ، -٢)

، ∵ المستقيم يوازي محور الصادات

∴ ى→ = (٠ ، ١)

∴ المعادلة المطلوبة هي : ر→ = (٣ ، -٢) + ك (٠ ، ١)

٤

المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

س - ٣ ص + ٥ + ك (٢ س - ص - ٤) = ٠

أي : (١ + ٢ ك) س - (٣ + ك) ص + ٥ - ٤ ك = ٠

وميل هذا المستقيم = (١ + ٢ ك) / (٣ + ك)

، ∵ ميل المستقيم س - ٢ ص + ١ = ٠ هو ١/٢

∴ (١ + ٢ ك) / (٣ + ك) = ١/٢   ∴ ٢ + ٤ ك = ٣ + ك

∴ ك = ١/٣

∴ المعادلة المطلوبة هي :

س - ٣ ص + ٥ + ١/٣ (٢ س - ص - ٤) = ٠

أي : ٣ س - ٩ ص + ١٥ + ٢ س - ص - ٤ = ٠

أي : ٥ س - ١٠ ص + ١١ = ٠

٥

المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

٥ س - ص - ٥ + ك (س + ٢ ص - ١) = ٠

أي : (٥ + ك) س + (-١ + ٢ ك) ص - ٥ - ك = ٠

وميله = -(٥ + ك) / (-١ + ٢ ك)

، ∵ ميل المستقيم الثاني = -١/٢

∴ ميل العمودي عليه = ٢   ∴ -(٥ + ك) / (-١ + ٢ ك) = ٢

∴ -٥ - ك = -٢ + ٤ ك   ∴ ك = -٣/٥

∴ المعادلة المطلوبة هي :

٥ س - ص - ٥ - ٣/٥ (س + ٢ ص - ١) = ٠

أي : ٢٥ س - ٥ ص - ٢٥ - ٣ س - ٦ ص + ٣ = ٠

أي : ٢٢ س - ١١ ص - ٢٢ = ٠

أي : ٢ س - ص - ٢ = ٠

٦

∵ م١ = ٢/٣ ، م٢ = -٣/٢

∴ م١ × م٢ = ٢/٣ × (-٣/٢) = -١

∴ المستقيمان متقاطعان على التعامد

المعادلة الكارتيزية للمستقيم الثاني هي : (ص - ٢) / (س - ١) = -٣/٢

∴ ٢ ص + ٣ س = ٧

بحل المعادلتين : ٢ ص + ٣ س = ٧ (١)

، -٣ ص + ٢ س = -٤ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٣ :

∴ ٦ ص + ٩ س = ٢١ (٣)

بضرب المعادلة (٢) × ٢ :

∴ -٦ ص + ٤ س = -٨ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ١٣ س = ١٣   ∴ س = ١

وبالتعويض في (١) : ∴ ص = ٢

∴ نقطة التقاطع هي (١ ، ٢)

٧

∵ م١ = ١/٤ ، م٢ = -٤

∴ م١ × م٢ = ١/٤ × -٤ = -١

∴ المستقيمان متعامدان ولإيجاد نقطة التقاطع نحل المعادلتين معًا جبريًا :

س - ٤ ص = -١٤ (١)

، ٤ س + ص = -٥ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × ٤ والجمع مع (١) :

∴ ١٧ س = -٣٤   ∴ س = -٢

وبالتعويض في (١) : ∴ ص = ٣

∴ نقطة التقاطع هي (-٢ ، ٣)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، ٣) ، (٢ ، ١)

هي : (ص - ٣) / (س + ٢) = (١ - ٣) / (٢ + ٢)   ∴ (ص - ٣) / (س + ٢) = -١/٢

أي : ٢ ص - ٦ = -س - ٢

أي : ٢ ص + س - ٤ = ٠

٨

المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

٢ س + ص - ١ + ك (س - ص + ٣) = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، -٣)

∴ -٣ - ١ + ك (٠ + ٣ + ٣) = ٠

∴ ٦ ك = ٤   ∴ ك = ٢/٣

∴ المعادلة المطلوبة هي :

٢ س + ص - ١ + ٢/٣ (س - ص + ٣) = ٠

أي : ٦ س + ٣ ص - ٣ + ٢ س - ٢ ص + ٦ = ٠

أي : ٨ س + ص + ٣ = ٠

٩

المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

٥ س - ص - ٥ + ك (س + ٢ ص - ١) = ٠

∴ (٥ + ك) س + (-١ + ٢ ك) ص - ٥ - ك = ٠

∴ (٥ + ك) س + (-١ + ٢ ك) ص = ٥ + ك

∴ ((٥ + ك) / (٥ + ك)) س + ((٢ ك - ١) / (٥ + ك)) ص = ١

∴ س/١ + ص / ((٥ + ك) / (٢ ك - ١)) = ١

∵ المستقيم يقطع من الجزءين الموجبين لمحوري الإحداثيات طولين متساويين.

∴ (٥ + ك) / (٢ ك - ١) = ١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س + ص = ١

حل آخر :

∵ المستقيم يقطع جزءين متساويين من الجزءين الموجبين لمحوري الإحداثيات.

∴ ميله = ظا ١٣٥° = -١

∴ (٥ + ك) / (١ - ٢ ك) = -١

∴ ٥ + ك = -١ + ٢ ك

∴ ك = ٦   ∴ المعادلة هي : س + ص - ١ = ٠

١٠

(١) ∵ (ص - ٠) / (س + ٢) = ٢/٣   ∴ ٣ ص - ٢ س = ٤

(٢) ∵ م١ = -٣/٢ ، م٢ = ٢/٣   ∵ م١ × م٢ = -١

∴ قياس الزاوية بين المستقيمين = ٩٠°

(٣) ∵ ٣ ص - ٢ س = ٤ (١)

٢ ص + ٣ س = ٧ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٣ :

∴ ٩ ص - ٦ س = ١٢ (٣)

بضرب المعادلة (٢) × ٢ :

∴ ٤ ص + ٦ س = ١٤ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ١٣ ص = ٢٦   ∴ ص = ٢

وبالتعويض في (١) : ∴ س = ١

∴ نقطة التقاطع هي (١ ، ٢)

(٤) (ص - ٢) / (س - ١) = (٢ - ٤) / (١ - ٣) = ١   ∴ ص - ٢ = س - ١

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي : ص - س = ١

(٥) طول العمود = |٣ × ١ - ٤ × ٢ - ٩| / √(٩ + ١٦) = ١٤/٥ = ٢,٨ وحدة طول

(٦) ∵ المستقيم ل١ يقطع محور السينات في النقطة (٧/٢ ، ٠)

، المستقيم ل٢ يقطع محور السينات في النقطة (-٢ ، ٠)

، طول العمود الساقط من نقطة تقاطع المستقيمين ل١ ، ل٢ على محور السينات = ٢ وحدة طول.

∴ طول قاعدة المثلث = √((٧/٢ + ٢)² - (٠ - ٠)²)

= ٤ ١/٢ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = ١/٢ × ٤ ١/٢ × ٢

= ٤ ١/٢ وحدة مربعة

١١

∵ م١ = $\frac{٣}{٤}$ ، م٢ = $\frac{-٤}{٣}$ ∴ م١ × م٢ = −١

∴ الطريقين متعامدين

(١) ∵ ٣ س − ٤ ص = ١٤ (١)

، ٤ س + ٣ ص = ٢ (٢)

بضرب (١) × ٣ : ∴ ٩ س − ١٢ ص = ٤٢ (٣)

بضرب (٢) × ٤ : ∴ ١٦ س + ١٢ ص = ٨ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ٢٥ س = ٥٠ ∴ س = ٢

وبالتعويض في (١) : ∴ ص = −٢

∴ نقطة التقاطع هي (٢ ، −٢)

(٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٢) ، (٢ ، −٢)

∵ الميل = $\frac{-٢ + ٢}{٢ - ٣}$ = ٠

∴ ص = حـ ∴ ص = −٢

(٣) طول القصر بعد = $\frac{|٤ \times ٢ + ٣|}{\sqrt{١٦ + ٠}}$

= $\frac{١١}{٤}$ = ٢,٧٥ وحدة طول

(٤) ∵ المسار الأول يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، −٢,٥)

، المسار الثاني يقطع محور الصادات في النقطة $\left(٠ ، \frac{٢}{٣}\right)$

وبعد نقطة التقاطع (٢ ، −٢) عن محور الصادات = ٢ وحدة طول

∴ طول قاعدة المثلث

= $\sqrt{(٠ - ٠)^٢ + \left(-٢,٥ - \frac{٢}{٣}\right)^٢}$

= $٤\frac{١}{٦}$ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٤\frac{١}{٦} \times ٢ = ٤\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (أ) (٥) (أ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) بضرب المعادلة الأولى × أ ب

∴ ب س + أ ص = أ ب (١)

، بضرب المعادلة الثانية × أ ب

∴ أ س + ب ص = أ ب (٢)

بطرح (٢) من (١) :

∴ (ب − أ) س + (أ − ب) ص = ٠

∴ (أ − ب) (ص − س) = ٠

، ∵ أ ≠ ب لأن المستقيمان مختلفين

∴ ص = س

وبالتعويض في (١) : ∴ ب س + أ س = أ ب

∴ (ب + أ) س = أ ب

∴ س = $\frac{أ ب}{أ + ب}$ ∴ ص = $\frac{أ ب}{أ + ب}$

∴ نقطة تقاطع المستقيمين = $\left(\frac{أ ب}{أ + ب} ، \frac{أ ب}{أ + ب}\right)$

(٢) ∵ (٢ + ك) س + (١ + ك) ص = ٥ + ٧ ك

∴ ٢ س + ص − ٥ + ك (س + ص − ٧) = ٠

وهذه هي عائلة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع المستقيمان

٢ س + ص − ٥ = ٠ ، س + ص − ٧ = ٠

وهي (−٢ ، ٩)

(٣) بحل المعادلات معًا نجد أن أ (−٣ ، ٣)

، ب (١ ، ١) ، حـ (١ ، −١) ، ء (−٢ ، −٢)

∴ ميل $\overline{أ حـ}$ = −١ ، ميل $\overline{ب ء}$ = ١

، ∵ حاصل ضرب ميلي $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ يساوي −١

∴ قياس الزاوية بين القطران $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ تساوي ٩٠°

(٤) بحل المعادلتين ٣ س + ص − ٢ = ٠

، ٢ س − ص − ٣ = ٠ معًا

∴ نقطة التقاطع هي (١ ، −١)

، ∵ (١ ، −١) تحقق المستقيم

ك س + ٢ ص − ٣ = ٠

∴ ك − ٢ − ٣ = ٠ ∴ ك = ٥

(٥) ∵ المستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة

، ∵ س + أ = ٠ ∴ س = −أ (١)

، ∵ ص + ٤ = ٠ ∴ ص = −٤ (٢)

وبالتعويض من (١) ، (٢) في المعادلة :

∴ س + ٢ ص + ٤ = ٠

∴ −أ − ٨ + ٤ = ٠ ∴ أ = −٤

٢

∵ معادلة المستقيم الأول هي : $\frac{ص - ٢}{س - ٥} = \frac{٣}{٢}$

∴ ٢ ص − ٣ س + ١١ = ٠

، معادلة المستقيم الثاني هي : $\frac{ص - ٤}{س - ١١} = \frac{١}{٣}$

∴ س − ٣ ص + ١ = ٠

∴ المعادلة العامة للمستقيم المطلوب هي :

٢ س − ٢ ص − ١١ + ك (س − ٣ ص + ١) = ٠ (١)

أي : (٢ + ك) س − (٢ + ٣ ك) ص − ١١ + ك = ٠

، ∵ طول العمود الساقط من النقطة (−٢ ، ١) عليه يساوي $٥\sqrt{٢}$

∴ $٥\sqrt{٢} = \frac{|(٢ + ك)(-٢) - (٢ + ٣ ك) \times ١ - ١١ + ك|}{\sqrt{(٢ + ك)^٢ + (٢ + ٣ ك)^٢}}$

∴ $٥\sqrt{٢} = \frac{|-٤ - ٢ ك - ٢ - ٣ ك - ١١ + ك|}{\sqrt{(٢ + ك)^٢ + (٢ + ٣ ك)^٢}}$

∴ $٥\sqrt{٢} = \frac{|-٤ ك - ١٩|}{\sqrt{(٢ + ك)^٢ + (٢ + ٣ ك)^٢}}$

وبتربيع الطرفين :

∴ ٥٠ [(٢ + ك)^٢ + (٢ + ٣ ك)^٢] = (٤ ك + ١٩)^٢

∴ ٥٠ (١٣ + ١٨ ك + ١٠ ك^٢)

= ١٦ ك^٢ + ١٥٢ ك + ٣٦١

∴ ٥٠٠ ك^٢ + ٩٠٠ ك + ٦٥٠

= ١٦ ك^٢ + ١٥٢ ك + ٣٦١

∴ ٤٨٤ ك^٢ + ٧٤٨ ك + ٢٨٩ = ٠

∴ (٢٢ ك + ١٧)^٢ = ٠

∴ ك = $\frac{-١٧}{٢٢}$ وبالتعويض في المعادلة (١) :

∴ معادلة المستقيم هي :

٢ س − ٢ ص − ١١ + $\frac{-١٧}{٢٢}$ (س − ٣ ص + ١) = ٠

∴ ٦٦ س − ٤٤ ص − ٢٤٢ − ١٧ س + ٥١ ص − ١٧ = ٠

أي : ٤٩ س + ٧ ص − ٢٥٩ = ٠

وبقسمة الطرفين على ٧ :

∴ معادلة المستقيم هي : ٧ س + ص − ٣٧ = ٠

٣

(١) ∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{٤ - ١}{٧ - ١} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

، ∵ ق (∠ ب) = ٩٠° ∴ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = −٢

∴ معادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هي : $\frac{ص - ٤}{س - ٧} = -٢$

∴ ص + ٢ س − ١٨ = ٠ (١)

(٢) ∵ ميل $\overleftrightarrow{أ ء}$ = $\frac{٧ - ١}{٢ - ١} = ٦$

، ∵ ق (∠ ء) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∴ ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{-١}{٦}$

∴ معادلة $\overleftrightarrow{حـ ء}$ هي : $\frac{ص - ٧}{س - ٢} = \frac{-١}{٦}$

∴ ٦ ص + س − ٤٤ = ٠ (٢)

(٣) بحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا :

∴ ص = $\frac{٧٠}{١١}$ ، س = $\frac{٦٤}{١١}$

∴ حـ = $\left(\frac{٦٤}{١١} ، \frac{٧٠}{١١}\right)$